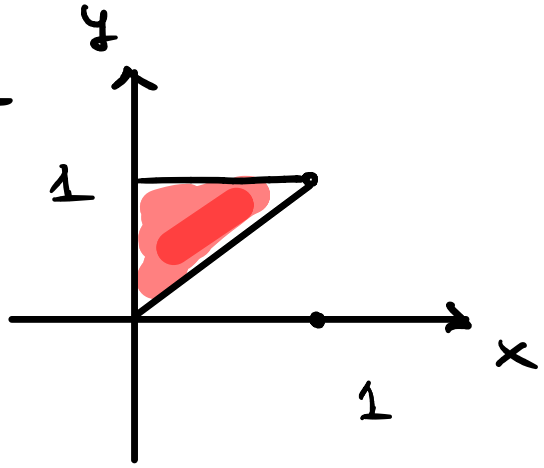
Viikko 6 LV

M1



$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy = I_1$$

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)\,dx = \Big/_{0}^{1}\, x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^1 dy \int_0^y dx = \int_0^1 y\,dy = \Big/_{0}^{1}\, \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}$$

M2

$$\int_{-4}^{1}\int_{-1}^{3} dx\,dy = \int_{-4}^{1} dy \int_{-1}^{3} dx = 20$$

Itse lasku on suoraviivainen. Opittava asia on, että riippumattomat integraalit voi laskea erikseen.

Tämä on ns. tensoritulomuoto.

Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Ratkaisut, Viikko 6, 2020

Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Laske seuraavat integraalit:

$$\text{a)} \int_A x^2\,da, \qquad A = \{\,(x,y) \mid |x| + |y| \le 1\,\};$$

$$\text{b)} \int_A \frac{x}{y}\,da, \qquad A = \{\,(x,y) \mid |x| \le 1,\ 1 \le y \le 2\,\}.$$

Ratkaisu: a) $\frac{1}{3}$; b) 0.

RATKAISU

a) Integroimisalue A on suorien rajaama neliön muotoinen tasojoukko, jonka kärkipisteet ovat $(1,0), (0,1), (-1,0)$ ja $(0,-1)$.

tapa 1. Itegroimisrajat ovat

$$1 - |x| \le y \le 1 - |x| \quad \text{ja} \quad -1 \le x \le 1.$$

Integroidaan:

$$\begin{aligned}
\int_A x^2\,da &= \int_{-1}^{1}\int_{|x|-1}^{1-|x|} x^2\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 \int_{|x|-1}^{1-|x|} dy\,dx && \Big\|\,\text{parillinen muuttujassa } y \\
&= \int_{-1}^{1} x^2\Big(2\int_0^{1-|x|} dy\,dx\Big) = 2\int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\,dx && \Big\|\,\text{parillinen muuttujassa } x \\
&= 4\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 4\Big/_{\!0}^{1}\Big(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big) \\
&= 4\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

tapa 2. Tehdään muuttujanvaihto

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Tällöin uudeksi integroimisalueeksi saadaan

$$B = \{(u, v) \mid |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$$

ja vaihdoksen Jacobin determinantiksi

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Sitten integroidaan:

$$\begin{aligned}
\int_A x^2\, da &= \int_B \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| db \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \frac{du\, dv}{2} \\
&= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} \Big/_{-1}^{1} \frac{(u+v)^3}{3}\, dv \\
&= \frac{1}{24}\int_{-1}^{1} \left((v+1)^3 - (v-1)^3\right) dv \\
&= \frac{1}{12}\int_{-1}^{1} (3v^2 + 1)\, dv = \frac{1}{12}\Big/_{-1}^{1} (v^3 + v) \\
&= \frac{1}{12}(1 + 1 - ((-1)^3 + (-1))) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

b) Integroimisalue on suorakaide, jonka kärkipisteet ovat $(1, 2), (-1, 2), (-1, 1)$ ja $(1, -2)$.

Integroimisrajoiksi saadaan

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{ja } 1 \leq y \leq 2.$$

Havaitaan, että

$$\int_A \frac{x}{y}\, da = \int_1^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{x}{y}\, dx}_{=0}\, dy = 0,$$

koska sisempi integraali on (oleellisesti) pariton muuttujan x suhteen.

TEHTÄVÄ J2 Olkoon $a > 0$, $b > 0$, $A = \{\,(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\,\}$. Laske epäoleellinen integraali

$$\int\limits_A e^{-(ax+by)^2}\,da$$

sijoituksella $u = ax + by,\ v = y/x$.
Ratkaisu: $\frac{1}{2ab}$.

RATKAISU Tehdään muuttujanvaihto ohjeiden mukaisesti:

$$\begin{cases} u &= ax + by \\ v &= y/x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{u}{bv + a} \\ y &= \dfrac{uv}{bv + a} \end{cases}$$

Voidaan osoittaa, että kuvaus

$$\mathbf{F}\colon B \to \tilde{A},\ \mathbf{F}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

on bijektio, kun $\tilde{A} = A \setminus \partial A$ ja $B = \{(u,v) \mid u > 0, v > 0\}$.[1] Lisäksi, koska

$$A = \underbrace{\tilde{A} \cup (A \setminus \partial A)}_{\text{erilliset}}$$

ja reuna ∂A on *nollamittainen*, niin kaikilla integroituvilla funktioilla f on voimassa

$$\int_A f = \int_{\tilde{A} \cup \partial A} f = \int_{\tilde{A}} f + \underbrace{\int_{\partial A} f}_{=0} = \int_{\tilde{A}} f.$$

