Viikko 7 LV

M1 Kytketään aivot pois päältä ja asetetaan rajat miettimättä sen kummemmin.

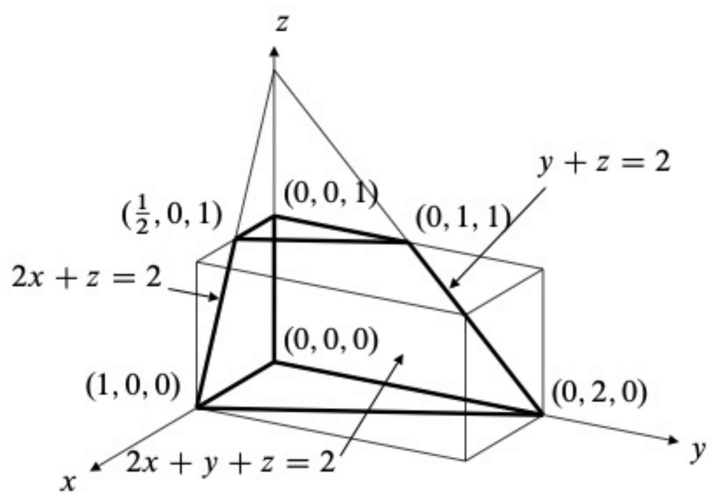
$$V = \iiint_D dV = \int_0^1 \int_0^{2-z} \int_0^{\frac{1}{2}(2-x-z)} dx\, dy\, dz = \frac{7}{12}$$

$\bar{z} = ?$ Lasketaan momentti $z=0$:n suhteen:

$$M_z = \iiint_D z\, dV = \int_0^1 z - z^2 + \frac{z^3}{4}\, dz$$

$$= \frac{11}{48}$$

Eli $\bar{z} = {}^{11}/_{48} \,/\, {}^{7}/_{12} = \frac{11}{28}$



M2 Asetetaan rajat:

$$V = \iiint_S dV = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{2-y-2z} dx\,dz\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} (2-y-2z)\,dz\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[(2-y)(1-y) - (1-y)^2 \right] dy$$

$$= \int_0^1 1-y\,dy = \frac{1}{2}$$

$$M_x = \iiint_S x\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{2-y-2z} x\,dx\,dz\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-y} \left[(2-y)^2 - 4(2-y)z + 4z^2 \right] dz\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(2-y)^2(1-y) - 2(2-y)(1-y)^2 + \frac{4}{3}(1-y)^3 \right] dy$$

Vaihtoehtoja on useita : Ainakin

(1) Raaka voima : Laskutaan polynomi auki.

(2) Muuttujanvaihto :

Nimittäin : $u = 1 - y$

$\Rightarrow 2 - y = u + 1$

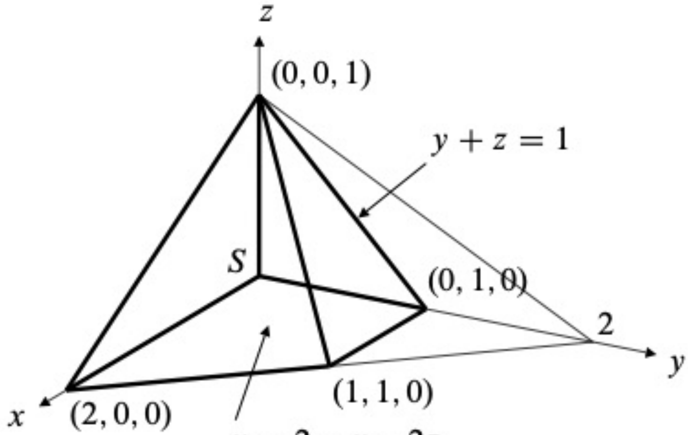
ja siis $du = -dy$

Valitaan (2) :

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(u+1)^2 u - 2(u+1)u^2 + \frac{4}{3}u^3 \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{3}u^3 + u \, du = \frac{7}{24}$$ (Ehkä kannatti, ehkä ei.)

$$\bar{x} = 7/24 \, / \, 1/2 = \frac{7}{12}$$



Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Käyrät $y = x^k$ ja $x = y^k$ ($k > 0$, $k \neq 1$) rajoittavat tasoalueen ensimmäisessä neljänneksessä. Laske tämän keskiö. Miten keskiö käyttäytyy, kun $k \to \infty$?
Ratkaisu: $X = Y = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(k+2)}$; $(X, Y) \to (1/2, 1/2)$ kun $k \to \infty$.

