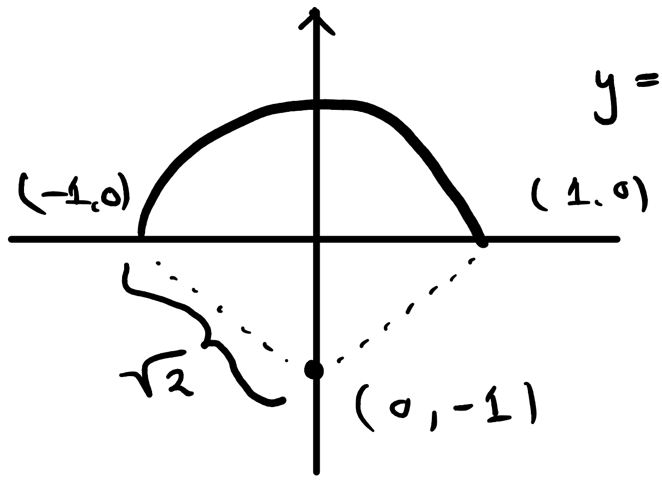
Viikko 5 LV

M1

$y = \sqrt{1-x^2}$



Jotta Lagrangen kertoimet auttaisivat tässä, pitäisi etäisyyden neliön $f(x,y) = (x^2 + (y+1)^2)$ tasa-arvokäyrän $f(x,y) = 2$ olla päätepisteissä puoliympyrän tangentin suuntainen.

Otaniemeksi: f ei tangeeraa

M2 Piste (x_0, y_0) ; Suora $Ax + By + C = 0$

Sidottu ääriarvotehtävä:

Määritä funktion $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ pienin arvo joukossa $\{(x, y) \mid Ax + By + C = 0\}$.

$$L(x, y, \lambda) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \underbrace{2\lambda}_{\text{valinta}}(Ax + By + C)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = x - x_0 + \lambda A = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = y - y_0 + \lambda B = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Ax + By + C = 0$$

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial L}{\partial x} + B\dfrac{\partial L}{\partial y} = A(x - x_0 + \lambda A) + B(y - y_0 + \lambda B) = 0 \\ C = -Ax - By \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$$

Nyt: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \lambda^2 (A^2 + B^2)$

$\Rightarrow$ minimietäisyys: $|\lambda|\sqrt{A^2 + B^2} = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Ratkaisut, Viikko 5, 2020

Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Etsi origon lyhin etäisyys hyperbelistä $x^2+8xy+7y^2 = 45$ käyttäen Lagrangen kertoimia.
Ratkaisu: $\sqrt{5}$.

RATKAISU Euklisidisessa tasossa pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+y^2}$. Toisaalta neliöjuuri on kasvava funktio, joten voimme minimioida funktiota $f(x) = x^2 + y^2$. Annettu sidosehto voidaan kirjoittaa $g(x) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 45$. Tällöin Lagrangen funktioksi saadaan

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 8xy + 7y^2 - 45) \\ &= (1 + \lambda)x^2 + (1 + 7\lambda)y^2 + 8\lambda xy - 45\lambda. \end{aligned}$$

Lagrangen funktion kriittiset pisteet saadaan nyt yhtälöryhmästä

$$L(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 2(1 + \lambda)x + 8\lambda y & = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 2(1 + 7\lambda)y + 8\lambda x & = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 45 & = 0. \end{cases}$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} &2(1 + \lambda)x + 8\lambda y = 0 && 2(1 + 7\lambda)y + 8\lambda x = 0 \\ &\Rightarrow x = -\frac{4\lambda y}{1 + \lambda} && \Rightarrow x = -\frac{(1 + 7\lambda)y}{4\lambda}, \end{aligned}$$

joten

$$
\begin{aligned}
-\frac{4\lambda y}{1+\lambda} &= \frac{(1+7\lambda)y}{4\lambda} \\
\Rightarrow y\left(\frac{1+7\lambda}{4\lambda} - \frac{4\lambda}{1+\lambda}\right) &= 0 \\
\Rightarrow y = 0 \text{ tai } \frac{1+7\lambda}{4\lambda} - \frac{4\lambda}{1+\lambda} &= 0.
\end{aligned}
$$

Tutkitaan tapauksittain:

(i) Jos $y = 0$, niin tällöin myös $x = 0$ ja viimeisestä epäyhtälöstä seuraisi $-45 = 0$. Siten $y \neq 0$.

