Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-C5230 Digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteet

Luento 2: Diskreettiaikaiset signaalit aikatasossa

Luennon aiheet kirjassa

- Mitra: Digital Signal Processing: A Computer Based Approach
  - 2.1 Time Domain Representation 42
  - 2.2 Operations on Sequences 46
  - 2.4 Typical Sequences and Sequence Representation 62
  - 2.5 The Sampling Process 72
  - 2.6 Correlation of Signals 74
- Vaihtoehtoinen materiaali Rawat, Digital signal processing: 1.4.1, 1.5-1.9, 1.11, 2.1-2.3 alku, 3.1-3.2.2, 3.3, 3.7

Oppimistavoitteet

Luennon ja harjoitusten jälkeen opiskelija osaa

- esittää diskreettiaikaisen signaalin lukusekvenssinä
- luokitella signaalin pituuden ja periodisuuden perusteella
- perusoperaatiot ja niiden esityksen lohkokaaviossa
- esittää yksikköimpulssin ja -askeleen ja ymmärtää niiden välisen yhteyden
- kompleksieksponentiaalin ominaisuudet
- selittää näytteistyksen ja ymmärtää sen vaikutukset
- korrelaation ja konvoluution välisen yhteyden

Lisäpisteet

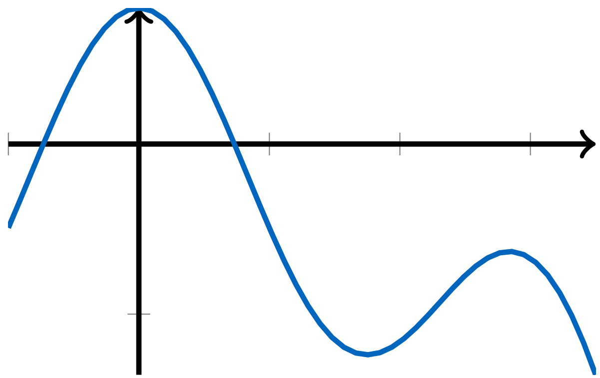
- Luennon 2 “Quiz” MyCourses-sivuilla
- Avoinna 8.3.21 klo 12.15 - 14.05
- Salasana “dsp20212”

Sisältö

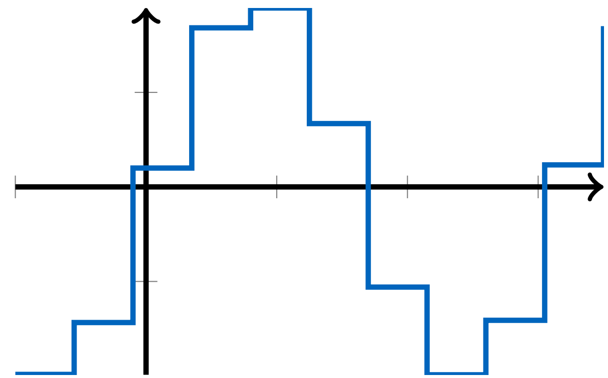
1. Diskreettiaikaisen signaalin esitys aikatasossa
2. Perusoperaatiot signaaleilla
3. Sekvenssityypit
4. Näytteistys ja näytteenottotaajuuden muutokset
5. Signaalien konvoluutio ja korrelaatio

Signaalien luokittelu: edellinen luento

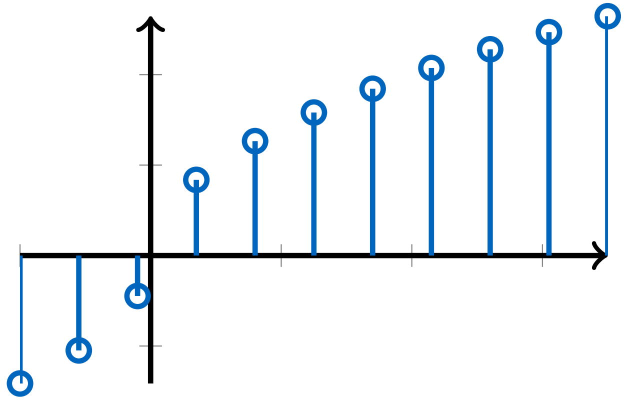
Analoginen



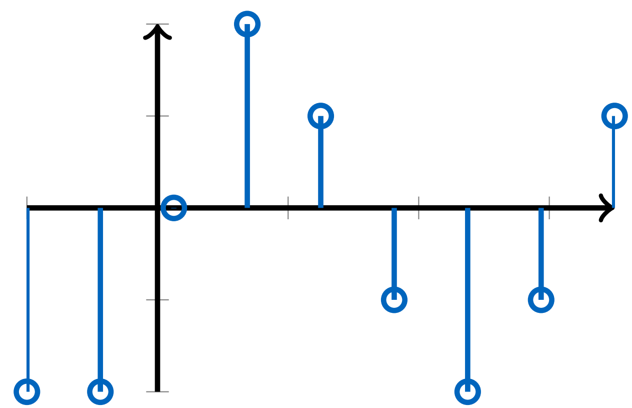
Kvantisoitu



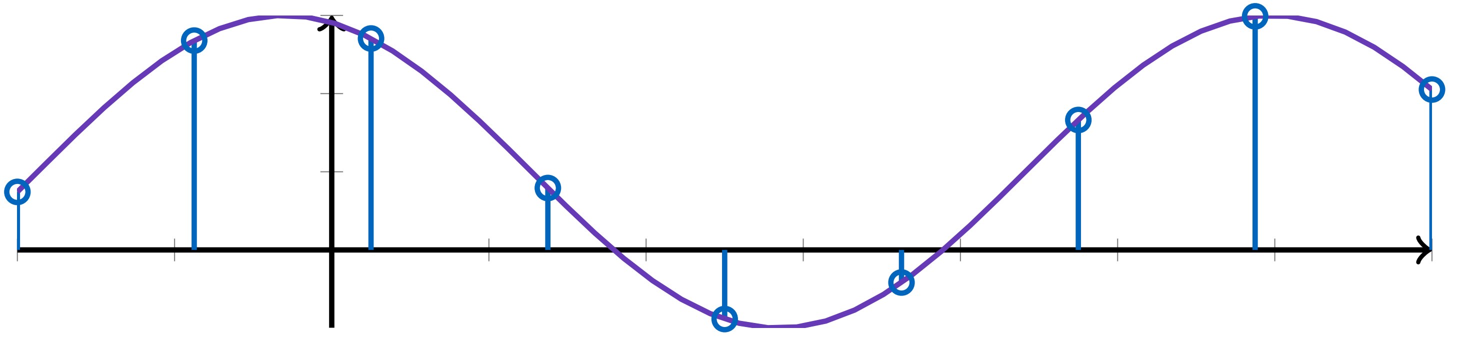
Diskreettiaikainen



Digitaalinen



Diskreettiaikainen signaali



- Analogisesta signaalista saadaan diskreettiaikainen *näytteistämällä* (engl. sampling)

$$x[n] = x_a(nT), \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

- Näytteenottoväli T_s (engl. sampling interval, sampling period)
- Näytteenottotaajuus $F_s = 1/T_s$ (engl. sampling frequency)

Diskreettiaikaisen signaalin esitys

- Indeksi usein hakasulkeissa (ei standardi)
- Esitetään yleisesti lukusarjana
- n:n arvot tai $n = 0$ tyypillisesti merkitty

$$x[n] = \{-3.2, \underline{1.6}, 3.0, 5.2, 3.9\}$$
$$y[n] = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0\} \qquad -2 \leq n \leq 6$$

- Täsmällisempi merkintä

$$\{y[n] | n = -2, -1, \ldots, 6\} = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0\},$$

  jota ei useinkaan vaivauduta kirjoittamaan
- Tällä kurssilla: sekvenssi = diskreettiaikainen signaali = indeksoitu lukujoukko

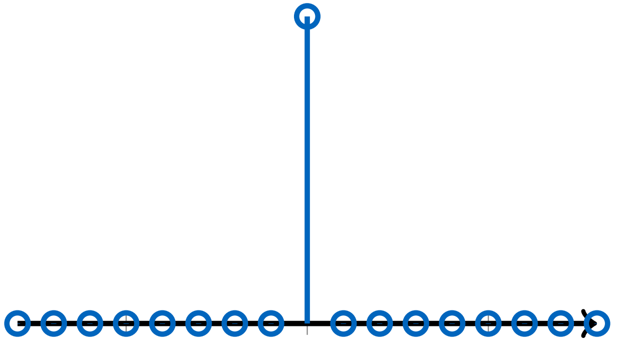
Digitaaliset signaalit

- Analogisesta signaalista tehdään digitaalinen *näytteistämällä* ja *kvantisoimalla* (engl. quantize)
- AD-muunnin (engl. analog to digital converter)
- Tällä kurssillä käsitellään pääosin näytteistyksen vaikutusta

Perussekvenssejä: yksikköimpulssi

Yksikköimpulssi (engl. unit impulse, unit sample sequence)

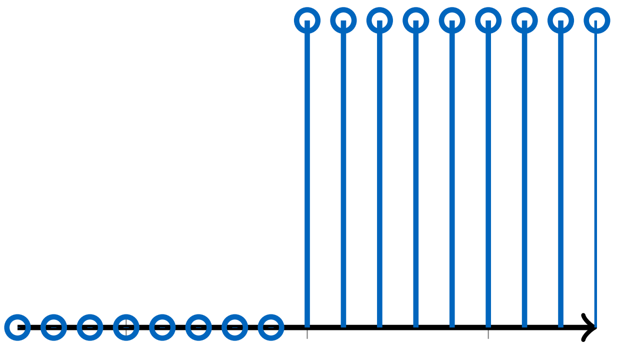
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



