Viikko 7 AV

M1 Alue A on puoliympyrä : $y = \sqrt{4 - x^2}$

$$\iint_A (x+3)\,dA = \underbrace{\iint_A x\,dA}_{=0} + \iint_A 3\,dA$$

(x pariton, A symmetrinen)

$$= 3 \cdot \frac{\pi 2^2}{2} = 6\pi$$ (ympyrän säde = 2)

M2 Pascalin simpukka : $r = 2 + \cos\theta$

Ympyrä : $r = 1$

Integroimisrajat : $1 \le r \le 2 + \cos\theta$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$2 + \cos\theta \ge 2 - 1 = 1$ kaikilla θ

Napakoordinaatit : Jacobiaani r

$$\int_0^{2\pi} \int_1^{2+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \Big/_1^{2+\cos\theta} \frac{r^2}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left((2+\cos^2\theta)^2 - 1 \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(3 + 4\cos\theta + \cos^2\theta \right) d\theta$$

integrandi $= 0$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$= 3\pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

integrandi $= 0$

$$= 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

J1

Tehtävä ~~V1~~ Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat xy-tason yläpuolella pinnat

$$z = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$$

Ratkaisu: $\frac{1}{2}$.

Ratkaisu Kappaletta rajaa siis yläpuolelta hyperbolinen paraboloidi $z = x^2 - y^2$ ja alapuolelta xy-taso $z = 0$. Lisäksi se on rajattu lieriön $x^2 + y^2 = 1$ sisäpuolelle. Nämä ehdot toteuttava joukko on

$$A = \{(x, y, z) \mid 0 \le z \le x^2 - y^2, 0 \le x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Vaihdetaan taas sylinterikoordinaatteihin

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \text{ ja } z = z.$$

Tällöin paraboloidi määrää muuttujan z integroimisrajoiksi

$$0 \le z \le x^2 - y^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2(1 - 2\sin^2\varphi),$$

mutta toisaalta tästä myös havaitaan, että

$$0 \le z \le x^2 - y^2 \ \Rightarrow\ x^2 - y^2 \ge 0 \ \Rightarrow\ |x| \ge |y|$$

$$\Rightarrow\ |\cos\varphi| \ge |\sin\varphi| \ \Rightarrow\ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \text{ tai } \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}.$$

Lisäksi sylinteripinta antaa rajat radiaaliselle komponentille:

$$0 \le x^2 + y^2 \le 1 \ \Rightarrow\ 0 \le r^2 \le 1.$$

Symmetrian nojalla riittää laskea tilavuus, kun kiertokulma $0 \le \varphi \le \pi/4$. Tällöin tulos on neljäsosa koko kappaleen tilavuudesta. Saadaan siten

$$\begin{aligned}
\int_A 1\, dV &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^1\int_0^{r^2(1-2\sin^2\varphi)} r\, dz dr d\varphi \\
&= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^3(1 - 2\sin^2\varphi)\, dr d\varphi \\
&= 4\int_0^{\pi/4} \frac{1}{4}(1 - 2\sin^2\varphi)\, d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(1 - 2\sin^2\varphi\right) d\varphi = \int_0^{\pi/4} \big(1 - (1 - \cos 2\varphi)\big)\, d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi\, d\varphi = \Big/_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

TEHTÄVÄ J2 Laske muotoa $x = as\cos t$, $y = bs\sin t$ (a ja b vakioita) olevaa muunnosta käyttäen tasointegraali

$$\int_A \ln\left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) da, \quad A = \{\, (x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 9x^2 + 4y^2 \leq 36 \,\}.$$

Ratkaisu: $3\pi(\ln 2 - \frac{1}{2})$.

TEHTÄVÄ J2 Valitsemalla muunnoksessa $a = 2$ ja $b = 3$ saadaan

$$x = 2s\cos t \ \text{ ja } y = 3s\sin t.$$

Tutkitaan sitten kuinka integroimisrajat täytyy nyt valita. Tason ensimmäisessä neljänneksessä $x \geq 0, y \geq 0$ tulee kiertokulma rajoittaa välille $0 \leq \pi \leq \pi/2$. Lisäksi

$$9x^2 + 4y^2 = 9 \cdot 4s^2\cos^2 t + 4 \cdot 9s^2\sin^2 t = 36s^2 \leq 36 \ \Rightarrow\ s \leq 1.$$

Lisäksi jacobiaaniksi saadaan

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos t & -2s\sin t \\ 3\sin t & 3s\cos t \end{vmatrix}$$

$$= 6s\cos^2 t - (-6s\sin^2 t) = 6s(\cos^2 t + \sin^2 t) = 6s.$$

Voidaan nyt laskea integraali:

$$\begin{aligned}
\int_A \ln\left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) da &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \ln\big(1 + s^2\cos^2 t + s^2\sin^2 t\big)(6s)\, dsdt \\
&= 3\pi \int_0^1 \ln(1+s^2)s\, ds \qquad \| \text{ sij. } u = 1+s^2 \\
&= 3\pi \int_1^2 \ln u \frac{du}{2} \\
&= \frac{3\pi}{2} \Big/_1^2 u(\ln u - 1) \\
&= \frac{3\pi}{2}\big(2\ln 2 - 1 - (\ln 1 - 1)\big) \\
&= 3\pi \ln 2 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

K1 $\quad x^2+y^2=a^2 \quad ; \quad z=y \quad ; \quad$ 1. oktantti

Kanta on ympyrän sektori : $0 \le \theta \le \pi/2$
$0 \le r \le a$

$z = y = r\sin\theta \longrightarrow$ korkeus

Tilavuudelle saadaan nyt kaava :

$$V = \int_0^{\pi/2}\int_0^a (r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^a r^2 dr = \frac{1}{3}a^3$$

K2 $\quad A = \{ (x,y) \mid |x+2y| \leq 1, \ |x-2y| \leq 2 \}$

Muuttujanvaihto:

$$\begin{cases} u = x + 2y \\ v = x - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{4}(u-v) \end{cases}$$

Uusi alue: $B = \{ (u,v) \mid -1 \leq u \leq 1, \ -2 \leq v \leq 2 \}$

Määritetään Jacobin determinantti:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

Integraali on siis:

$$\iint_A (x+2y)^4 (x-2y)^6 \, dx\,dy$$

$$= \iint_B u^4 v^6 \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} v^6 \, dv \int_{-1}^{1} u^5 \, du = \frac{1}{140} \left(2^7 - (-2)^7\right)\left(1^5 - (-1^5)\right)$$

$$= \frac{128}{35}$$