Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

# ELEC-C5230 Digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteet

# Luento 3: Diskreettiaikaiset järjestelmät aikatasossa

# Luennon aiheet kirjassa

- Mitra: Digital Signal Processing: A Computer Based Approach
  - 4.2 Classification of Discrete Time Systems 149
  - 4.3 Impulse and Step Responses 153
  - 4.4 Time Domain Characterization of LTI Discrete Time Systems 154
  - 4.5 Simple Interconnection Schemes 161
  - 4.7 Classification of LTI Discrete Time Systems 172
  - 4.8 Frequency Domain Representations of LTI Discrete Time Systems 175
  - 4.9 Phase and Group Delays 185

# Oppimistavoitteet

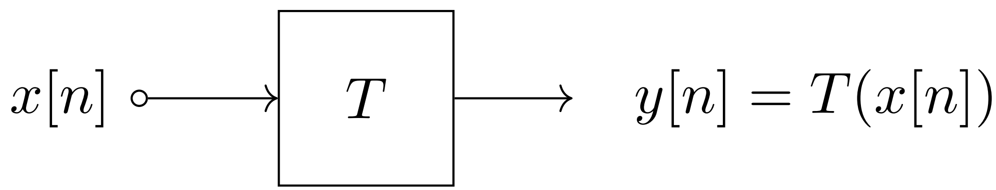
- diskreettiaikaisen järjestelmän luokittelu lineaarisuuden, aikainvarianttisuuden, kausaalisuuden, stabiliteetin, impulssivasteen tyypin ja rekursiivisuuden perusteella
- vasteen laskeminen syötteestä impulssivastetta ja konvoluutiota käyttäen
- konvoluution kolme perusominaisuutta (kommutatiivisuus, distributiivisuus ja assosiatiivisuus ) ja niiden merkitys (lohkokaavio)
- LTI-järjestelmän vaste taajuus-, magnitudi- ja vaihevaste
- vaiheviive ja ryhmäviive

# Sisältö

1. Diskreettiaikaisen järjestelmän luokitus
2. Konvoluutio ja järjestelmien kytkennät
3. LTI-järjestelmät
4. Kompleksieksponentiaalin vaste
5. Suodatus sekä vaihe- ja ryhmäviiveet

# Diskreettiaikaiset järjestelmät

- Oletetaan diskreettiainen järjestelmä $T$



# Diskreettiaikaiset järjestelmät

- Oletetaan diskreettiainen järjestelmä $T$

$$x[n] \circ\!\!\longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow \quad y[n] = T(x[n])$$

- $x[n]$ syöte (engl. input), $y[n]$ vaste (engl. response)
- Huom. notaatio $y[n] = T(x[n])$ voi olla riippuvainen mistä tahansa $x$:n aikaindeksistä

# Diskreettiaikaiset järjestelmät

- Oletetaan diskreettiainen järjestelmä $T$

$$x[n] \circ\!\!\longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow \quad y[n] = T(x[n])$$

- $x[n]$ syöte (engl. input), $y[n]$ vaste (engl. response)
- Huom. notaatio $y[n] = T(x[n])$ voi olla riippuvainen mistä tahansa $x$:n aikaindeksistä
- Ominaisuuksia
    - ▷ lineaarisuus
    - ▷ siirto-invarianssi
    - ▷ kausaalisuus
    - ▷ stabiilius

# Lineaarisuus

- Järjestelmä $T$ on lineaarinen, jos

$$T(ax_1[n] + bx_2[n]) = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n])$$

# Lineaarisuus

- Järjestelmä $T$ on lineaarinen, jos

$$T(ax_1[n] + bx_2[n]) = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n])$$

- Skalaarilla kertomisen vaste sama kuin vasteen kertominen skalaarilla
- Summan vaste on sama kuin yksittäisten vasteiden summa