Perussekvenssejä: yksikköaskel

Yksikköaskel (engl. unit step)

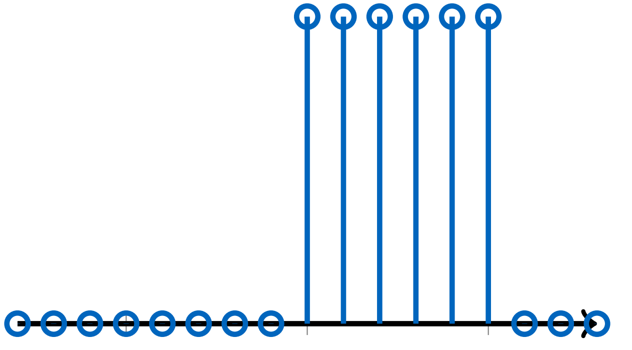
$$\mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Perussekvenssejä: pulssi, ikkuna

Pituuden N neliskanttinen pulssi/ikkuna (engl. length N rectangular pulse/window)

$$p_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$



Sisältö

1. Diskreettiaikaisen signaalin esitys aikatasossa
2. Perusoperaatiot signaaleilla
3. Sekvenssityypit
4. Näytteistys ja näytteenottotaajuuden muutokset
5. Signaalien konvoluutio ja korrelaatio

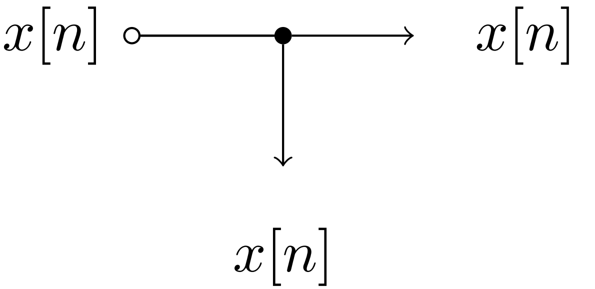
Perusoperaatiot

- Signaalinkäsittelyssä kohdistetaan signaaleihin aritmeettisia operaatioita
- Käsittelyvaiheet esitetään usein kaavakuvana
- Perusoperaatiot
  - haarautuminen
  - yhteenlasku
  - kertolasku
  - ajansiirto
  - tulo

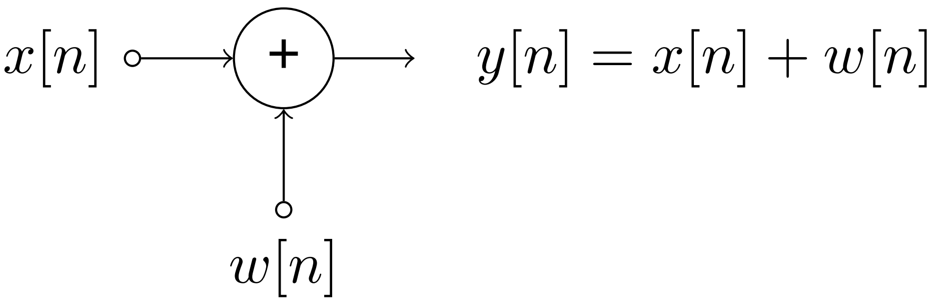
Perusoperaatiot: haarautuminen

- Jaetaan sama signaali useampaan haaraan

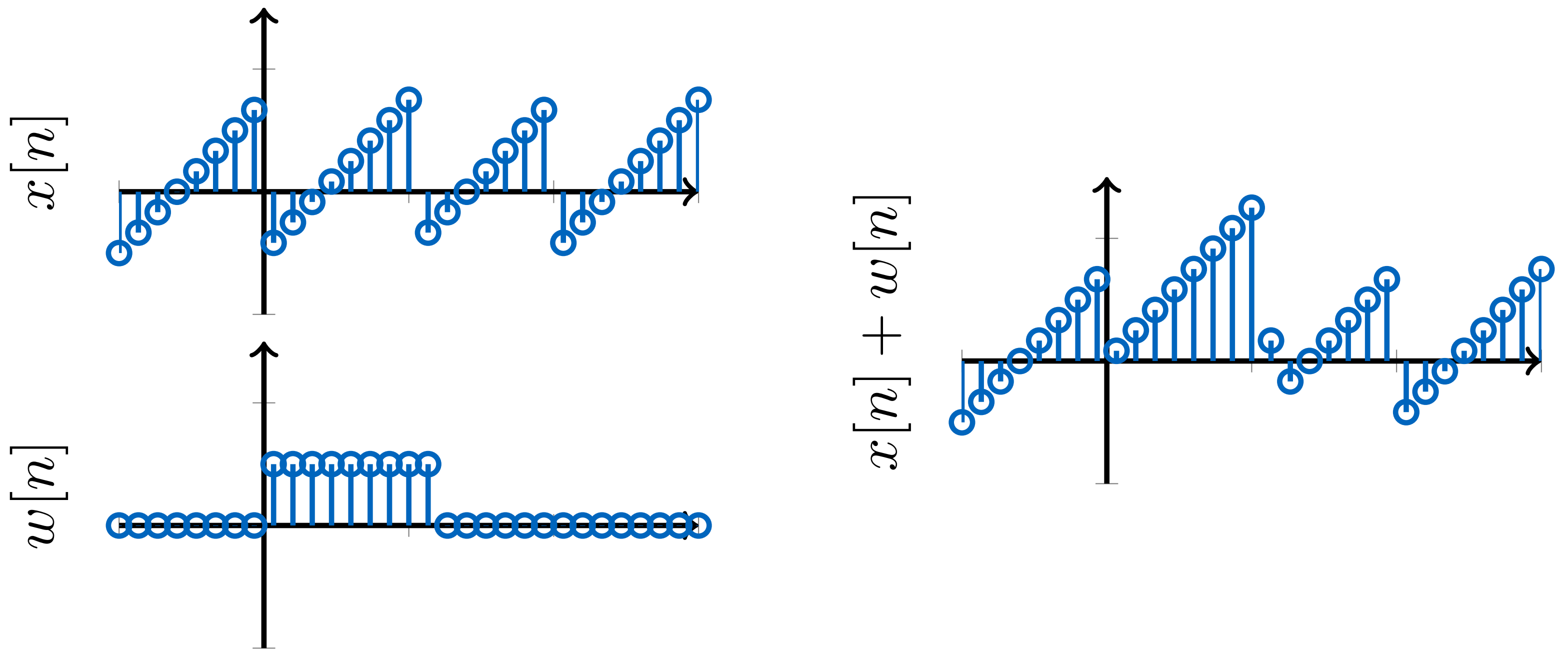
Haara (engl. branching)



Perusoperaatiot: yhteenlasku

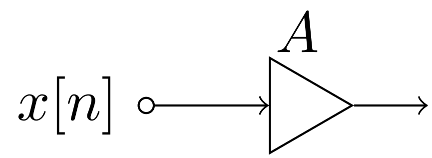


Yhteenlaskija (engl. adder)



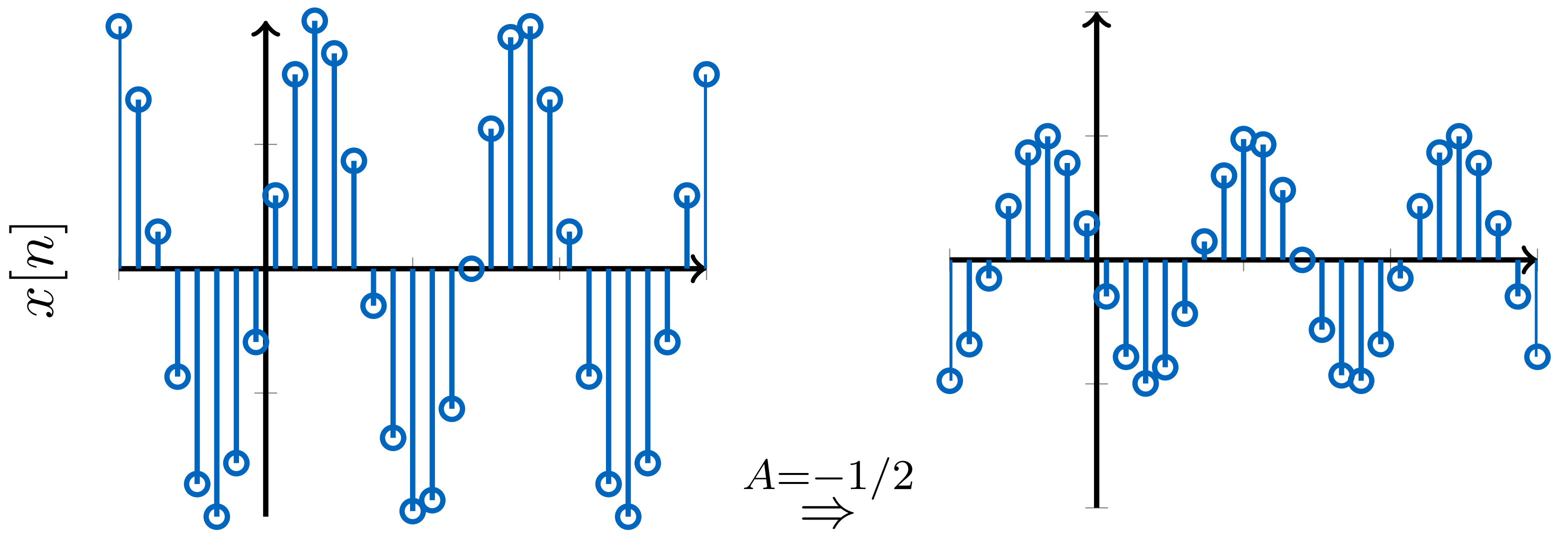
Perusoperaatiot: kertolasku

Kertoja (engl. multiplier)