RATKAISU J1 Ratkaistaan aluksi integroimisrajat jotka saadaan kahden käyrän leikkauspisteistä:

$$x^k = x^{\frac{1}{k}} \Rightarrow \log(x^k) = \log(x^{\frac{1}{k}}) \iff k\ln(x) = \frac{1}{k}\ln(x) \iff (k^2-1)\ln(x) = 0$$

Koska $k \neq 1 \ \wedge \ k > 0$, ylläolevan yhtälön toteuttaa vain $x = 1$. Alaraja saadaan alkuperäisen yhtälön toisena ratkaisuna: $x = 0$. Välillä $x \in [0, 1]$ $x^k \leq x^{\frac{1}{k}}$, jolloin integroimisjoukoksi saadaan

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^k \leq y \leq x^{\frac{1}{k}}\}.$$

Lasketaan aluksi joukon pinta-ala:

$$\begin{aligned}
A = \iint\limits_D dA = \int_0^1 \int_{x^k}^{x^{\frac{1}{k}}} dydx = \int_0^1 x^{\frac{1}{k}} - x^k \, dx = (\frac{1}{\frac{1}{k}+1}x^{\frac{1}{k}+1} - \frac{1}{k+1}x^{k+1})\Big|_0^1 \\
= \frac{1}{\frac{1}{k}+1} - \frac{1}{1+k} = \frac{k - \frac{1}{k}}{(\frac{1}{k}+1)(k+1)} = \frac{(k-1)(1+\frac{1}{k})}{(\frac{1}{k}+1)(k+1)} = \frac{k-1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Keskiö voidaan laskea integroimalla sitä vastaava muuttuja joukon yli ja jakamalla se joukkoa vastaavalla koolla (tässä tapauksessa pinta-alalla):

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint\limits_D x \, dA$$

$$\iint_D x\, dA = \int_0^1 \int_{x^k}^{x^{\frac{1}{k}}} x\, dydx = \int_0^1 x^{\frac{1}{k}+1} - x^{k+1} = (\frac{1}{\frac{1}{k}+2}x^{\frac{1}{k}+2} - \frac{1}{k+2}x^{k+2})\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{k}+2} - \frac{1}{k+2} = \frac{k-\frac{1}{k}}{(\frac{1}{k}+2)(k+2)} = \frac{(k-1)(1+\frac{1}{k})}{(2+\frac{1}{k})(2+k)}$$

$$\Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\, dA = \frac{(k+1)(1+\frac{1}{k})}{(2+\frac{1}{k})(2+k)}$$

$$(k+1)(1+\frac{1}{k}) = k+2+\frac{1}{k} = \frac{k^2+2k+1}{k} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$(2+\frac{1}{k})(2+k) = 5+2k+\frac{2}{k} = \frac{5k+2k^2+2}{k} = \frac{(k+2)(2k+1)}{k}$$

$$\Rightarrow \overline{x} = \frac{(k+1)^2}{k}\frac{k}{(k+2)(2k+1)} = \frac{(k+1)^2}{(k+2)(2k+1)}.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\, dA$$

$$\iint_D y\, dA = \int_0^1 \int_{x^k}^{x^{\frac{1}{k}}} y\, dydx = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^2)\Big|_{x^k}^{x^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{2}{k}} - x^{2k}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{1+\frac{2}{k}}x^{\frac{2}{k}+1} - \frac{1}{1+2k}x^{2k+1})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+\frac{2}{k}} - \frac{1}{1+2k})$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{2k-\frac{2}{k}}{(1+\frac{2}{k})(1+2k)}) = \frac{(k-1)(1+\frac{1}{k})}{(1+\frac{2}{k})(1+2k))}$$