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

  $\tilde{y}[n] = T(ax_1[n] + bx_2[n])$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

$$\begin{aligned}\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= 0.4(ax_1 + bx_2)[n] + 1.3(ax_1 + bx_2)[n-1]\end{aligned}$$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

$$\begin{aligned}\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= 0.4(ax_1 + bx_2)[n] + 1.3(ax_1 + bx_2)[n-1] \\ &= a0.4x_1[n] + b0.4x_2[n] + a1.3x_1[n-1] + b1.3x_2[n-1]\end{aligned}$$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\
&= 0.4(ax_1 + bx_2)[n] + 1.3(ax_1 + bx_2)[n-1] \\
&= a0.4x_1[n] + b0.4x_2[n] + a1.3x_1[n-1] + b1.3x_2[n-1] \\
&= a(0.4x_1[n] + 1.3x_1[n-1]) + b(0.4x_2[n] + 1.3x_2[n-1])
\end{aligned}$$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\
&= 0.4(ax_1 + bx_2)[n] + 1.3(ax_1 + bx_2)[n-1] \\
&= a0.4x_1[n] + b0.4x_2[n] + a1.3x_1[n-1] + b1.3x_2[n-1] \\
&= a(0.4x_1[n] + 1.3x_1[n-1]) + b(0.4x_2[n] + 1.3x_2[n-1]) \\
&= ay_1[n] + by_2[n] \quad \Rightarrow \text{ lineaarinen}
\end{aligned}$$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\
&= 0.4(ax_1 + bx_2)[n] + 1.3(ax_1 + bx_2)[n-1] \\
&= a0.4x_1[n] + b0.4x_2[n] + a1.3x_1[n-1] + b1.3x_2[n-1] \\
&= a(0.4x_1[n] + 1.3x_1[n-1]) + b(0.4x_2[n] + 1.3x_2[n-1]) \\
&= ay_1[n] + by_2[n] \quad \Rightarrow \text{ lineaarinen}
\end{aligned}$$

- $y[n] = T(x[n]) = x[n] + 5$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\
&= 0.4(ax_1 + bx_2)[n] + 1.3(ax_1 + bx_2)[n-1] \\
&= a0.4x_1[n] + b0.4x_2[n] + a1.3x_1[n-1] + b1.3x_2[n-1] \\
&= a(0.4x_1[n] + 1.3x_1[n-1]) + b(0.4x_2[n] + 1.3x_2[n-1]) \\
&= ay_1[n] + by_2[n] \qquad \Rightarrow \text{ lineaarinen}
\end{aligned}
$$

- $y[n] = T(x[n]) = x[n] + 5$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

$$\begin{aligned}\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= 0.4(ax_1 + bx_2)[n] + 1.3(ax_1 + bx_2)[n-1] \\ &= a0.4x_1[n] + b0.4x_2[n] + a1.3x_1[n-1] + b1.3x_2[n-1] \\ &= a(0.4x_1[n] + 1.3x_1[n-1]) + b(0.4x_2[n] + 1.3x_2[n-1]) \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \quad \Rightarrow \text{ lineaarinen}\end{aligned}$$

- $y[n] = T(x[n]) = x[n] + 5$

$$\tilde{y}[n] = T(ax_1[n] + bx_2[n])$$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\
&= 0.4(ax_1 + bx_2)[n] + 1.3(ax_1 + bx_2)[n-1] \\
&= a0.4x_1[n] + b0.4x_2[n] + a1.3x_1[n-1] + b1.3x_2[n-1] \\
&= a(0.4x_1[n] + 1.3x_1[n-1]) + b(0.4x_2[n] + 1.3x_2[n-1]) \\
&= ay_1[n] + by_2[n] \quad \Rightarrow \text{ lineaarinen}
\end{aligned}$$

- $y[n] = T(x[n]) = x[n] + 5$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\
&= (ax_1 + bx_2)[n] + 5
\end{aligned}$$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

$$\begin{aligned}\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= 0.4(ax_1 + bx_2)[n] + 1.3(ax_1 + bx_2)[n-1] \\ &= a0.4x_1[n] + b0.4x_2[n] + a1.3x_1[n-1] + b1.3x_2[n-1] \\ &= a(0.4x_1[n] + 1.3x_1[n-1]) + b(0.4x_2[n] + 1.3x_2[n-1]) \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \quad \Rightarrow \text{ lineaarinen}\end{aligned}$$