(ii) Ratkaistaan

$$
\begin{aligned}
1 + 7\lambda 4\lambda - \frac{4\lambda}{1+\lambda} &= 0 \\
\Rightarrow \ -9\lambda^2 + 8\lambda + 1 &= 0 \\
\Rightarrow \lambda = 1 \text{ tai } \lambda &= -\frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

Jos $\lambda = 1$, niin

$$x = -\frac{4\lambda y}{1+\lambda} = -\frac{4y}{2} = -2y$$

ja sijoittamalla viimeiseen yhtälöön saadaan

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 45 = -5y^2 - 45 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = -9 \ \Rightarrow \ \text{ ei reaalisia nollakohtia.}$$

Jos taas $\lambda = -1/9$, niin

$$x = -\frac{4\lambda y}{1+\lambda} = -\frac{4/9 y}{1 - 1/9} = \frac{y}{2}$$

ja tällöin viimeisestä yhtälöstä seuraa

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 45 = \frac{45}{5}y^2 - 45 = 0$$

$$\Rightarrow y = \pm 2 \ \Rightarrow \ x = \pm 1.$$

Löydettiin siis pisteen $(1,2)$ ja $-1,-2)$. Niiden etäisyys origosta on $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$.

Koska Lagrangen funktiolla ei voida löytää ääriarvoja pisteissä, joissa $\nabla g(x,y) = 0$, täytyy ne tarkastella vielä erikseen.

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 2x + 8y = 0 \\ g_y(x,y) = 14y + 8x = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \ (x,y) = (0,0).$$

Piste $(0,0)$ ei kuitenkaan toteuta sidosehtoa $g(x,y) = 0$, joten origon lyhin etäisyys hyperbelistä on $\sqrt{5}$.

TEHTÄVÄ J2 Määritä origon suurin ja pienin etäisyys käyrästä

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1.$$

Ratkaisu: $(a > 0, b > 0)$ $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$, $\min\{a, b\}$.

RATKAISU Minimioitavaksi funktioksi voidaan tässäkin valita $f(x, y) = x^2 + y^2$ ja sidosehdoksi

$$g(x, y) = \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} - 1 = 0.$$

Nyt Lagrangen funktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} - 1 \right)$$

kriittiset pisteet ratkeavat yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = x \left(2 + 4\lambda \dfrac{x^2}{a^4} \right) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = y \left(2 + 4\lambda \dfrac{y^2}{b^4} \right) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = \dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^4}{b^4} - 1 = 0. \end{cases}$$

Tutkitaan taas tapauksittain:

(i) Jos $x = 0$, niin viimeisestä yhtälöstä seuraa $y = \pm b$. Tällöin etäisyys on $\sqrt{0^2 + b^2} = b$. Toisaalta, jos $y = 0$, niin viimeisestä yhtälöstä seuraa $x = \pm a$, jolloin etäisyydeksi saadaan $\sqrt{0^2 + a^2} = a$.

(ii) Jos taas $x, y \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} & 2 + 4\lambda \frac{x^2}{a^4} = 0 \\ \Rightarrow \quad & x^2 = -\frac{a^4}{2\lambda} \quad (\Rightarrow \lambda < 0). \end{aligned}$$

Vastaavasti toisesta yhtälöstä saadaan

$$y^2 = -\frac{b^4}{2\lambda}.$$

Sijoittamalla viimeiseen yhtälöön seuraa tällöin

$$
\begin{aligned}
& \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} - 1 = \frac{1}{a^4}\left(\frac{a^8}{4\lambda^2}\right) + \frac{1}{b^4}\left(\frac{b^8}{4\lambda^2}\right) = 1 \\
\Rightarrow \quad & \frac{a^4 + b^4}{4\lambda^2} = 1 \\
\Rightarrow \quad & \lambda = -\frac{\sqrt{a^4 + b^4}}{2} \\
\Rightarrow \quad & x^2 = \frac{a^4}{\sqrt{a^4 + b^4}} \quad \textbf{ja} \quad y^2 = \frac{b^4}{\sqrt{a^4 + b^4}}.
\end{aligned}
$$

Tällöin origon etäisyys käyrästä on

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt[4]{a^4 + b^4} \quad (> a, b).$$

Lisäksi gradientin ∇g ainoa nollakohta on origo, joka ei kuulu käyrälle. Näin ollen kohdissa **(i)** ja **(ii)** saaduista tuloksista seuraa, että etäisyyden minimin oltava joko a tai b riippuen siitä, kumpi on pienempi. Siten minimi on $\min\{a, b\}$.

K1 $\quad f(x,y,z) = xy^2z^3$

Pallo $x^2+y^2+z^2 \leq 2$.