$$\Rightarrow \overline{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\, dA = \frac{(k+1)(1+\frac{1}{k})}{(1+\frac{2}{k})(1+2k)}$$

$$(1+\frac{2}{k})(1+2k) = 5+2k+\frac{2}{k} = \frac{(k+2)(2k+1)}{k}$$

$$\Rightarrow \overline{y} = \frac{(k+1)^2}{k}\frac{k}{(k+2)(2k+1)} = \frac{(k+1)^2}{(k+2)(2k+1)}.$$

Keskiö on siis

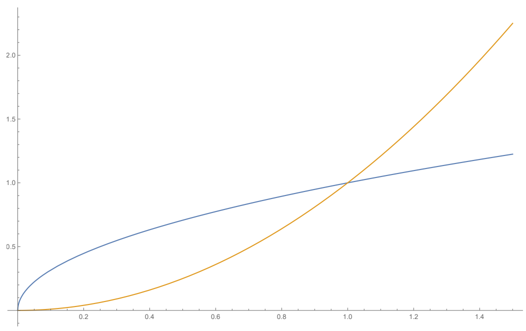
$$(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{(k+1)^2}{(k+2)(2k+1)}, \frac{(k+1)^2}{(k+2)(2k+1)}).$$

Tarkastellaan keskiön käyttäytymistä, kun $k \to \infty$:

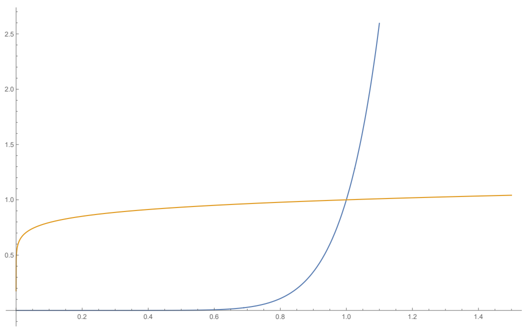
$$\lim_{k\to\infty} \overline{x} = \lim_{k\to\infty} \overline{y} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+2k+1}{2k^2+5k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+2}{4k+5} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Lauseke on muotoa $\frac{\infty}{\infty}$, joten voitiin käyttää l'Hôpitalin sääntöä[1] kahdesti. Siis

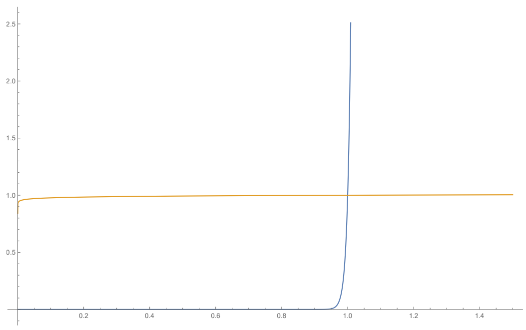
$$\lim_{k\to\infty} (\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$



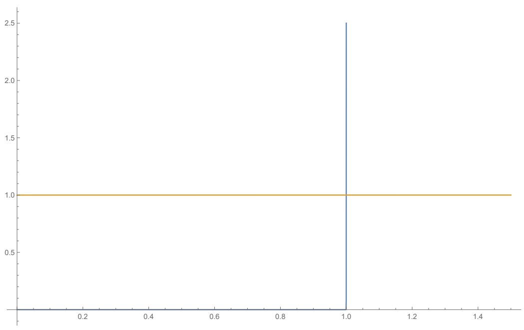
(a) k = 0.5



(b) k = 10



(c) k = 100



(d) k = 10 000

Kuva 6: Käyrien kuvaajia eri k:n arvoilla

TEHTÄVÄ J2 Ympyräalueen neljännekselle $\{\,(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq R\,\}$ on levitetty massa, jonka pintatiheys on $\rho(x,y) = x$. Etsi massakeskipiste.
Ratkaisu: $(\frac{3\pi}{16}R, \frac{3}{8}R)$.