- $y[n] = T(x[n]) = x[n] + 5$

$$\begin{aligned}\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= (ax_1 + bx_2)[n] + 5 \\ &= ax_1[n] + bx_2[n] + 5\end{aligned}$$

# Lineaarisuus: esimerkkejä

- $y[n] = T(x[n]) = 0.4x[n] + 1.1x[n-1]$

$$\begin{aligned}\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= 0.4(ax_1 + bx_2)[n] + 1.3(ax_1 + bx_2)[n-1] \\ &= a0.4x_1[n] + b0.4x_2[n] + a1.3x_1[n-1] + b1.3x_2[n-1] \\ &= a(0.4x_1[n] + 1.3x_1[n-1]) + b(0.4x_2[n] + 1.3x_2[n-1]) \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \quad \Rightarrow \text{ lineaarinen}\end{aligned}$$

- $y[n] = T(x[n]) = x[n] + 5$

$$\begin{aligned}\tilde{y}[n] &= T(ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= (ax_1 + bx_2)[n] + 5 \\ &= ax_1[n] + bx_2[n] + 5 \\ &\neq a(x_1[n] + 5) + b(x_2[n] + 5) \quad \Rightarrow \text{ ei lineaarinen}\end{aligned}$$

# Siirto- tai aikainvarianssi

- Systeemi on siirtoinvariantti (engl. shift-invariant), jos syötteen siirto siirtää vastetta saman verran

$$y[n] = T(x[n])$$
$$y[n-k] = T(x[n-k])$$

# Siirto- tai aikainvarianssi

- Systeemi on siirtoinvariantti (engl. shift-invariant), jos syötteen siirto siirtää vastetta saman verran

$$y[n] = T(x[n])$$
$$y[n-k] = T(x[n-k])$$

- Vaste riippuu vain syötteestä, ei sen (ajan)kohdasta
- Sama asia kuin aikainvarianssi (engl. time-invariance)

# Siirtoinvarianssi: Esimerkkejä

- siirtoinvariantti, mutta ei lineaarinen:

$$y[n] = \sin(x[n])$$
$$y[n-k] = \sin(x[n-k])$$

# Siirtoinvarianssi: Esimerkkejä

- siirtoinvariantti, mutta ei lineaarinen:

$$y[n] = \sin(x[n])$$
$$y[n-k] = \sin(x[n-k])$$

- lineaarinen, mutta ei siirtoinvariantti:

$$y[n] = nx[n]$$

Esim.

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow \qquad y[n] = 0 \ \forall n$$
$$x[n] = \delta[n-2] \Rightarrow \qquad y[n] = 2\delta[n-2]$$

# Kausaalisuus

- Systeemi on kausaalinen, vaste $y[n_0]$, ajanhetkellä $n_0$ riippuu vain syötteestä $x[x]$ ajanhetkellä $n \leq n_0$
- Eli vaste ei voi riippua tulevista syötteen arvoista

# Kausaalisuus

- Systeemi on kausaalinen, vaste $y[n_0]$, ajanhetkellä $n_0$ riippuu vain syötteestä $x[x]$ ajanhetkellä $n \leq n_0$
- Eli vaste ei voi riippua tulevista syötteen arvoista
- Formaalisti:
  Oletetaan $y_1[n] = T(x_1[n])$ ja $y_2[n] = T(x_2[n])$.
  Järjestelmä $T$ on kausaalinen, jos

$$x_1[n] = x_2[n]\ \forall n \leq n_0 \Rightarrow y_1[n] = y_2[n]\ \forall n \leq n_0$$