Näin ollen integraali voidaan muuttujanvaihdon jälkeen laskea yli joukon B.
Jacobin determinanttia laskiessa kannattaa huomata, että

$$\big(\det D\mathbf{F}(u,v) = \big)\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1},$$

sillä käänteisfunktion determinantti on tässä tapauksessa hieman helpompi laskea. Saadaan

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = \frac{a}{x} + \frac{by}{x^2}$$

[1] Todistus ylimääräinen HT

$$= \frac{ax+by}{x^2} = u\frac{1}{x^2} = \frac{(bv+a)^2}{u},$$

joten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{u}{(bv+a)^2}.$$

Voidaan integroida:

$$\begin{aligned}
&\int_A e^{-(ax+by)^2}\,da = \int_B e^{-u^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,db \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2}\frac{u}{(bv+a)^2}\,du\,dv \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-u^2}u\,du \int_0^R \frac{dv}{(bv+a)^2} \\
&= \lim_{R\to\infty}\Big(\Big/_0^R -\frac{1}{2}e^{-u^2}\Big)\left(\Big/_0^R -\frac{1}{b}\frac{1}{bv+a}\right) \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2b}\big(e^{-R^2}-1\big)\left(\frac{1}{bR+a}-\frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{1}{2b}(0-1)\big(0-\frac{1}{a}\big) = \frac{1}{2ab}.
\end{aligned}$$

Haaste

Tässä tehtävässä tarvitaan kaavaa

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx;$$

kts. MS-A0101:n materiaali soveltuvin osin.
Laske integraali

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

käyttämällä integraalin derivointia parametrin suhteen seuraavalla tavalla: Osoita, että funktion

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$$

derivaatta on $-1/(1+t^2)$, joten $F(t)$ voidaan laskea integroimalla, kun lisäksi tiedetään $F(t) \to 0$, kun $t \to \infty$. Tämän avulla saadaan $F(0)$.
Huom: Välivaiheet vaatisivat tarkempia perusteluja, koska kyseessä on epäoleellinen integraali. Vastaus on kuitenkin oikein, joten voit laskea ilman perusteluja (hieman kyseenalainen päättely?). Kurssilla MS-A0101 johdettiin (olennaisilta osin) kaava

$$\int_0^\infty e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad \textbf{kun} \quad a < 0.$$

RATKAISU Vaihtamalla derivoinnin ja integroinnin järjestystä saadaan

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{d}{dt}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty (-xe^{-xt})\frac{\sin x}{x}\,dx$$
$$= -\int_0^\infty e^{-xt}\sin x\,dx = -\frac{1}{t^2+1},$$

joten

$$F(t) = \int -\frac{1}{t^2+1} = -\arctan t + C.$$

Koska tiedetään, että $F(t) \to 0$, kun $t \to \infty$, niin

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = -\frac{\pi}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}.$$

Näin ollen

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\arctan t + \frac{\pi}{2}$$

ja valitsemalla $t = 0$ saadaan tästä

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

K1 $V = \{ (x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1 \}$

(a) $\int_V (1-x-y)^5 \, dV$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1-x-y)^5 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^6 \, dy \, dx \quad \text{(oveleq!)}$$

$$= \int_0^1 \Big/_0^{1-x} -\frac{1}{7}(1-x-y)^7 \, dx$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{7}\Big((1-x-1+x)^7 - (1-x)^7 \Big) dx$$

$$= \frac{1}{7}\int_0^1 (1-x)^7 \, dx = -\frac{1}{56} \Big/_0^1 (1-x)^8$$

$$= \frac{1}{56}$$

(b) $\displaystyle\int_V xyz^4\,dV =$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} xyz^4\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-z} yz^4 \Big/_0^{1-z-y} x^2 \quad dy\,dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-z} yz^4 (1-z-y)^2\,dy\,dz$$

Kirjoitetaan auki:

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 z^4 \int_0^{1-z} \left(y^3 - 2(1-z)y^2 + (1-z)^2 y \right) dy\,dz$$

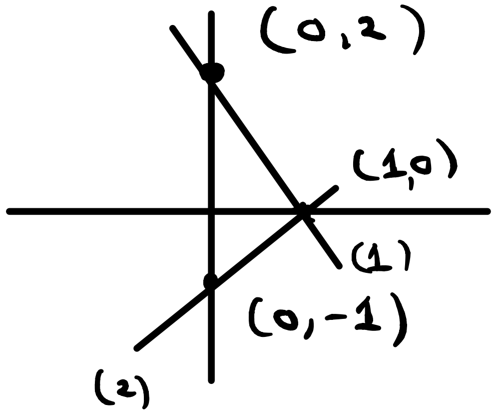
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 z^4 \left(\frac{1}{4}(1-z)^4 - \frac{2}{3}(1-z)^4 + \frac{1}{2}(1-z)^4 \right)$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^1 z^4 (1-z)^4\,dz$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^1 \left(z^8 - 4z^7 + 6z^6 - 4z^5 + z^4 \right) dz$$

$$= \frac{1}{24} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{6}{7} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{15120}$$

K2



(1) $y = 2 - 2x$

(2) $y = x - 1$

$$\iint_K 2x\,dA = \int_0^1 \int_{x-1}^{2-2x} 2x\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 2x \Big/_{x-1}^{2-2x} y \; dx$$

$$= \int_0^1 \Big(2x(2-2x) - 2x(x-1) \Big) dx$$

$$= \int_0^1 (6x - 6x^2)\,dx =$$

$$= \Big/_0^1 3x^2 - 2x^3 = 1$$