[1] $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, jos $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ tai $\pm\infty$, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in\,]0,\infty[$ ja $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ on olemassa.

Ratkaisu J2 Lasketaan aluksi joukon $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ massa. Siirrytään napakoordinaatistoon:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta), \end{cases}$$

jossa $0 \leq r \leq R$ ja $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Kyseisen muunnoksen Jacobin determinantti on

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

Joukon massa saadaan integroimalla pintatiheyttä $\rho(x,y) = x = r\cos(\theta)$ koko joukon yli:

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\, dA = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^R r\cos(\theta) r\, dr d\theta = (\sin(\theta))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{r^3}{3})\Big|_0^R$$
$$= (1-0)(\frac{R^3}{3}) = \frac{R^3}{3}.$$

Massakeskipiste saadaan integroimalla tarkasteltavaa muuttujaa ja pintatiheyttä joukon yli ja jakamalla tämä joukon massalla[2]:

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\rho(x,y)\, dA$$

$$\iint\limits_D x\rho(x,y)\, dA = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^R r^2\cos^2(\theta) r\, dr d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta (\frac{r^4}{4})\Big|_0^R = \frac{R^4}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\, d\theta \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\, d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta$$
$$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\rho(x,y)\, dA = \frac{3}{R^3}\frac{\pi}{4}\frac{R^4}{4} = \frac{3\pi}{16}R$$

[2] Integraalin voi myös laskea käyttämällä trigonometristä identiteettiä $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$

$$\overline{y} = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\rho(x,y)\ dA^3$$

$$\iint\limits_D y\rho(x,y)\ dA = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{R} r^2 \sin(\theta)\cos(\theta) r\ drd\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\ d\theta (\frac{r^4}{4})\Big|_0^R$$

$$= \frac{R^4}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\ d\theta$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\ d\theta = (-\cos^2(\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\theta)(-\sin(\theta))\ d\theta$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}(-0+1) = \frac{1}{2}$$

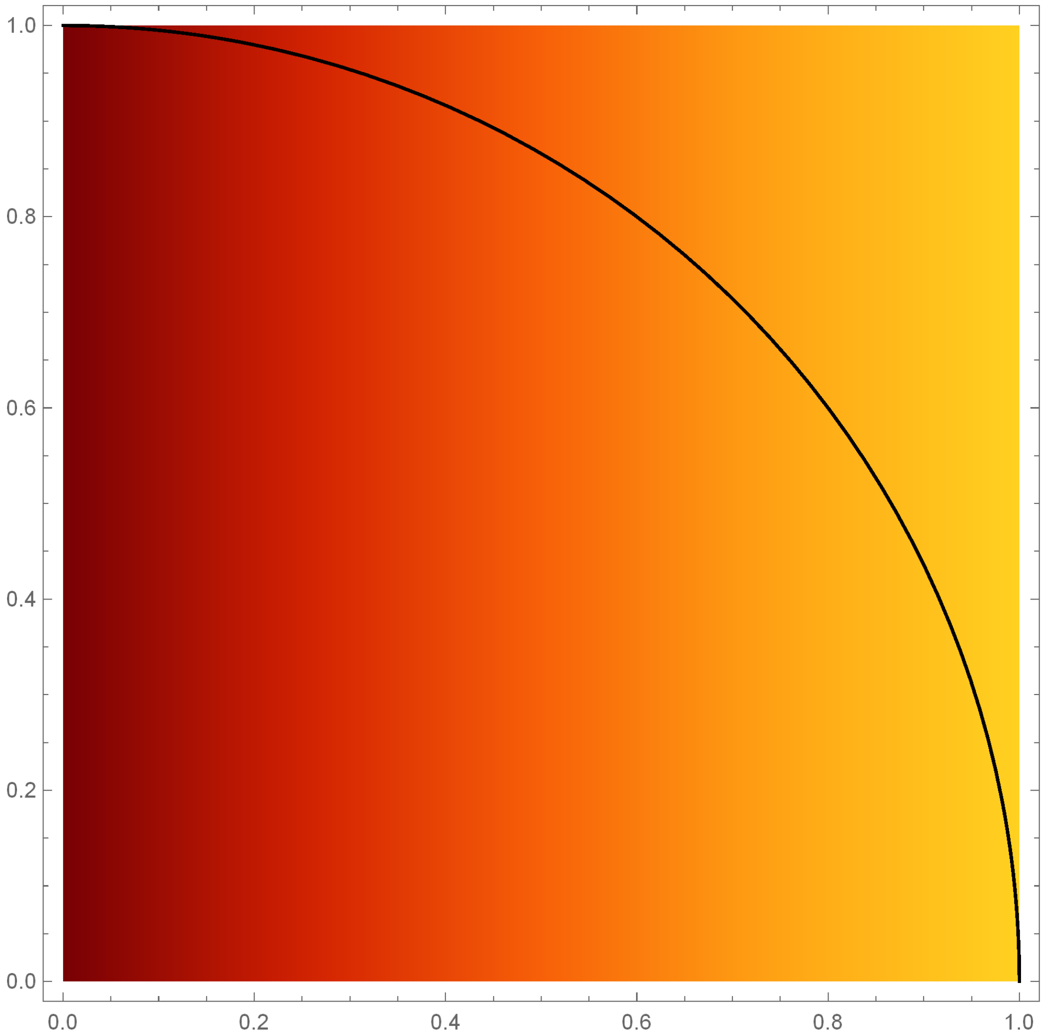
$$\Rightarrow \overline{y} = \frac{3}{R^3}\frac{R^4}{4}\frac{1}{2} = \frac{3}{8}R$$