# Kausaalisuus

- Systeemi on kausaalinen, vaste $y[n_0]$, ajanhetkellä $n_0$ riippuu vain syötteestä $x[x]$ ajanhetkellä $n \leq n_0$
- Eli vaste ei voi riippua tulevista syötteen arvoista
- Formaalisti:
  Oletetaan $y_1[n] = T(x_1[n])$ ja $y_2[n] = T(x_2[n])$.
  Järjestelmä $T$ on kausaalinen, jos

$$x_1[n] = x_2[n] \ \forall n \leq n_0 \Rightarrow y_1[n] = y_2[n] \ \forall n \leq n_0$$

- Jos kaksi syötettä ovat tismalleen samat ajanhetkeen $n_0$ asti, niiden vasteidenkin on pakko olla samat
- Jos näin ei ole, selvästi vasteen täytyy riippua myös syötteestä ajanhetkillä $n > n_0$

# Stabiilius

- Systeemi on stabiili, jos rajatulla syötteellä on rajattu vaste
- BIBO-stabiili, Bounded-input bounded-output stable
- Formaalisti:
  Oletetaan $|x[n]| \leq B_x \; \forall n$, ja $y[n] = T(x[n])$. Systeemi $T$ on stabiili, jos
  $$|y[n]| \leq B_y \; \forall n$$

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$
  $\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| B_x = B_y$

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$
  $\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| B_x = B_y$
  $\Rightarrow$ stabiili

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$
  $\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| B_x = B_y$
  $\Rightarrow$ stabiili
- $y[n] = 2y[n-1]$

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$
  $\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| B_x = B_y$
  $\Rightarrow$ stabiili
- $y[n] = 2y[n-1]$
  Valitaan $x[n] = \delta[n]$

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$
  $\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| B_x = B_y$
  $\Rightarrow$ stabiili
- $y[n] = 2y[n-1]$
  Valitaan $x[n] = \delta[n]$
  $\Rightarrow y[n] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$
  $\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| B_x = B_y$
  $\Rightarrow$ stabiili
- $y[n] = 2y[n-1]$
  Valitaan $x[n] = \delta[n]$
  $\Rightarrow y[n] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$
  $\Rightarrow$ ei stabiili

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$
  $\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| B_x = B_y$
  $\Rightarrow$ stabiili
- $y[n] = 2y[n-1]$
  Valitaan $x[n] = \delta[n]$
  $\Rightarrow y[n] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$
  $\Rightarrow$ ei stabiili

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$
  $\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| B_x = B_y$
  $\Rightarrow$ stabiili
- $y[n] = 2y[n-1]$
  Valitaan $x[n] = \delta[n]$
  $\Rightarrow y[n] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$
  $\Rightarrow$ ei stabiili
- $y[n] = \frac{1}{x[n]}$

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$
  $\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| B_x = B_y$
  $\Rightarrow$ stabiili
- $y[n] = 2y[n-1]$
  Valitaan $x[n] = \delta[n]$
  $\Rightarrow y[n] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$
  $\Rightarrow$ ei stabiili
- $y[n] = \frac{1}{x[n]}$
  $x[n] \to 0 \Rightarrow y[n] \to \pm\infty$

# Stabiilius: esimerkkejä

- $y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$
  $\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k x[n-k]| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| B_x = B_y$
  $\Rightarrow$ stabiili
- $y[n] = 2y[n-1]$
  Valitaan $x[n] = \delta[n]$
  $\Rightarrow y[n] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$
  $\Rightarrow$ ei stabiili
- $y[n] = \frac{1}{x[n]}$
  $x[n] \to 0 \Rightarrow y[n] \to \pm\infty$
  $\Rightarrow$ ei stabiili

# LTI-järjestelmät

- Olemme pääasiassa kiinnostuneita järjestelmistä, jotka ovat
  - lineaarisia (engl. Linear)
  - aikainvariantteja (engl. Time-Invariant)
- Joskus käytetään myös termiä LSI (lineaarinen ja siirtoinvariantti)

