MS-E2117 Riskianalyysi | Laskuharjoitus 5 (Malli)
Jan-Erik Holmberg & Juho Roponen | 2.3.2021

1. Tilavektori $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ määritellään s.e. $x_i = 1$ jos komponentti i toimii ja $x_i = 0$ jos komponentti i on vikaantnut. Rakennefunktio on

$$\phi_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{, jos järjestelmä } S \text{ ei toimi tilavektorilla } \mathbf{x}, \\ 1 & \text{, jos järjestelmä } S \text{ toimii tilavektorilla } \mathbf{x}. \end{cases}$$

Sarjajärjestelmä:

$$\phi_S(\mathbf{x}) = \min\{x_1, \ldots, x_n\} = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Rinnakkaisjärjestelmä:

$$\phi_S(\mathbf{x}) = \max\{x_1, \ldots, x_n\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

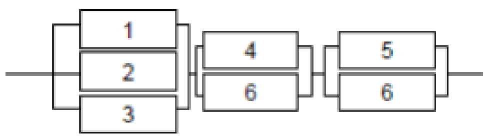
Huom!

$$\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

(a) Jaetaan järjestelmä pienempiin osiin ja kuvataan järjestelmä yhdistelmänä sarja- ja rinnakkaisrakenteita:

$$\phi_A(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$$
$$\phi_B(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_4 x_5)(1 - x_6)$$
$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_A(\mathbf{x}) \cdot \phi_B(\mathbf{x}) = (1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3))(1 - (1 - x_4 x_5)(1 - x_6))$$

(b) Minimikatkosjoukko on pienin joukko, johon kuuluvien komponenttien vikaantuessa järjestelmä vikaantuu. Järjestelmä on siinä mielessä *rinnakkaisrakenne*, että kaikkien minimikatkosjoukossa olevien komponenttien on vikaannuttava, jotta järjestelmä vikaantuisi. Toisaalta mikä tahansa minimikatkosjoukoista riittää vikaannuttamaan järjestelmän, jolloin kyseessä on *sarjarakenne*.



$$\kappa_j(\mathbf{x}) = \coprod_{i \in K_j} x_i = 1 - \prod_{i \in K_j} (1 - x_i), \; j = 1, 2, \ldots, k$$

Minimikatkosjoukot ja niitä vastaavat rinnakkaisrakenteet:

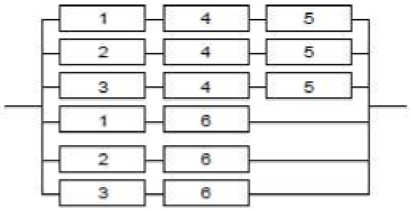
$K_1 = \{1, 2, 3\}$, $\kappa_1(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$

$K_2 = \{4, 6\}$, $\kappa_2(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_4)(1 - x_6)$

$K_3 = \{5, 6\}$, $\kappa_3(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_5)(1 - x_6)$

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{k} \coprod_{i \in K_j} x_i = \prod_{j=1}^{k} \kappa_j(\mathbf{x})$$
$$= (1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3))(1 - (1 - x_4)(1 - x_6))(1 - (1 - x_5)(1 - x_6))$$

(c) Minimipolkujoukko on pienin joukko, johon kuuluvien komponenttien toimiessa järjestelmä toimii. Jos kaikkien minimipolkujoukossa olevien komponenttien toimittava, jotta järjestelmä toimisi, järjestelmä on sarjarakenne. Mikäli mikä tahansa minimipolkujoukoista riittää järjestelmän toimintaan, on kyseessä rinnakkaisrakenne.



$\rho_j(\mathbf{x}) = \prod_{i \in P_j} x_i,\ j = 1,2,\ldots,p$

Minimipolkujoukot ja niitä vastaavat sarjarakenteet:

$P_1 = \{1,4,5\},\ \rho_1(\mathbf{x}) = x_1\ x_4\ x_5$

$P_2 = \{1,6\},\ \rho_2(\mathbf{x}) = x_1\ x_6$

$P_3 = \{2,4,5\},\ \rho_3(\mathbf{x}) = x_2\ x_4\ x_5$

$P_4 = \{2,6\},\ \rho_4(\mathbf{x}) = x_2\ x_6$

$P_5 = \{3,4,5\},\ \rho_5(\mathbf{x}) = x_3\ x_4\ x_5$

$P_6 = \{3,6\},\ \rho_6(\mathbf{x}) = x_3\ x_6$

$\phi(\mathbf{x}) = \coprod_{j=1}^{p} \prod_{i \in P_j} x_i = \coprod_{j=1}^{p} \rho_j(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{p} (1 - \rho_j(\mathbf{x}))$