Koska $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3 = 0$ vain jos joko $y=0$ tai $z=0$, ei yksikään kriittinen piste antaa arvoa $\neq 0$.

Maksimi ja minimi löytyvät siis pallon pinnalta. (Huomaa merkkien vaihtelu reunalla.)

Lagrange: $L(x,y,\lambda) = xy^2z^3 + \lambda(x^2+y^2+z^2-2)$

$x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= y^2z^3 + 2\lambda x = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2xyz^3 + 2\lambda y = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 3xy^2z^2 + 2\lambda z = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{kaikissa } 2\lambda \quad \otimes$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-2 = 0$$

$$\otimes \Rightarrow \frac{y^2z^3}{x} = 2xz^3 = 3xy^2z$$

eli $y^2 = 2x^2$, $z^2 = \frac{3}{2}y^2 = 3x^2$

joten $x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

$$y^2 = \frac{2}{3} \quad , \quad z^2 = 1$$

Siis, jokaisessa oktantissa on yksi kriittinen piste.

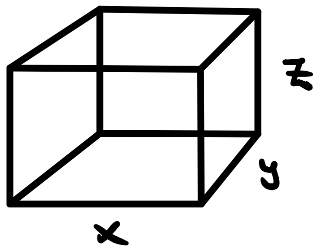
Maksimi : $f(x, y, z) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Minimi : $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Maksimi ja minimi esiintyvät molemmat neljässä eri pisteessä.

K2 <u>Laatikko</u>



$$V = xyz$$

Luokitellaan osat:

pohjan ala : xy
etulevyn ala : xz

takalevyn ala : xz
sivulevyn ala : yz

Kustannus : $C = 5k(xz + xy) + k(2yz + xz)$

Lagrange:

$$L(x, y, z, \lambda) = k(5xy + 6xz + 2y) + \lambda(xyz - V)$$

Kriittiset pisteet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 5ky + 6kz + \lambda yz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 5kx + 2kz + \lambda xz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 6kx + 2ky + \lambda xy = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xyz - V = 0$$

Haaste

Tässä tehtävässä gradienttia ∇f käsitellään pystyvektorina. Yksittäisen osittaisderivaatan arvo kuten $f_x(x_0, y_0)$ riippuu (yleensä) koordinaatiston valinnasta. Osoita, että gradientti ∇f on koordinaatistosta riippumaton suure seuraavassa mielessä ($n = 2$): Olkoon A ortogonaalinen 2×2-matriisi, ts. $A^T A = I$ (eli kierto, jos lisäksi $\det A = +1$) ja

$$F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x}) = f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y).$$

Tällöin

$$A\nabla F(\mathbf{x}) = \nabla f(A\mathbf{x}).$$

Vihje: Aloita laskemalla F_x ja F_y. Huomaa lisäksi, että oikealla puolella lasketaan vektorin ∇f arvo pisteessä $A\mathbf{x}$.
Huom: Vastaava päättely toimii tietysti kaikissa dimensioissa.

Todistus. Olkoon A ortogonaalinen eli $A^T A = I$ sekä

$$F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x}) = f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y) = f(x', y').$$

Tässä merkittiin lineaarimuunnettuja, uusia x ja y-koodinaatteja sekaannusten välttämiseksi seuraavasti: $x' = a_{11}x + a_{12}y$ ja $y' = a_{21}x + a_{22}y$. Lasketaan aluksi osittaisderivaatat ketjusäännön avulla:

$$\begin{aligned} F_x(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(A\mathbf{x})}{\partial x} &= \frac{\partial f(x', y')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f(x', y')}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} \\ &= f_{x'}(x', y') \cdot a_{11} + f_{y'}(x', y') \cdot a_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(A\mathbf{x})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x', y')}{\partial y} = \frac{\partial f(x', y')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial f(x', y')}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} \\ &= f_{x'}(x', y') \cdot a_{12} + f_{y'}(x', y') \cdot a_{22}. \end{aligned}$$

Lasketaan sitten gradientti:

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x'}(x', y') \cdot a_{11} + f_{y'}(x', y') \cdot a_{21} \\ f_{x'}(x', y') \cdot a_{12} + f_{y'}(x', y') \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x'}(x', y') \\ f_{y'}(x', y') \end{pmatrix} = A^T \nabla f(A\mathbf{x}).$$

Koska A on ortogonaalinen, niin

$$A\nabla F(\mathbf{x}) = AA^T \nabla f(A\mathbf{x}) = I\nabla f(A\mathbf{x}) = \nabla f(A\mathbf{x}).$$

$\square$