

Sironta

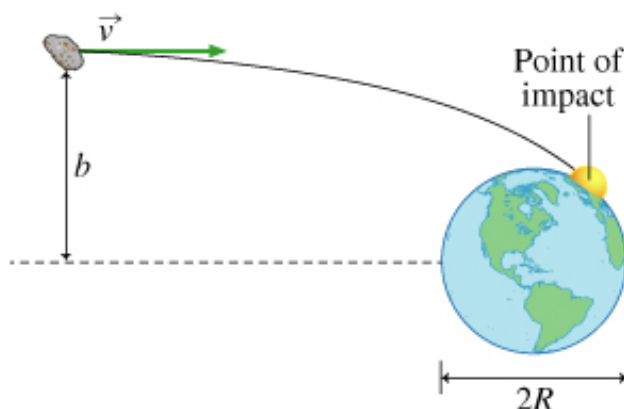
Tämän viikon ryhmätehtävissä käsitellään sirontaongelmaa. Sironta on näkökulma, jolla tarkastella hyvin erilaisia fysikaalisia vuorovaikutusprosesseja ja sitä käytetään niin mekaniikassa (esim. biljardipallojen törmäys), sähkömagnetismissa (miten sähkömagneettinen säteily vuorovaikuttaa aineen kanssa) ja yleisemminkin aaltomekaniikassa (miten ääniaallot etenevät konserttitalissa tai vaikkapa metsässä puista siroten) kuin myös kvanttimekaniikassakin. Yleisesti ottaen sirontalaskut ovat aika haastavia, koska emme yleensä pysty rajoittamaan tarkastelua yhteen ulottuvuuteen ja kaikenlainen dynamiikka on vaikeaa useammassa ulottuvuudessa. Symmetrioiden hyödyntäminen onkin siksi ensiarvoisen tärkeää.

Asteroidin törmäys¹

In this problem, you will estimate the scattering cross section for an earth-asteroid collision. In all that follows, assume that the earth is fixed in space and that the radius of the asteroid is much less than the radius R of the earth. The mass of the earth is M_e , the mass of the asteroid is m and the attractive gravitational force between the two has magnitude

$$F = \gamma \frac{mM_e}{r^2}, \quad (1)$$

where r is the distance between the two masses and γ is the gravitational constant.



Kuva 1: Asteroidin ja maapallon törmäys (sironta). Törmäysparametri b (impact parameter) kuvaa kuinka kaukaa siroava hiukkanen ohittaisi sirottajan mikäli hiukkanen kulkisi suoraviivaisesti. Se on siis hiukkasen suoraviivaisen radan kohtisuora etäisyys sirottajasta. Sirontalaskujen tavoite on yleisesti määrittää jonkinlainen todennäköisyys että sironta tapahtuu. Tämä tapahtuu laskemalla efektiivinen sironta vaikutusala, joka kuvaa sitä kohteen poikkipinta-alan kokoa johon siroavan hiukkasen pitää osua jotta sironta tapahtuu. Käytännössä tämä ei ole aina kovin helppoa, mikäli sirottajan ja siroavan hiukkasen välillä on kaukovoorovaikutus, kuten gravitaatiovoima tässä tapauksessa. Kuva: Young&Freedman 2020.

- Far away from the earth, the asteroid is moving with speed v with respect to stationary earth, and has impact parameter b , as shown in the figure 1. In this large-separation limit, the distance from the asteroid to the earth is taken to be infinite. Find the total initial energy E_{initial} of the asteroid.
- For large earth-asteroid separation, what is the magnitude of the asteroid's total angular momentum L_{initial} about the center of the earth?

1. (Mastering Physics: Cross section of asteroid impact)

The maximum impact parameter for which collision is guaranteed, $b = b_{\max}$, is obtained by setting the minimum earth-asteroid separation equal to the radius R of the earth. This is the configuration shown in the figure 1. In this case, it is clear that the velocity of the asteroid right before it hits the earth is tangent to the surface and therefore perpendicular to the position vector that points from the center of the earth to the asteroid. For such an asteroid, the total energy right before crashing into earth equals

$$E_{\text{surface}} = \frac{1}{2}mv_{\text{surface}}^2 - \gamma \frac{mM_e}{R}, \quad (2)$$

and the angular momentum equals

$$L_{\text{surface}} = mRv_{\text{surface}}. \quad (3)$$

- Use conservation of energy and angular momentum to find an expression for b_{\max}^2 .
The final result should be

$$b_{\max} = R \sqrt{1 + \frac{2M_e \gamma}{Rv^2}}. \quad (4)$$

The scattering cross section S represents the effective target area "seen" by the asteroid and is the area of a circle with radius equal to b_{\max} . If the asteroid comes into this area, it is guaranteed to collide with the earth. Notice that this scattering cross section depends on the initial velocity.

In the large velocity limit $v \gg \sqrt{\gamma M/R}$ the scattering cross section becomes simply πR^2 . Explain this!

In the small velocity limit $v \rightarrow 0$ the scattering cross section diverges. Explain this!

Miksi taivas on sininen?

Rayleigh'n sironta on tunnetusti syynä taivaan siniseen väriin aurinkoisena päivänä. Science Asylumilla on erittäin hyvä video aiheesta, katsokaa se: <https://www.youtube.com/watch?v=4HBuHX4-VU8>. Keskustelkaa aiheesta ja kerätkää auki jääneitä kysymyksiä.

Science Asylumilla on myös videossa virhe, sillä interferenssi ei minun ymmärtääkseni ole tässä oleellista vaan sirontaa tapahtuu myös alilmakehässä. Kaikki ovat varmasti huomanneet ilmiön, että kaukaisuudessa olevan asiat näyttävät sinisiltä. Täällä esimerkki: <http://optics.kulgun.net/Blue-Mountains/>

Feynmanin diagrammit

Sirontaongelmia pääsette erityisesti ratkomaan tulevilla kvanttimekaniikan kursseilla. Feynmanin diagrammeja ette todennäköisesti tapaa vielä muutama vuoteen, mutta katsokaa silti tämä Fermilabin video elektroni-elektroni-sironnasta <https://www.youtube.com/watch?v=hk1cOffTgdk>. Tuliko mieleen kysymyksiä aiheesta? Niitä voi postata kurssin zulip-kanavalle.