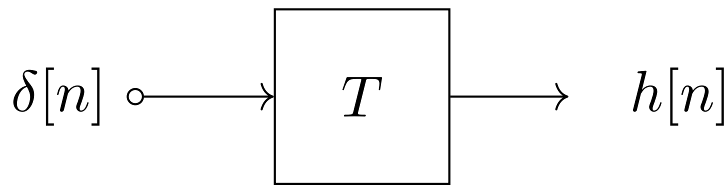
# Impulssivaste

- Impulssivaste (engl. impulse response) on järjestelmän vaste yksikköimpulssiin

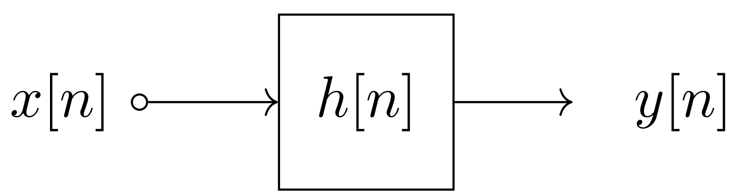
$$\delta[n] \circ\!\!\longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow h[n]$$

# Impulssivaste

- Impulssivaste (engl. impulse response) on järjestelmän vaste yksikköimpulssiin




- Impulssivaste riittää kuvaamaan täysin LTI-järjestelmän



# Vaste impulssivasteesta

- Muistetaan edellisestä luennosta sekvenssin esitys yksikköimpulsilla $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- Tässä $x[k]$ käyttäytyy vakiokertoimena
- Käytetään tätä vasteen laskemisessa

$$y[n] = T(x[n])$$

# Vaste impulssivasteesta

- Muistetaan edellisestä luennosta sekvenssin esitys yksikköimpulsilla $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- Tässä $x[k]$ käyttäytyy vakiokertoimena
- Käytetään tätä vasteen laskemisessa

$$y[n] = T(x[n])$$

# Vaste impulssivasteesta

- Muistetaan edellisestä luennosta sekvenssin esitys yksikköimpulsilla $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- Tässä $x[k]$ käyttäytyy vakiokertoimena
- Käytetään tätä vasteen laskemisessa

$$y[n] = T(x[n]) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right)$$

# Vaste impulssivasteesta

- Muistetaan edellisestä luennosta sekvenssin esitys yksikköimpulsilla $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- Tässä $x[k]$ käyttäytyy vakiokertoimena
- Käytetään tätä vasteen laskemisessa

$$y[n] = T(x[n]) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right) \quad \Big| T \text{ lineaarinen}$$

# Vaste impulssivasteesta

- Muistetaan edellisestä luennosta sekvenssin esitys yksikköimpulsilla $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- Tässä $x[k]$ käyttäytyy vakiokertoimena
- Käytetään tätä vasteen laskemisessa

$$y[n] = T(x[n]) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right) \quad \Big| T \text{ lineaarinen}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T(\delta[n-k])$$

# Vaste impulssivasteesta

- Muistetaan edellisestä luennosta sekvenssin esitys yksikköimpulsilla $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- Tässä $x[k]$ käyttäytyy vakiokertoimena
- Käytetään tätä vasteen laskemisessa

$$y[n] = T(x[n]) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right) \quad \Big| T \text{ lineaarinen}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T(\delta[n-k]) \quad \Big| T \text{ aikainvariantti}$$

# Vaste impulssivasteesta

- Muistetaan edellisestä luennosta sekvenssin esitys yksikköimpulsilla $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- Tässä $x[k]$ käyttäytyy vakiokertoimena
- Käytetään tätä vasteen laskemisessa

$$
\begin{aligned}
y[n] = T(x[n]) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right) \quad & \Big| T \text{ lineaarinen} \\
= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T(\delta[n-k]) \quad & \Big| T \text{ aikainvariantti} \\
= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] &
\end{aligned}
$$