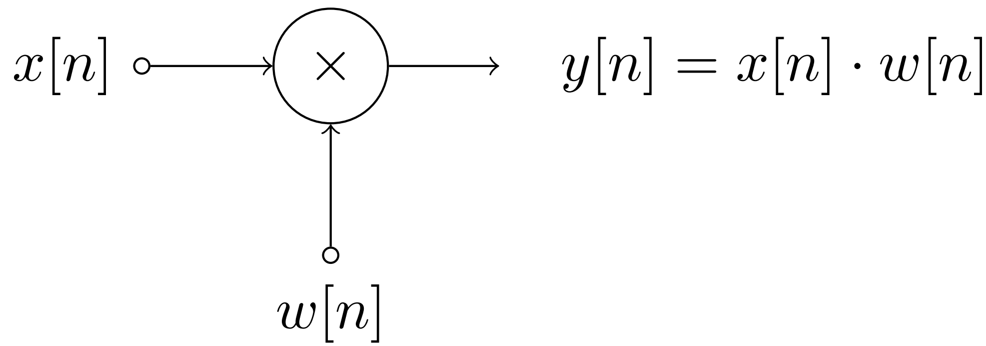


$$y[n] = A \cdot x[n]$$

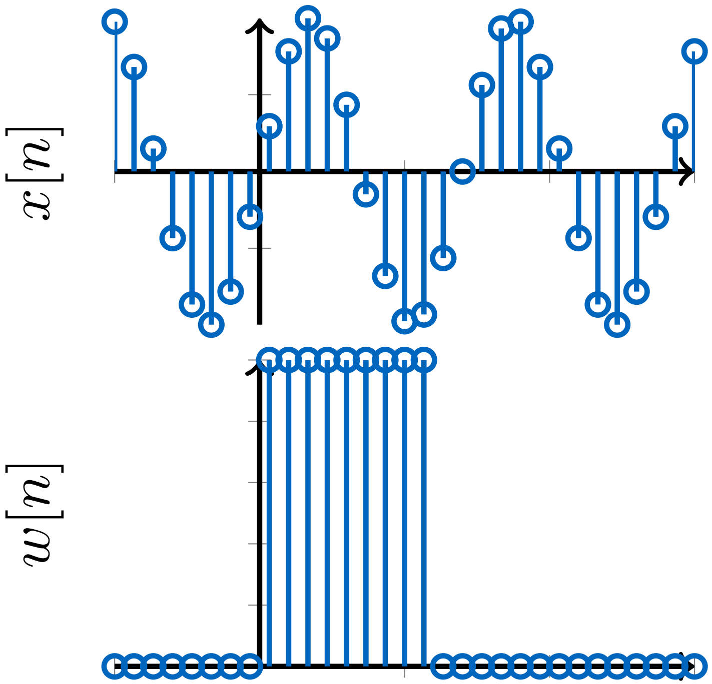
- vahvistus, vaimennus, tai vaihesiirto

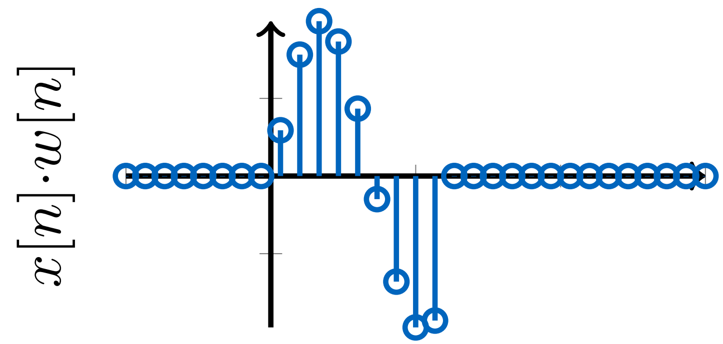


Perusoperaatiot: tulo eli modulaatio



Modulaattori (engl. modulator)





Aikasiirto

Siirretään signaalia N näytettä: $y[n] = x[n-N]$ (engl. time shift)

- $N > 0$ viivästys

Yksikköviive (engl. unit delay)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow y[n] = x[n-1]$$

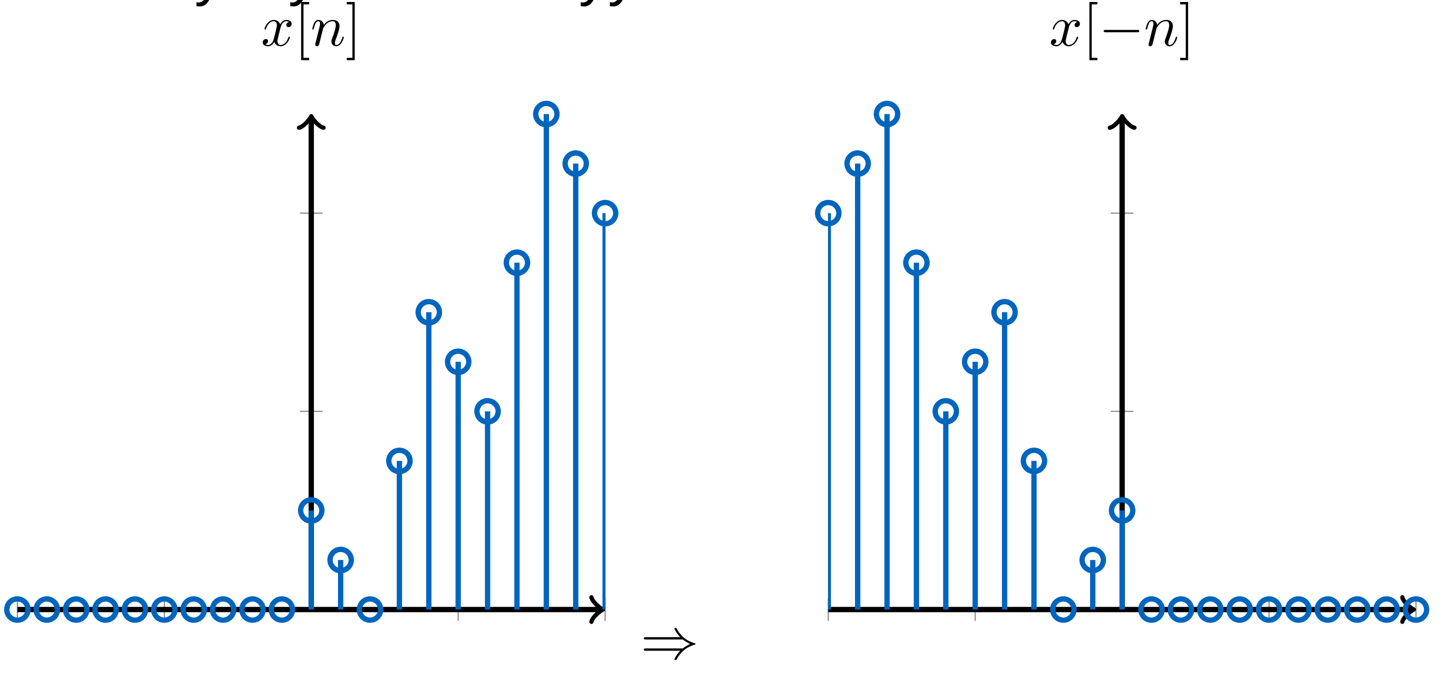
- $N < 0$ aikaistus (mahdollinen vain vastaavan viivästyksen kanssa)

Yksikköaikaistus
(engl. unit advance)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{z} \longrightarrow y[n] = x[n+1]$$

Ajankääntö

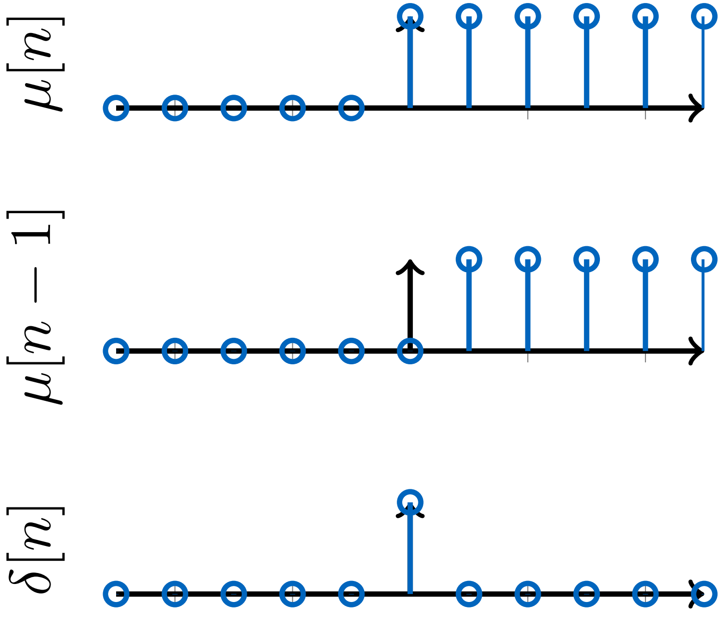
- (engl. time reversal)
- Käännetään signaali ajassa vastakkaiseen suuntaan $y[n] = x[-n]$
- Mahdollinen vain jos signaali tiedetään täsmälleen etukäteen
- Yleisesti hyödyllinen analyyissä