Massakeskipiste on siis

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{3\pi}{16}R, \frac{3}{8}R).$$

---

[3] Integraalin voi myös laskea käyttämällä trigonometristä identiteettiä $\cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$



Kuva 7: Tarkasteltava joukko D ja sen päälle kuvattu pintatiheys ρ

TEHTÄVÄ J3 Olkoon $k > 0$. Määritä tasoalueen

$$G = \{\,(x, y) \mid x^4 < y < \frac{kx^2 + 1}{k + 1}\,\}$$

keskiö ja tutki, millä parametrin k arvoilla se ei kuulu alueeseen G.
Ratkaisu: $(0, \frac{k^2+5k+10}{3(k+1)(k+6)})$; $(X, Y) \notin G$, kun $k \geq 2$.

RATKAISU J3 Ratkaistaan aluksi muuttujan x rajat jotka ovat pisteitä joissa joukon G käyrät leikkaavat toisensa:

$$x^4 = \frac{kx^2+1}{k+1} \iff x^4(k+1) \iff x^4(k+1) - kx^2 - 1 = 0$$

$$u = x^2 \Rightarrow u^2(k+1) - ku - 1 = 0 \iff u = \frac{k \ \pm \ \sqrt{k^2+4k+4}}{2(k+1)}$$

$$= \frac{k \ \pm \ \sqrt{(k+2)^2}}{2(k+1)} = \frac{k \ \pm \ (k+2)}{2(k+1)} = \begin{cases} \frac{2k+2}{2(k+1)} = 1 \\ \frac{-2}{2(k+1)} = -\frac{1}{k+1} \end{cases}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{1}{k+1}} \notin \mathbb{R} \ \vee \ x = \pm 1$$

Integroimisjoukoksi saadaan siis

$$G = \{(x,y) \in R^2 \mid -1 \le x \le 1, x^4 \le y \le \frac{kx^2+1}{k+1}\}.$$

Lasketaan joukon G pinta-ala:

$$A = \iint\limits_G dA = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{x^4}^{\frac{kx^2+1}{k+1}} dydx = \int_{-1}^{1} \frac{kx^2+1}{k+1} - x^4 \ dx = (\frac{\frac{k}{3}x^3 + x}{k+1} - \frac{1}{5}x^5)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}k+2}{k+1} - \frac{2}{5} = \frac{\frac{10}{3}k + 10 - 2k - 2}{5(k+1)} = \frac{\frac{4}{3}k+8}{5(k+1)} = \frac{4k+24}{15(k+1)} = \frac{4(k+6)}{15(k+1)}$$