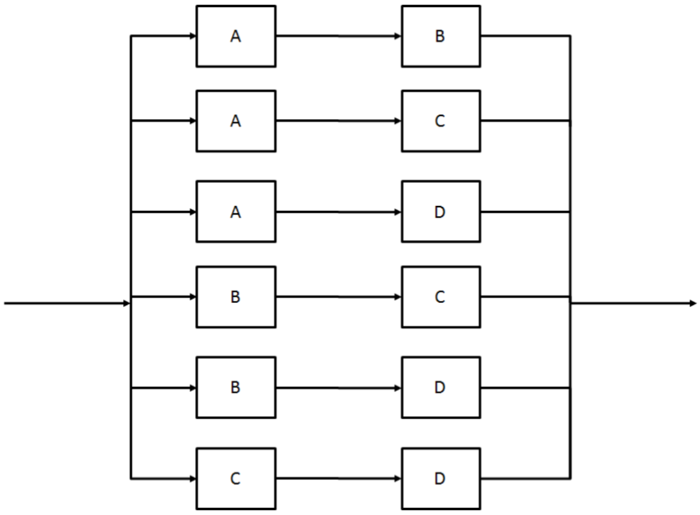
$= 1 - (1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_3)(1-\rho_4)(1-\rho_5)(1-\rho_6)$

$1 - (1 - x_1\ x_4\ x_5)(1 - x_1\ x_6)(1 - x_2\ x_4\ x_5)(1 - x_2\ x_6)(1 - x_3\ x_4\ x_5)(1 - x_3\ x_6)$

Eri tavoilla laskettujen rakennefunktioiden yhtäsuuruus voidaan tarkistaa esim. Mathematica-ohjelmalla. Huom! Koska x_i on binäärinen muuttuja, $x_i^k = x_i \forall i, k$

2. Lentokoneessa on moottorit [A,B,C,D], joista samassa siivessä ovat parit [A,B] ja [C,D].

   (a) Minimitoimintapolkujen avulla voidaan muodostaa rakennefunktio



$$\begin{aligned}
\Phi(x) =& 1 - \prod_{\substack{i=A\\ j>i}}^{D} (1 - x_i x_j) \\
=& 1 - (1 - x_A x_B)(1 - x_A x_C)(1 - x_A x_D)(1 - x_B x_C)(1 - x_B x_D)(1 - x_C x_D) \\
=& 1 - (1 - x_A x_B - x_A x_C + x_A^2 x_B x_C)(1 - x_A x_D - x_B x_D + x_D^2 x_A x_B)(1 - x_B x_C - x_C x_D + x_C^2 x_B x_D) \\
=& 1 - (1 - x_A x_B - x_A x_C + x_A x_B x_C)(1 - x_A x_D - x_B x_D + x_D x_A x_B)(1 - x_B x_C - x_C x_D + x_C x_B x_D) \\
=& \ldots = x_A x_B + x_A x_C + x_B x_C - 2x_A x_B x_C + x_A x_D + x_B x_D - 2x_A x_B x_D + x_C x_D \\
& - 2x_A x_C x_D - 2x_B x_C x_D + 3x_A x_B x_C x_D \ .
\end{aligned}$$

Järjestelmän luotettavuus voidaan laskea odotusarvon avulla, sillä $R_S = P(\Phi(X) = 1) = 0 \cdot P(\Phi(X) = 0) + 1 \cdot P(\Phi(X) = 1) = E(\Phi(X))$, missä X on satunnainen tilavektori, jonka komponentit ovat riippumattomia keskenään ja saavat arvon 1 todennäköisyydellä 0.95 ja arvon 0 todennäköisyydellä 0.05.

$$\begin{aligned}
E(\Phi(X)) =& E(x_A x_B) + E(x_A x_C) + E(x_B x_C) - E(2x_A x_B x_C) + E(x_A x_D) + E(x_B x_D) \\
& - E(2x_A x_B x_D) + E(x_C x_D) - E(2x_A x_C x_D) - E(2x_B x_C x_D) + E(3x_A x_B x_C x_D) \\
=& 6 \times 0.95^2 - 4 \times 2 \cdot 0.95^3 + 3 \cdot 0.95^4 \approx 0.999519
\end{aligned}$$

HUOM! ÄLÄ LASKE NÄIN (sillä tulotermit eivät ole riippumattomia toisistaan)

$$\begin{aligned}
E(\Phi(X)) \neq& 1 - E(1 - x_A x_B)E(1 - x_A x_C)E(1 - x_A x_D)E(1 - x_B x_C)E(1 - x_B x_D)E(1 - x_C x_D) \\
=& 1 - (1 - 0.95^2)^6 \approx 0.99999
\end{aligned}$$