# Vaste impulssivasteesta

- Muistetaan edellisestä luennosta sekvenssin esitys yksikköimpulsilla $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- Tässä $x[k]$ käyttäytyy vakiokertoimena
- Käytetään tätä vasteen laskemisessa

$$
\begin{aligned}
y[n] = T(x[n]) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right) & \quad \Big| T \text{ lineaarinen} \\
= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T(\delta[n-k]) & \quad \Big| T \text{ aikainvariantti} \\
= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] & \\
= x[n] * h[n] &
\end{aligned}
$$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

# Sisältö

1. Diskreettiaikaisen järjestelmän luokitus
2. Konvoluutio ja järjestelmien kytkennät
3. LTI-järjestelmät
4. Kompleksieksponentiaalin vaste
5. Suodatus sekä vaihe- ja ryhmäviiveet

# Konvoluutio

- LTI-järjestelmän vaste on syötteen ja impulssivasteen konvoluutio

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

- Edelliseltä luennolta

$$x[n] * y[n] = y[n] * x[n] \qquad \text{(kommutatiivisuus)}$$

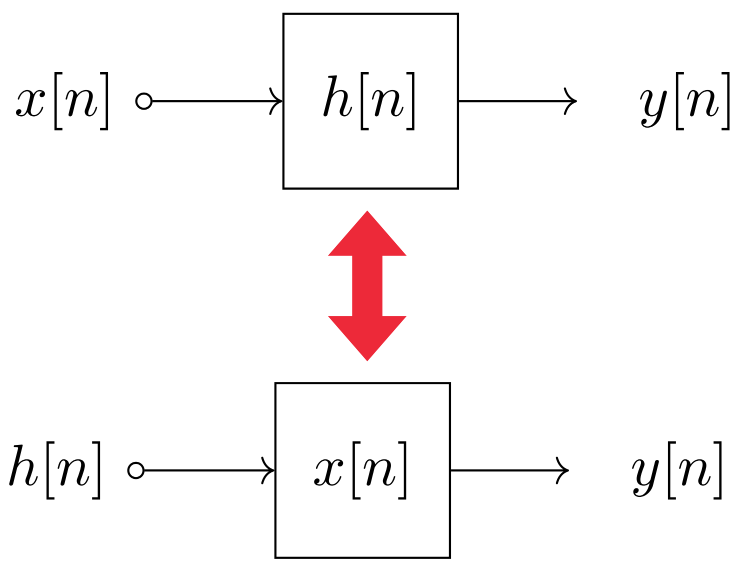
$$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n] \qquad \text{(distributiivisuus)}$$

