Viikko 6 AV

M1 $\quad y = Kx^s \qquad | \cdot \ln$

$$\ln y = \ln K + s \ln x$$

Suora: $\eta = a\xi + b$, kun $(\xi_i, \eta_i) = (\ln x_i, \ln y_i)$

Ratkaistaan: $K = e^b$, $s = a$

Huomaa, että vastaus on eri kuin mitä saataisi minimoimalla

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - Kx_i^s)^2 .$$

Tarkka ratkaisu ei onnistu, vaan on käytettävä sopivaa numeerista menetelmää.

M2 $\quad J_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$; $\underline{f} = (f, g, h)^T$

Newton : $\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - J^{-1}_{\underline{f}(\underline{x}_n)} \underline{f}(\underline{x}_n)$

Cramer : $\underline{x} = (x, y, z)^T$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\det J_{\underline{f}(x_n)}} \left. \begin{vmatrix} f & f_2 & f_3 \\ g & g_2 & g_3 \\ h & h_2 & h_3 \end{vmatrix} \right|_{(x_n, y_n, z_n)}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{\det J_{\underline{f}(\underline{x}_n)}} \left. \begin{vmatrix} f_1 & f & f_3 \\ g_1 & g & g_3 \\ h_1 & h & h_3 \end{vmatrix} \right|_{(x_n, y_n, z_n)}$$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{1}{\det J_{f(\underline{x}_n)}} \left. \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f \\ g_1 & g_2 & g \\ h_1 & h_2 & h \end{vmatrix} \right|_{(x_n, y_n, z_n)}$$

Cramerin sääntö on kallis yleiselle $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, mutta voi puolustaa paikkaansa, kun $n=2$ tai $n=3$.

Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Ratkaisut, Viikko 6, 2020

Alkuviikko

TEHTÄVÄ J1 Sovita paraabeli $y = p + q\,x^2$ mittausdataan $(x_i, y_i) = (1, 0.11), (2, 1.62), (3, 4.07), (4, 7.55), (6, 17.63), (7, 24.20)$. Arvioi mahdollista mittaustulosta, kun $x = 5$.

RATKAISU Sovitetaan paraabeli $y = p + qx^2$ mittausdataan

x_i	1	2	3	4	6	7
y_i	0.11	1.62	4.07	7.55	17.63	24.20

soveltamalla matriisimuotoista PNS-menetelmää. Etsitään siis vektoria $\mathrm{x} = (p, q)^T$, joka tuottaa parhaan mahdollisen "ratkaisun" lineaariselle yhtälöryhmälle

$$A\mathrm{x} = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_6^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1^2 \\ 1 & 2^2 \\ 1 & 3^2 \\ 1 & 4^2 \\ 1 & 6^2 \\ 1 & 7^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,11 \\ 1,62 \\ 4,07 \\ 7,55 \\ 17,63 \\ 24,20 \end{pmatrix}.$$

Sovitus saadaan nyt ratkaisemalla yhtälö $A^{\mathrm{T}}A\mathrm{x} = A^T b$. Ensinnäkin

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 36 & 49 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \\ 1 & 36 \\ 1 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 115 \\ 115 & 4051 \end{pmatrix}$$

ja

$$A^{\mathrm{T}}b = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 36 & 49 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,11 \\ 1,62 \\ 4,07 \\ 7,55 \\ 17,63 \\ 24,20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55,18 \\ 1984,5 \end{pmatrix}.$$

Siten

$$\begin{aligned} & A^{\mathrm{T}}A(p,q)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}b \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} 6 & 115 \\ 115 & 4051 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55,18 \\ 1984,5 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{cases} 6p + 115q & = 55,18 \\ 115p + 4051q & = 1984,5 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} p = -0,422644 & \approx -0,423 \\ q = 0,0501877 & \approx 0,502 \end{cases} \\ \Rightarrow & y = -0,42 + 0,50x^2. \end{aligned}$$

Kun $x = 5$ saadaan sovituksesta $y = 12,08$.

TEHTÄVÄ J2 Muodosta Newtonin menetelmän mukainen matriisimuotoinen iteraatiokaava yhtälöparille

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2xy^5, \\ x^6 + x^2 + y^4 = 4. \end{cases}$$

Etsi tämän avulla yksi yhtälöparin kaikkiaan neljästä (reaalisesta) ratkaisusta.

RATKAISU Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2xy^5 \\ x^6 + x^2 + y^4 = 4 \end{cases}$$

ratkaisu vastaa tapausta $\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{0}$, kun valitaan

$$f_1(x, y) = x^4 + y^4 - 2xy^5 \quad \textbf{ja} \quad f_2(x, y) = x^6 + x^2 + y^4 - 4.$$

Newtonin menetelmässä

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - D\mathbf{f}(x, y)^{-1}\mathbf{f}(x, y), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

iteroinnin alkuarvo $\mathbf{x}_0$ täytyy valita itse. Asetetaan tässä $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$. Lisäksi tarvittava Jacobin matriisi on

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2y^5 & 4y^3 - 10xy^4 \\ 6x^5 + 2x & 4y^3 \end{pmatrix}.$$

Neliömatriisin käänteismatriisille (jos se on olemassa $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$) pätee

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

joten tässä saadaan

$$D\mathbf{f}(1, 1)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyt voidaan ratkaista

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 - D\mathbf{f}(1, 1)^{-1}\mathbf{f}(1, 1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,10714 \\ 1,03571 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vastaavasti

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 1,09081 \\ 1,03144 \end{pmatrix}$$

ja

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1,0903 \\ 1,03135 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1,09029 \\ 1,03135 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 1,09029 \\ 1,03135 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_4.$$

Siten yksi yhtälöryhmän ratkaisu on $(x, y) = (1,09029; 1,03195)$.
Muut mahdolliset ratkaisut ovat

$$\begin{pmatrix} -1,09029 \\ -1,03135 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,38005 \\ 1,40256 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} -0,38005 \\ -1,40256 \end{pmatrix}.$$

K1 Minimoidaan:

$$I = \int_0^{\pi} \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx \right) \right)^2 dx$$

$$0 = \frac{\partial I}{\partial a_0} = - \int_0^{\pi} \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx \right) \right) dx$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

Indeksit $j = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = -2 \int_0^{\pi} \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx \right) \right) \cdot \cos jx \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\int_0^{\pi} \cos kx \cos jx \, dx}_{=0, \text{ kun } k \neq j} = \int_0^{\pi} f(x) \cos jx \, dx$$

$$j = k : \quad \int_0^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos jx \, dx$$

K2 $f(x,y,z) = y^2 + z^2 - 3$

$f_1 = 0$
$f_2 = 2y$
$f_3 = 2z$

$g(x,y,z) = x^2 + z^2 - 2$

$g_1 = 2x$
$g_2 = 0$
$g_3 = 2z$

$h(x,y,z) = x^2 - z$

$h_1 = 2x$
$h_2 = 0$
$h_3 = -1$

Nyt: $z = x^2$ eli $z^2 + z - 2 = 0$

$\iff (z-1)(z+2) = 0$

$z = 1$ & $x = 1$ 1. oktantissa, siis $y = \sqrt{2}$.