Lasketaan keskiö:

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint\limits_G x \ dA$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\iint\limits_G y \ dA$$

$$\iint\limits_G x \ dA = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{x^4}^{\frac{kx^2+1}{k+1}} x \ dydx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{kx^3+x}{k+1} - x^5 \ dx = (\frac{k\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}}{k+1} - \frac{x^6}{6})\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{x} = 0$$

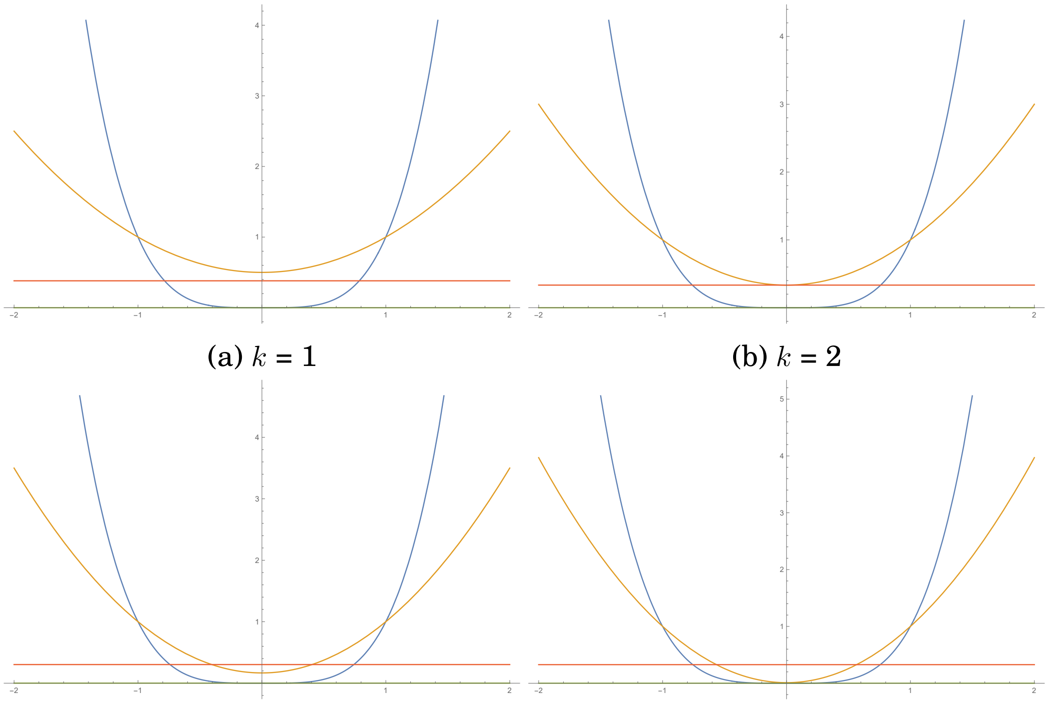
$$\iint\limits_G y\,dA = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x^4}^{\frac{kx^2+1}{k+1}} y\,dydx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(\frac{kx^2+1}{k+1})^2 - x^8\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{(k+1)^2}(k^2 2x^4 + 2kx^2 + 1) - x^8\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{(k+1)^2}(\frac{k^2x^5}{5} + \frac{2kx^3}{3} + x) - \frac{x^9}{9})\Big|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{1}{(k+1)^2}(\frac{k^2}{5} + \frac{2k}{3} + 1) - \frac{1}{9}$$
$$= \frac{3k^2+10k+15}{15(k+1)^2} - \frac{5(k+1)^2}{45(k+1)^2}$$
$$= \frac{4k^2+20k+40}{45(k+1)^2}$$
$$\Rightarrow \overline{y} = \frac{15(k+1)}{4(k+6)}\frac{4(k^2+5k+10)}{45(k+1)^2}$$
$$= \frac{k^2+5k+10}{3(k+1)(k+6)}$$