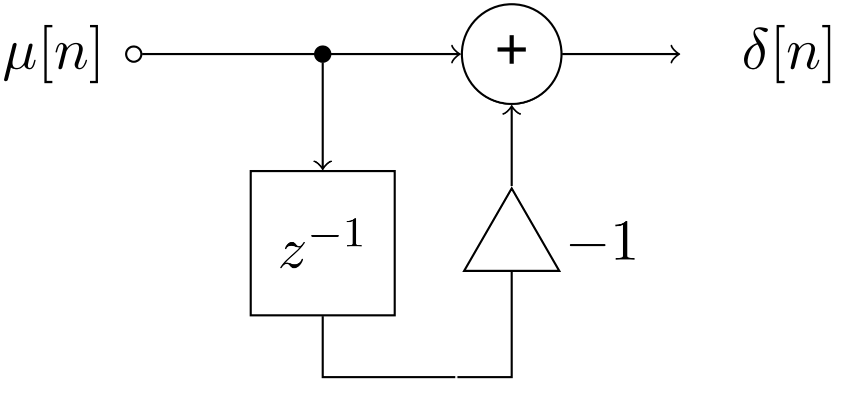


Perussekvenssien yhteydet 1

- Yksikköimpulssi yksikköaskeleella

$$\delta[n] = \mu[n] - \mu[n-1]$$





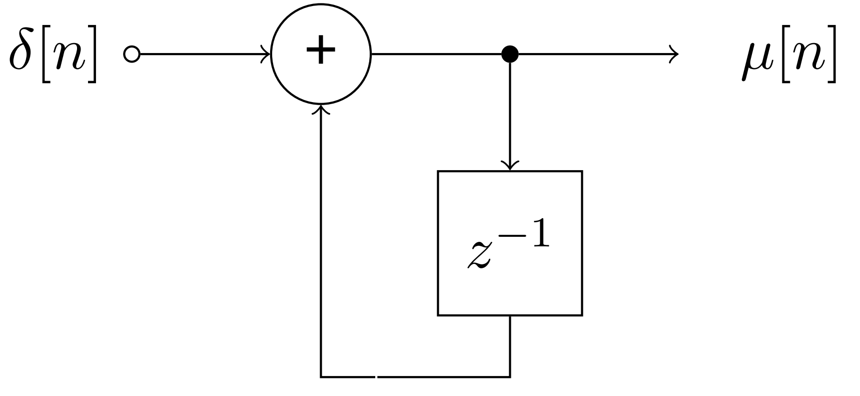
Perussekvenssien yhteydet 2

- Yksikköaskel yksikköimpulssilla

$$\mu[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Esim.

$$\begin{aligned}
\mu[-1] &= \delta[-1-0] + \delta[-1-1] + \delta[-1-2] + \ldots = 0 \\
\mu[1] &= \delta[1-0] + \delta[1-1] + \delta[1-2] + \ldots = 1 \\
\mu[2] &= \delta[2-0] + \delta[2-1] + \delta[2-2] + \ldots = 1
\end{aligned}$$

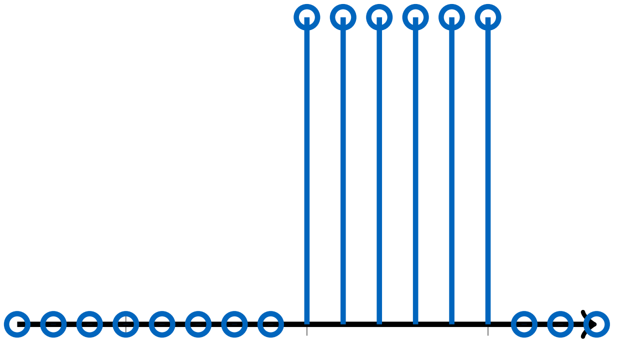


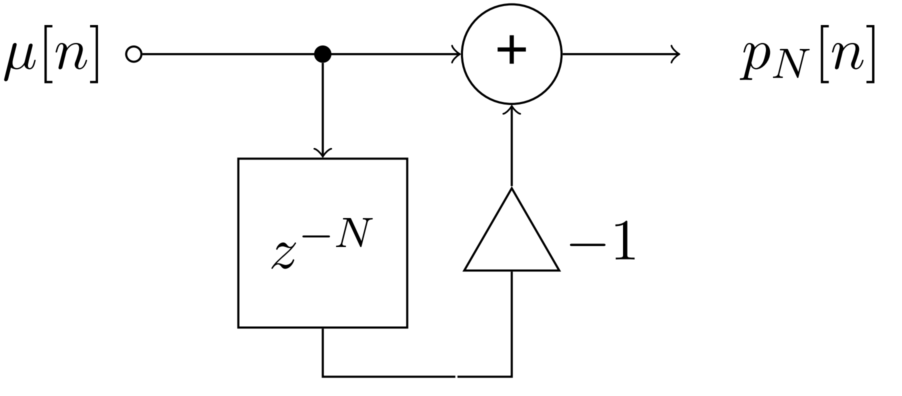
Perussekvenssien yhteydet 3

$$p_N[n] = \mu[n] - \mu[n-N]$$

$$p_N[n] = \sum_{k=0}^{N} \delta[n-k]$$

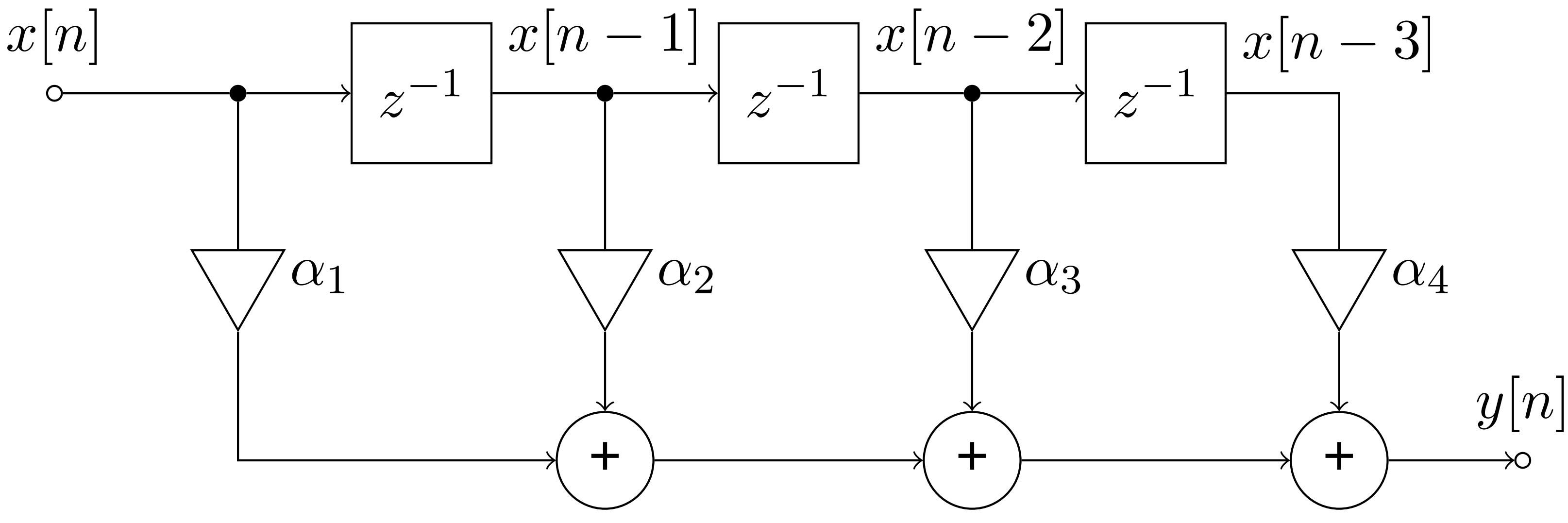
$$p_1[n] = \delta[n]$$





Perusoperaatioiden yhdistelmät

- Perusoperaatioita voidaan yhdistää monimutkaisemmiksi kokonaisuuksiksi, esim. suodattimiksi



- Mikä operaatio, kun $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{4}$?

Sisältö

1. Diskreettiaikaisen signaalin esitys aikatasossa
2. Perusoperaatiot signaaleilla
3. Sekvenssityypit
4. Näytteistys ja näytteenottotaajuuden muutokset
5. Signaalien konvoluutio ja korrelaatio

Signaalien luokituksia

Sekvenssi on

- Äärelliskestoinen (engl. finite-duration, finite-length), jos määritelty välillä $N_1 \leq n \leq N_2$
- Ääretönkestoinen (engl. infinite-duration, infinite-length) jos se ei ole äärelliskestoinen
- Rajattu (engl. bounded), jos $|x[n]| \leq B_x$ kaikilla n:n arvoilla

Summautuvuus

Sekvenssi on

- itseisarvosummautuva (engl. absolutely summable), jos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

- neliösummautuva (engl. square-summable), jos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Summautuvuus: esimerkkejä

- Geometrinen sarja

$$x[n] = \begin{cases} \alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha^n| = \frac{1}{1 - |\alpha|}, \quad |\alpha| \leq 1$$

itseisarvo- ja neliösummautuva

- Harmoninen sarja

$$y[n] = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ hajautuu,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

vain neliösummautuva

Energia ja teho

Mitra: sekvenssi on

- energiasignaali (engl. energy signal), jos se on neliösummautuva
- tehosignaali (engl. power signal), jos se ei ole neliösummautuva ja