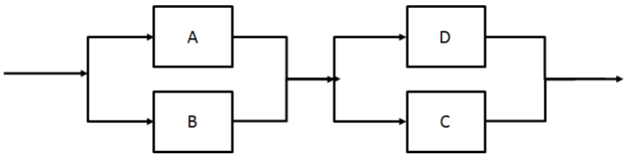
Tämä laskuvirhe yliarvioi luotettavuuden reippaasti. Näin laskettu epäluotettavuus on 8.59068×10^{-7} kun oikea epäluotettavuus on 4.8125×10^{-4}.

Luotettavuus voidaan myös laskea todennäköisyytenä, että tilavektorina on toimintapolku. Luotettavuus saadaan siis toimintapolkujen todennäköisyyksien summana. Järjestelmän toimintapolut ovat: (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (1,1,1,0), (1,0,1,1), (1,1,0,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)

Saadaan toimintapolkujen avulla luotettavuudeksi:

$$\begin{aligned} r(p) &= p_A p_B(1-p_C)(1-p_D) + p_A(1-p_B)p_C(1-p_D) + p_A(1-p_B)(1-p_C)p_D \\ &+ (1-p_A)p_B p_C(1-p_D) + (1-p_A)p_B(1-p_C)p_D + (1-p_A)(1-p_B)p_C p_D \\ &+ p_A p_B p_C(1-p_D) + p_A(1-p_B)p_C p_D + p_A p_B(1-p_C)p_D + (1-p_1)p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_4 \\ &= 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4 \\ &= 6 \cdot 0.95^2 \cdot 0.05^2 + 4 \cdot 0.95^3 \cdot 0.05 + 0.95^4 \approx 0.999519 \end{aligned}$$

(b) Alla on järjestelmän lohkokaavio



$$\begin{aligned} \Phi(x) =&(1-(1-x_A)(1-x_B))(1-(1-x_C)(1-x_D)) \\ =&x_Ax_C + x_Bx_C - x_Ax_Bx_C + x_Ax_D + x_Bx_D - x_Ax_Bx_D - x_Ax_Cx_D - x_Bx_Cx_D + x_Ax_Bx_Cx_D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\Phi(X)) =&E(x_Ax_C) + E(x_Bx_C) - E(x_Ax_Bx_C) + E(x_Ax_D) + E(x_Bx_D) - E(x_Ax_Bx_D) \\ &- E(x_Ax_Cx_D) - E(x_Bx_Cx_D) + E(x_Ax_Bx_Cx_D) \\ =&4 \times 0.95^2 - 4 \times 0.95^3 + 0.95^4 \approx 0.995006 \end{aligned}$$

HUOMAA: tässä tapauksessa voidaan laskea suoraan tulomuodon perusteella, että

$$\begin{aligned} E(\Phi(x)) =&E\Big((1-(1-x_A)(1-x_B))(1-(1-x_C)(1-x_D))\Big) \\ =&E(1-(1-x_A)(1-x_B)) \cdot E(1-(1-x_C)(1-x_D)) \\ =&(1-E(1-x_A)E(1-x_B)) \cdot (1-E(1-x_C)E(1-x_D)) \\ =&(1-0.05^2)\cdot(1-0.05^2) \approx 0.995006\ , \end{aligned}$$

sillä tulotermit ovat toistaan riippumattomat (vrt. a-kohta)!

Luotettavuus voidaa myös jäälleen laskea toimintapolkujen summana. Toimintapolut ovat nyt: (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (1,1,1,0), (1,1,0,1), (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,1,1).

Saadaan toimintapolkujen avulla luotettavuudeksi:

$$
\begin{aligned}
r(p) &= p_A(1-p_B)p_C(1-p_D) + p_A(1-p_B)(1-p_C)p_D + (1-p_A)p_Bp_C(1-p_D) \\
&+ (1-p_A)p_B(1-p_C)p_D + p_Ap_Bp_C(1-p_D) + p_Ap_B(1-p_C)p_D \\
&+ (1-p_A)p_Bp_Cp_D + p_A(1-p_B)p_Cp_D + p_Ap_Bp_Cp_D \\
&= 4p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4 \\
&= 4 \cdot 0.95^2 \cdot 0.05^2 + 4 \cdot 0.95^3 \cdot 0.05 + 0.95^4 \approx 0.995006
\end{aligned}
$$