Keskiö on siis

$$(\overline{x},\overline{y}) = (0, \frac{k^2+5k+10}{3(k+1)(k+6)}).$$

Keskiö ei kuulu joukkoon G kun

$$\frac{k^2+5k+10}{3(k+1)(k+6)} \geq \frac{1}{k+1} \iff (k+1)(k^2+5k+10) \geq 3(k+1)(k+6)$$
$$\iff k^3+3k^2-6k-8 \geq 0 \iff (-4 \leq k \leq -1) \ \vee \ k \geq 2$$



(a) $k = 1$ (b) $k = 2$ (c) $k = 5$ (d) $k = 100$

Kuva 8: Käyrien kuvaajia ja keskiön y-koordinaattia vastaava suora eri k:n arvoilla

TEHTÄVÄ J4 Pyramidissa, jota reunustavat tasot $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, on massatiheys $\rho(x, y, z) = z$. Laske massakeskipiste. Oletetaan $a > 0$.

Ratkaisu: $(a/5, a/5, 2a/5)$.

RATKAISU J4

Lasketaan pyramidin massa:

$$
\begin{aligned}
m = \iiint\limits_D \rho(x,y,z)\, dA &= \int\limits_0^a \int\limits_0^{a-z} \int\limits_0^{a-z-y} z\, dxdydz = \int\limits_0^a \int\limits_0^{a-z} z(a-z-y)\, dydz \\
&= \int\limits_0^a z(a(a-z) - z(a-z) - \frac{1}{2}(a-z)^2)\, dz \\
&= \int\limits_0^a z(\frac{a^2}{2} - az + \frac{1}{2}z^2)\, dz \\
&= (\frac{1}{4}a^2z^2 - \frac{1}{3}az^3 + \frac{1}{8}z^4)\Big|_0^a = \frac{a^4}{24}
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan kappaleen massakeskipiste:

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_D y\rho(x,y,z)\, dA &= \int\limits_0^a \int\limits_0^{a-z} \int\limits_0^{a-z-y} yz\, dxdydz = \int\limits_0^a \int\limits_0^{a-z} yz(a-z-y)\, dydz \\
&= \int\limits_0^a (\frac{1}{2}y^2za - \frac{1}{2}y^2z^2 - \frac{1}{3}y^3z)\Big|_0^{a-z}\, dz \\
&= \int\limits_0^a \frac{1}{2}(a-z)^2za - \frac{1}{2}(a-z)^2z^2 - \frac{1}{3}(a-z)^3z\, dz \\
&= \frac{a^5}{24} - \frac{a^5}{60} - \frac{a^5}{60} = \frac{a^5}{120} \\
&\Rightarrow \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_D y\rho(x,y,z)\, dA = \frac{24}{a^4}\frac{a^5}{120} = \frac{a}{5}
\end{aligned}
$$

Symmetrian nojalla $\overline{x} = \overline{y}$.

$$\iiint\limits_D z\rho(x,y,z)\,dA = \int\limits_0^a \int\limits_0^{a-z} z^2(a-z-y)\,dydz = \int\limits_0^a (z^2(ay - zy - \frac{1}{2}y^2))\Big|_0^{a-z}$$

$$= \int\limits_0^a z^2(a(a-z) - z(a-z) - \frac{1}{2}(a-z)^2)\,dz$$

$$= \int\limits_0^a z^2(\frac{1}{2}a^2 - az + \frac{1}{2}z^2) = \frac{a^5}{6} - \frac{a^5}{4} + \frac{a^5}{10} = \frac{a^5}{160}$$

$$\Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_D z\rho(x,y,z)\,dA = \frac{24}{a^4}\frac{a^5}{60} = \frac{2a}{5}$$

Kappaleen massakeskipiste on siis

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (\frac{a}{5}, \frac{a}{5}, \frac{2a}{5})$$