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 < \infty$$

Energia ja teho

Mitra: sekvenssi on

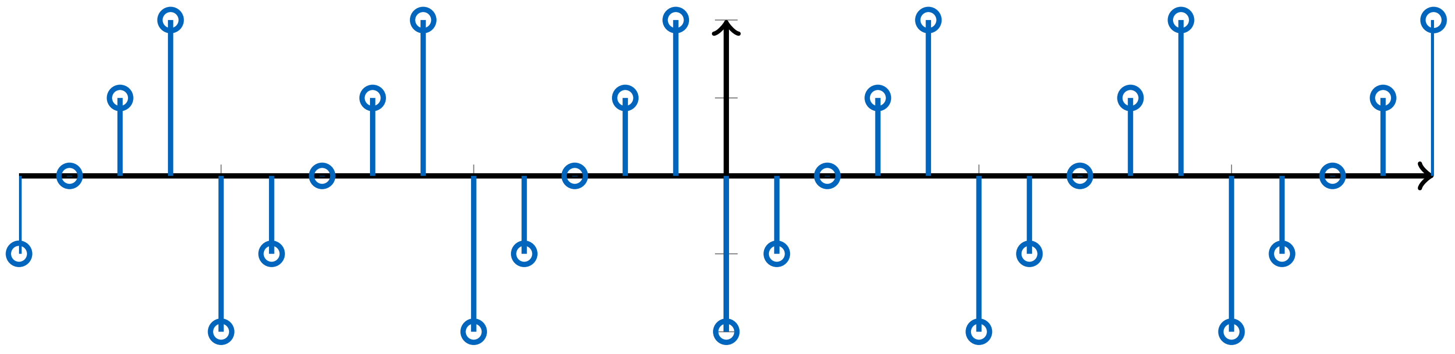
- energiasignaali (engl. energy signal), jos se on neliösummautuva
- tehosignaali (engl. power signal), jos se ei ole neliösummautuva ja

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 < \infty$$

TOSIASIASSA

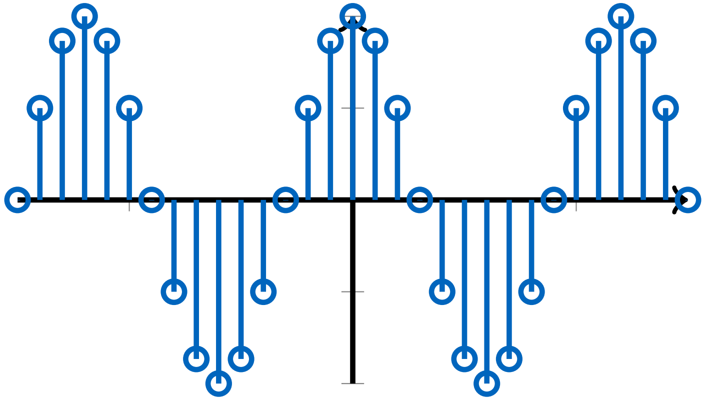
- Teho ja energia riippuvat signaalista, esim.
  - vakiojännite ilman virtaa $\Rightarrow$ ei tehoa, ei käytä energiaa
- Aaltoliikkeellä energia verrannollinen amplitudin (poikkeama tasapainopisteestä) neliöön

Jaksollisuus

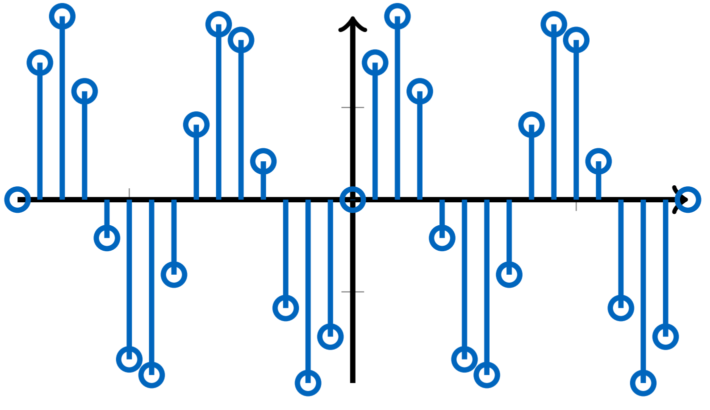


- Sekvenssi on jaksollinen (engl. periodic) jaksolla N jos $x[n+N] = x[n]$ kaikilla n:n arvoilla
- Perusjakso (engl. fundamental period) on pienin mahdollinen jakso

Sinimuotoiset sekvenssit



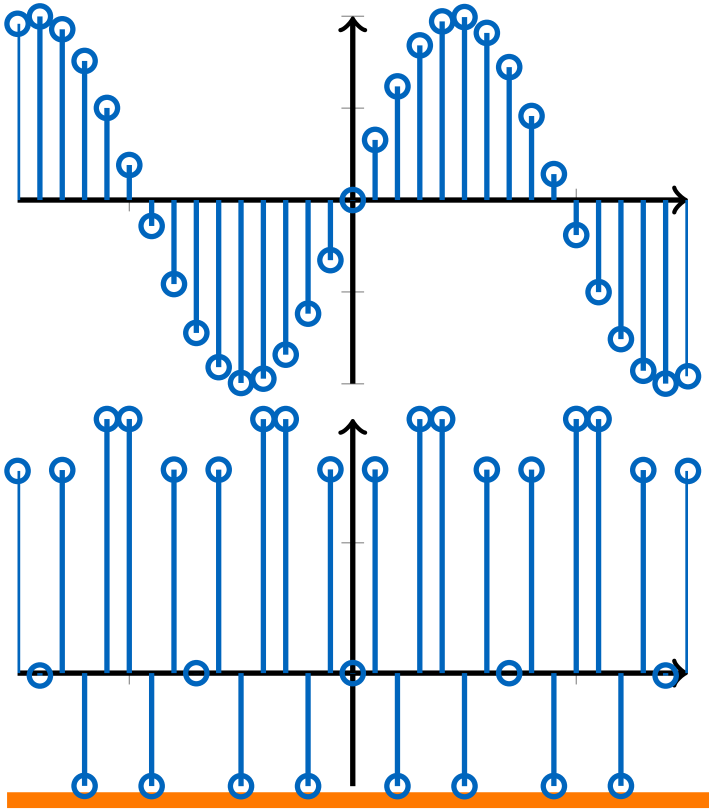
$x[n] = \cos(2\pi n/12)$
jakso $N = 12$



$x[n] = \sin(4\pi n/15)$
jakso $N = 15$

Jaksollisuudesta

- Analogisen ja näytteistetyn sekvenssin jaksollisuus ei välttämättä ole sama!



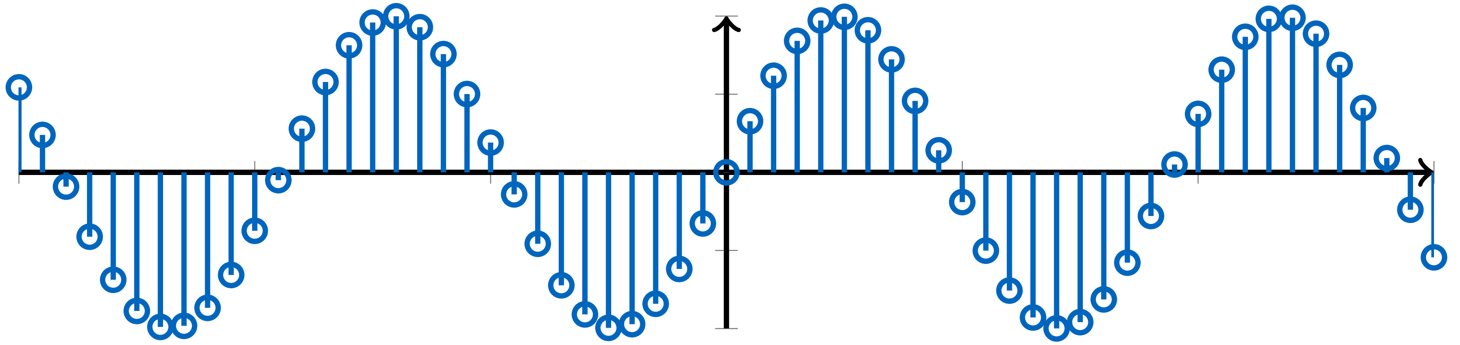
$x_a(t) = \sin(t/3)$ jakso 6π
$x[n] = \sin(n/3)$ ei jaksollinen

$x_a(t) = \sin(2\pi t^2/7)$ ei jaksollinen
$x[n] = \sin(2\pi n^2/7)$ jakso $N = 7$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Kvasijaksollisuus

- Sekvenssi on kvasijaksollinen (engl. quasi-periodic), jos $x[n+N] \approx x[n]$ kaikilla n:n arvoilla



Kompleksieksponentiaali 1

- Oletetaan $A, \alpha \in \mathbb{C}$
- Eksponentiaalisekvenssi $x[n] = A\alpha^n$
- Eulerin kaava: $e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$

$$A = |A|e^{j\phi}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega} = e^{\ln|\alpha|}e^{j\omega} = e^{\sigma + j\omega}$$

Kompleksieksponentiaali 1

- Oletetaan $A, \alpha \in \mathbb{C}$
- Eksponentiaalisekvenssi $x[n] = A\alpha^n$
- Eulerin kaava: $e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$

$$A = |A|e^{j\phi}$$

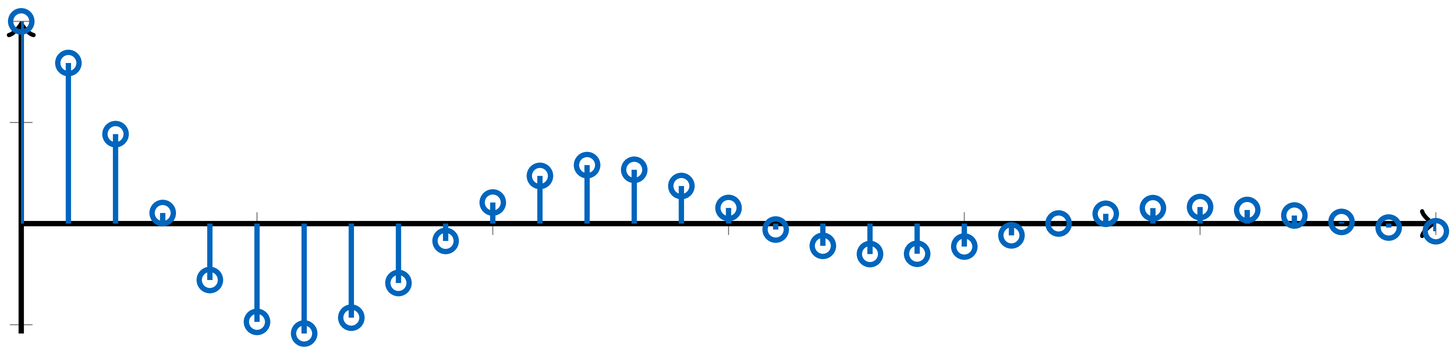
$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega} = e^{\ln|\alpha|}e^{j\omega} = e^{\sigma + j\omega}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= |A|e^{j\phi}[e^{\sigma + j\omega}]^n \\ &= |A|e^{\sigma n}e^{j(\omega n + \phi)} \\ &= |A|e^{\sigma n}[\cos(\omega n + \phi) + j\sin(\omega n + \phi)] \end{aligned}$$

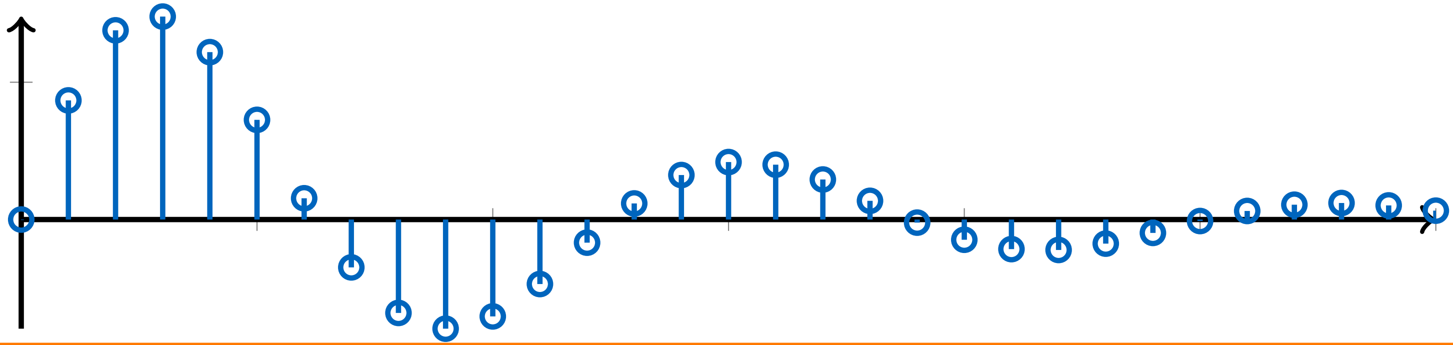
Kompleksieksponentiaali 2

- $x[n] = A\alpha^n = |A|e^{\sigma n}\cos(\omega n + \phi) + j|A|e^{\sigma n}\sin(\omega n + \phi)$
- vaimennettu sinikäyrä (engl. damped sinusoid)

Reaaliosa



Imaginaariosa



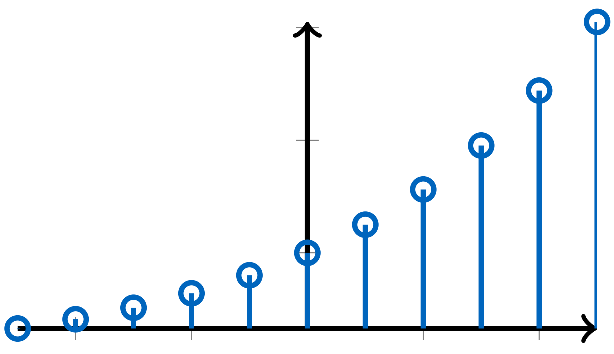
Pos. ja neg. taajuudet

- Kompleksieksponentiaalilla $e^{j(\omega n+\phi)}$ voi olla positiivinen tai negatiivinen (kulma)taajuus
  - $\omega > 0$: vaihe kasvaa eli kiertyy kompleksitasossa vastapäivään
  - $\omega < 0$: vaihe pienenee eli kiertyy kompleksitasossa myötäpäivään
- Taajuuden itseisarvo kertoo värähtelytiheyden

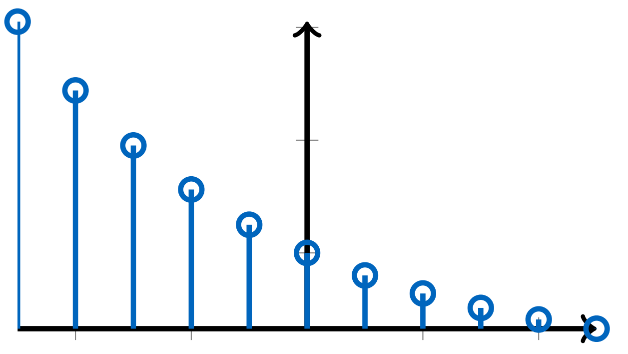
Kompleksieksponentiaali: Erikoistapaukset

- $A \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$
- reaaliavoinen eksponentiaalifunktio

$\alpha > 1$



$0 < \alpha < 1$



Reaaliarvoinen siniaalto

- Lasketaan yhteen kaksi kompleksieksponentiaalia, joiden taajuudet ja vaiheet vastalukuja
- Valitaan $|\alpha| = 1 \Rightarrow \sigma = 0$ (vakioamplitudi)

$$\begin{aligned} x[n] &= |A|e^{j(\omega n+\phi)} + |A|e^{j(-\omega n-\phi)} \\ &= |A|e^{j(\omega n+\phi)} + |A|\left[e^{j(\omega n+\phi)}\right]^* \\ &= |A|2\mathrm{Re}\left[e^{j(\omega n+\phi)}\right] \\ &= 2|A|\cos(\omega n+\phi) \end{aligned}$$

Reaaliarvoinen siniaalto

- Lasketaan yhteen kaksi kompleksieksponentiaalia, joiden taajuudet ja vaiheet vastalukuja
- Valitaan $|\alpha| = 1 \Rightarrow \sigma = 0$ (vakioamplitudi)

$$\begin{aligned} x[n] &= |A|e^{j(\omega n+\phi)} + |A|e^{j(-\omega n-\phi)} \\ &= |A|e^{j(\omega n+\phi)} + |A|\left[e^{j(\omega n+\phi)}\right]^* \\ &= |A|2\mathrm{Re}\left[e^{j(\omega n+\phi)}\right] \\ &= 2|A|\cos(\omega n+\phi) \end{aligned}$$

- Reaaliarvoisen siniaallon voidaan ajatella koostuvan kahden kompleksieksponentiaalin superpositiosta (summasta)
- Fyysiset signaalit aina reaaliarvoisia, ei neg. tai pos. taajuutta

Mielivaltaisen sekvenssin esitys

- Oletetaan $x[n] = \{\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

$$\begin{aligned} x[n] &= \ldots + a_{-2}\delta[n+2] + a_{-1}\delta[n+1] + a_0\delta[n] + a_1\delta[n-1] \\ &\quad + a_2\delta[n-2] + \ldots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta[n-k] \end{aligned}$$

- Yleisemmin

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Vaikuttaa turhalle, mutta tästä esityksestä on myöhemmin hyötyä

Sisältö

1. Diskreettiaikaisen signaalin esitys aikatasossa
2. Perusoperaatiot signaaleilla
3. Sekvenssityypit
4. Näytteistys ja näytteenottotaajuuden muutokset
5. Signaalien konvoluutio ja korrelaatio

Näytteistysprosessi

- Jatkuva-aikaisesta signaalista saadaan diskreettiaikainen tasavälein näytteistämällä

$$x[n] = x_a(nT_s)$$

- Näytteenottoväli (engl. sampling period) T_s
- Näytteenottotaajuus (engl. sampling frequency) $F_s = \frac{1}{T_s}$, eli kuinka monta näytettä aikayksikköä kohden

Näytteistysprosessi: siniaalto

- Oletetaan taajuuden F siniaalto $x_a(t) = \cos(2\pi F t + \phi)$

$$
\begin{aligned}
x[n] = x_a(nT_s) &= \cos(2\pi F n T_s + \phi) \\
&= \cos(2\pi \frac{F}{F_s} n + \phi) \\
&= \cos(2\pi f n + \phi) \\
&= \cos(\omega n + \phi)
\end{aligned}
$$

- Normalisoitu taajuus (engl. normalized frequency) f
- Normalisoitu kulmataajuus (engl. normalized angular frequency) $\omega = 2\pi f$

Näytteistysprosessi: yksikäsitteisyys

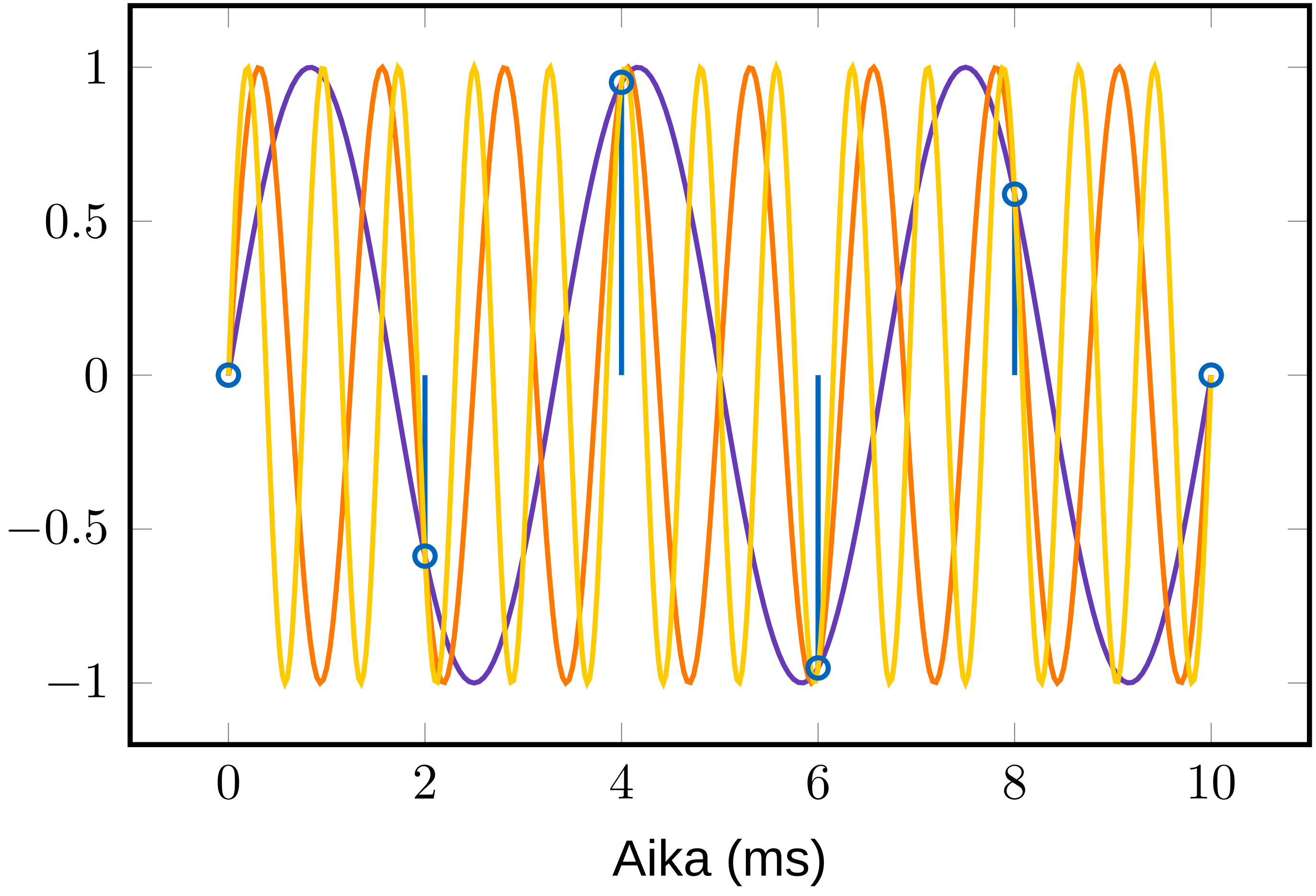
- Äsken $x_a(t) = \cos(2\pi F t + \phi) \rightarrow x[n] = \cos(\omega n + \phi)$
- Valitaan jatkuva-aikaisen signaalin taajuudeksi $F + F_s$
- Eli $\tilde{x}_a(t) = \cos\big(2\pi(F + F_s)t + \phi\big)$

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}[n] = \tilde{x}_a(nT_s) &= \cos[2\pi(F + F_s)nT_s + \phi] \\
&= \cos(2\pi \frac{F + F_s}{F_s} n + \phi) \\
&= \cos[2\pi(f + 1)n + \phi] \\
&= \cos(\omega n + 2\pi n + \phi) \\
&= \cos(\omega n + \phi) = x[n]
\end{aligned}
$$

- Näytteistetty signaali on täsmälleen sama!

Näytteistysprosessi: esimerkki

$F_s = 0.5$ kHz $\Leftrightarrow T_s = 2$ ms, $F = 0.3, 0.8, 1.3$ kHz



Näytteistysprosessi: yksikäsitteisyys 2

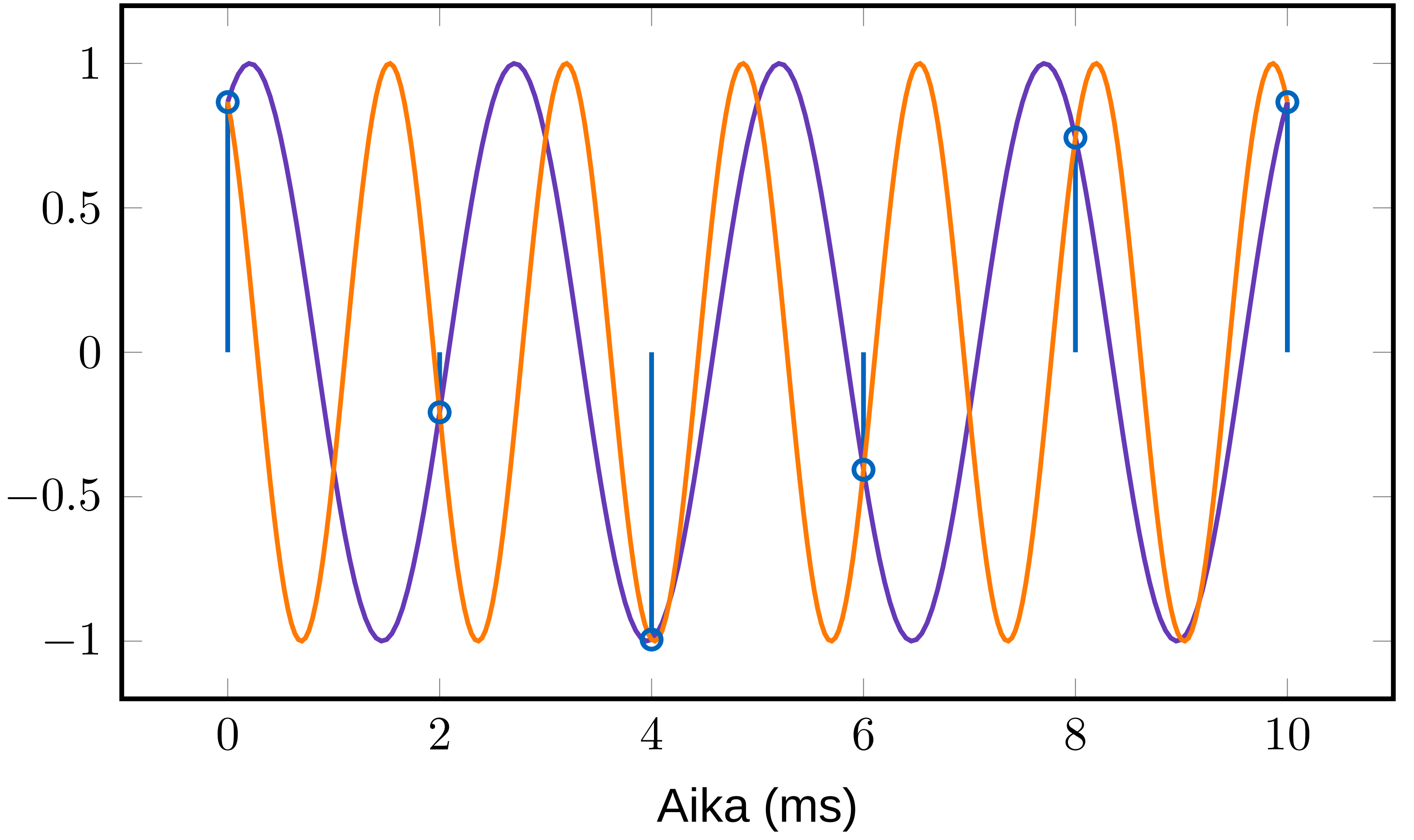
- Tarkastellaan siniaaltoja, toisen taajuus $F_s/2+\Delta$ ja vaihe ϕ, toisen taajuus $F_s/2-\Delta$ ja vaihe $-\phi$, missä $0 \leq \Delta \leq F_s/2$
- Näytteistys

$$\begin{aligned} x[n] = x_a(nT_s) &= \cos[2\pi(F_s/2 \pm \Delta)nT_s \pm \phi] \\ &= \cos(2\pi \frac{F_s/2 \pm \Delta}{F_s} n \pm \phi) \quad \Big| d = \frac{2\pi\Delta}{F_s} \\ &= \cos(\pi n \pm dn \pm \phi) \\ &= \cos(\pi n)\cos[\pm(dn+\phi)] - \underbrace{\sin(\pi n)}_{=0}\sin(\pm dn \pm \phi) \\ &= \cos(\pi n)\cos(dn+\phi) \end{aligned}$$

- Näytteistetyt signaalit samat!

Näytteistysprosessi: esimerkki 2

$F_s = .5$ kHz $\Leftrightarrow T_s = 2$ ms, $F = 0.4, 0.6$ kHz, $\phi = \pi/6$



Näytteistysprosessi: laskostuminen

- Näytteistetyssä signaalissa voidaan esittää siniaaltoja vain taajuuteen $F_s/2$ asti
- Korkeammat taajuudet “laskostuvat” (engl. aliasing) välille $[0, F_s/2]$
- Tästä lisää myöhemmin

Normalisoitu taajuus

- Näytteistetyssä signaalissa voi olla vain normalisoituja taajuuksia $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- Vastaavat normalisoidut kulmataajuudet $\omega \in [-\pi, \pi]$
- Reaaliarvoisille signaaleille negatiiviset taajuudet jättää huomiotta
- Huom! Joissain tilanteissa (esim. Matlab) normalisointi $f' = \frac{F}{F_s/2} \in [-1, 1]$
- Näytteistyksessä tieto alkuperäisestä taajuudesta häviää (tiedostoissa usein näytteenottotaajuus)

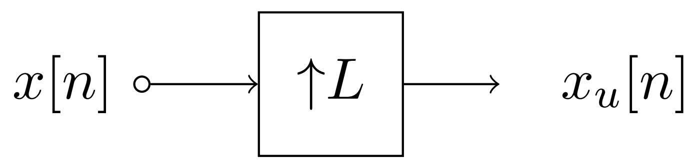
Näytteenottotaajuuden muutos

- Oletetaan diskreettiaikainen signaali $x[n]$
- Halutaan tuottaa signaali $y[n]$, joka vastaa x:ää eri näytteenottotaajuudella
- Näyteenottotaajuuksien suhde $R = \frac{F_s'}{F_s}$
  - $R > 1$, interpolointi (engl. interpolation)
  - $R < 1$, desimointi (engl. decimation)

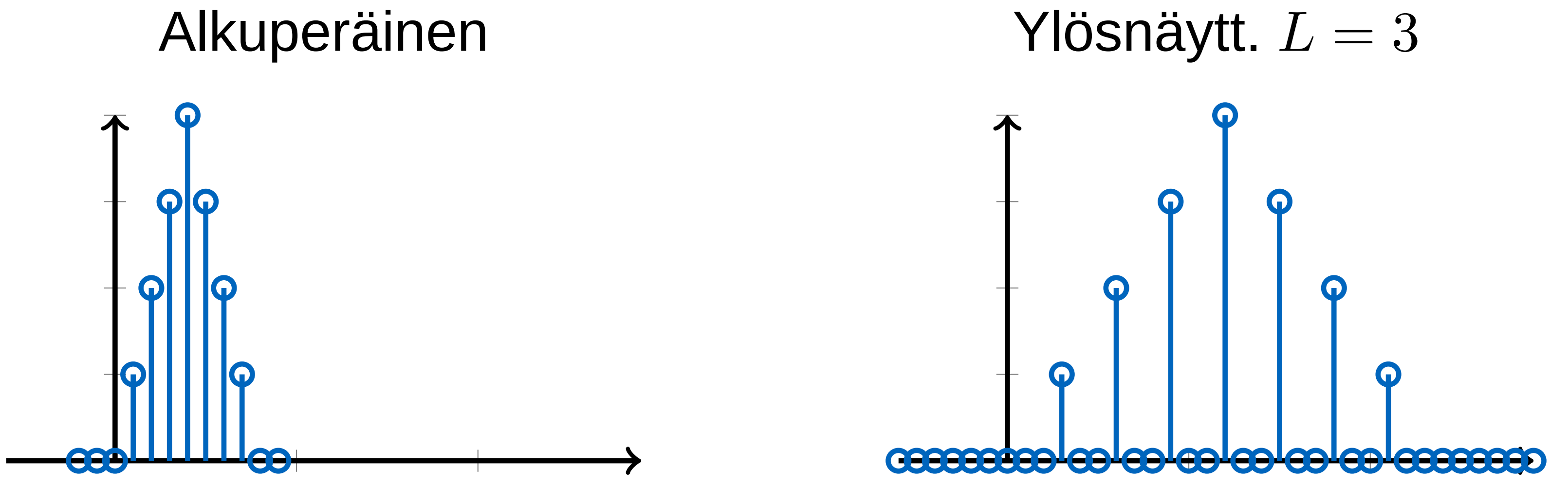
Ylösnäytteistys

- Ylösnäytteistys (engl. up-sampling)
- Nostetaan näytteiden määrä L-kertaiseksi
- Lisätään jokaisen näytteen perään $L-1$ nolla-arvoisa näytettä
- Ei vielä interpolointi

Ylösnäytteistäjä
(engl. up-sampler)



Ylösnäytteistys: esimerkki



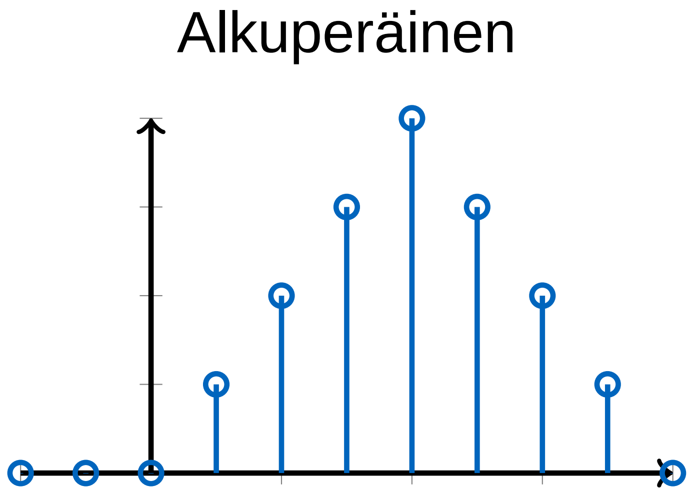
Alasnäytteistys

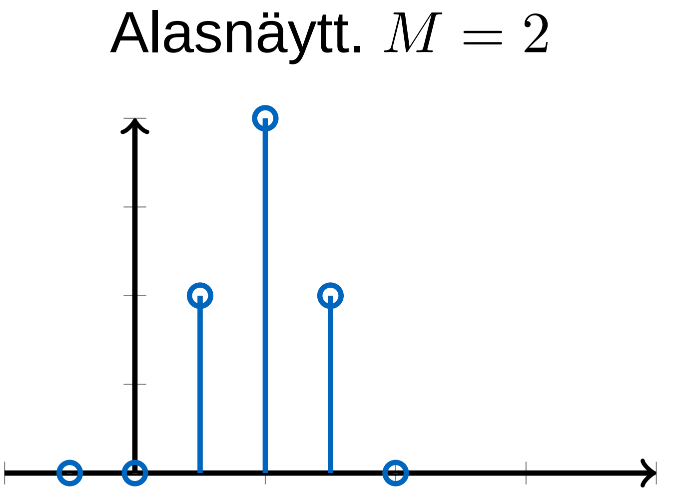
- Alasnäytteistys (engl. down-sampling)
- Lasketaan näytteiden määrä M-osaan
- Poistetaan $M - 1$ näytettä kunkin näytteen jälkeen

Alasnäytteistäjä
(engl. down-sampler)

$$x[n] \circ\!\!\longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow x_d[n]$$

Alasnäytteistys: esimerkki





Sisältö

1. Diskreettiaikaisen signaalin esitys aikatasossa
2. Perusoperaatiot signaaleilla
3. Sekvenssityypit
4. Näytteistys ja näytteenottotaajuuden muutokset
5. Signaalien konvoluutio ja korrelaatio

Korrelaatio

- Monesti tarpeen verrata signaalien samankaltaisuutta
- Voidaan tehdä laskemalla korrelaatio (engl. correlation)
- Eri asia kuin tilastollinen korrelaatio
- Käytännön sovelluksia
    - Sovitettu suodatin (tietoliikenne, tutkat)
    - Jaksollisuuden havaitseminen

Ristikorrelaatio

- Ristikorrelaatiosekvenssi (engl. cross-correlation sequence) mittaa kahden sekvenssin samankaltaisuutta

$$r_{xy}[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k-m]$$

- Viive m (engl. lag) ilmaisee kuinka paljon sekvenssejä on siirretty toisiinsa nähden
- Sekvenssien paikkojen vaihto:

$$r_{yx}[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]x^*[k-m] \qquad \Big| \, l = k - m$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} y[l+m]x^*[l] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \big(x[l]y^*[l-(-m)]\big)^* = r_{xy}^*[-m]$$

Autokorrelaatio

- Autokorrelaatiosekvenssi (engl. autocorrelation sequence) mittaa sekvenssin jaksollisuutta

$$r_{xx}[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x^*[k-m]$$

- Reaaliarvoiselle sekvenssille $r_{xx}[m] = r_{xx}[-m]$
- Sekvenssin “energia”

$$r_{xx}[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = E_x$$

Konvoluutio

- Kahden sekvenssin konvoluutio

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

- Huom. ero korrelaatioon

Konvoluution ominaisuuksia

$$x[n] * y[n] = y[n] * x[n] \qquad \text{(kommutatiivisuus)}$$

$$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n] \qquad \text{(distributiivisuus)}$$

$$x[n] * (y[n] * z[n]) = (x[n] * y[n]) * z[n] \qquad \text{(assosiatiivisuus)}$$

- Nämä tulee muistaa

Konvoluutio ja korrelaatio

- Konvoluutio $x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$
- Ristikorrelaatio

$$\begin{aligned} r_{xy}[m] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k-m] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[-(m-k)] = x[m] * y^*[-m] \end{aligned}$$

- Eli korrelaatio voidaan laskea konvoluutiona tekemällä ajankääntö toiselle sekvenssille ja ottamalla kompleksikonjugaatti