$$x[n] * (y[n] * z[n]) = (x[n] * y[n]) * z[n] \qquad \text{(assosiatiivisuus)}$$

# Kommutatiivisuus

- Syötteen ja impulssivasteen paikka voidaan vaihtaa

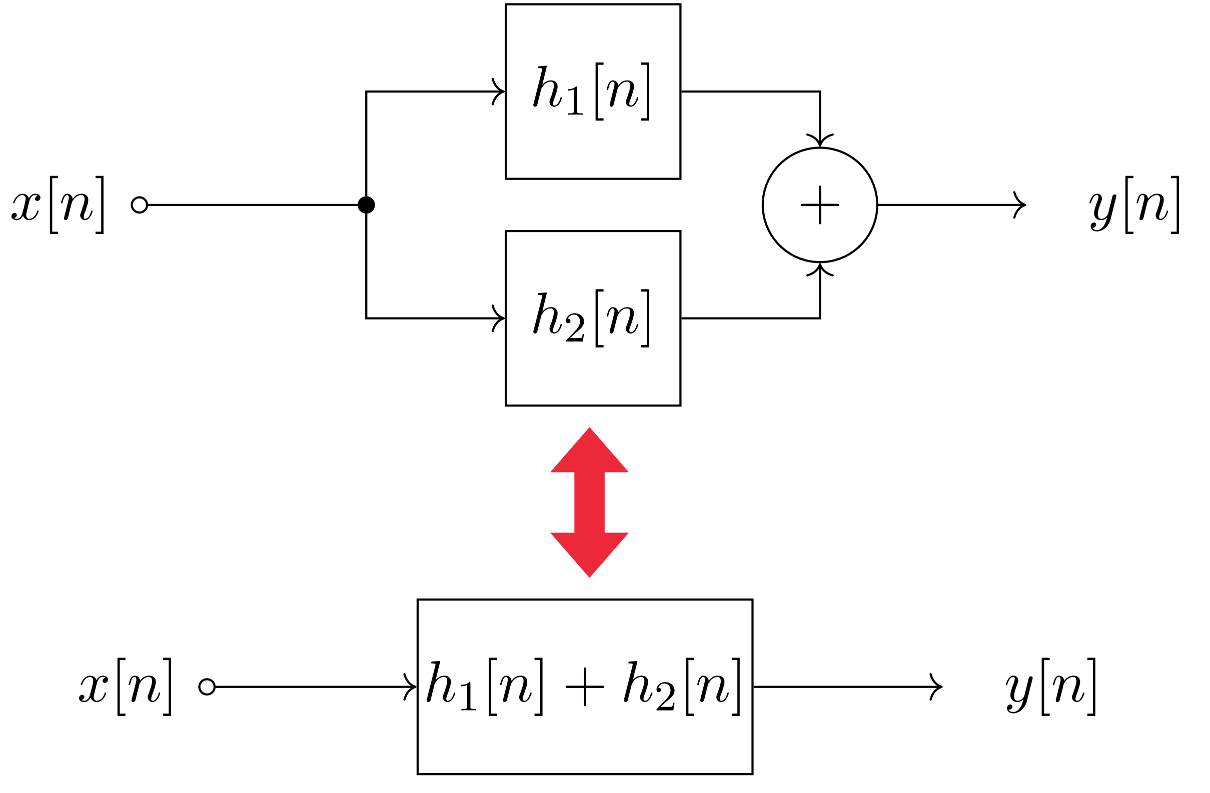
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$



# Distributiivisuus

- Rinnakkaiskytkentä vastaa impulssivasteiden summa

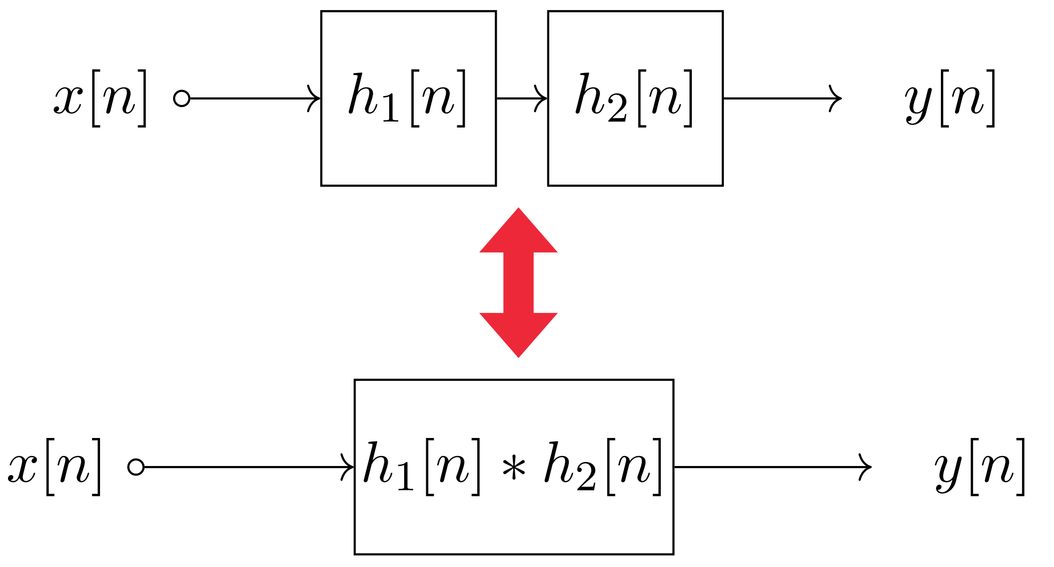
$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



# Assosiatiivisuus

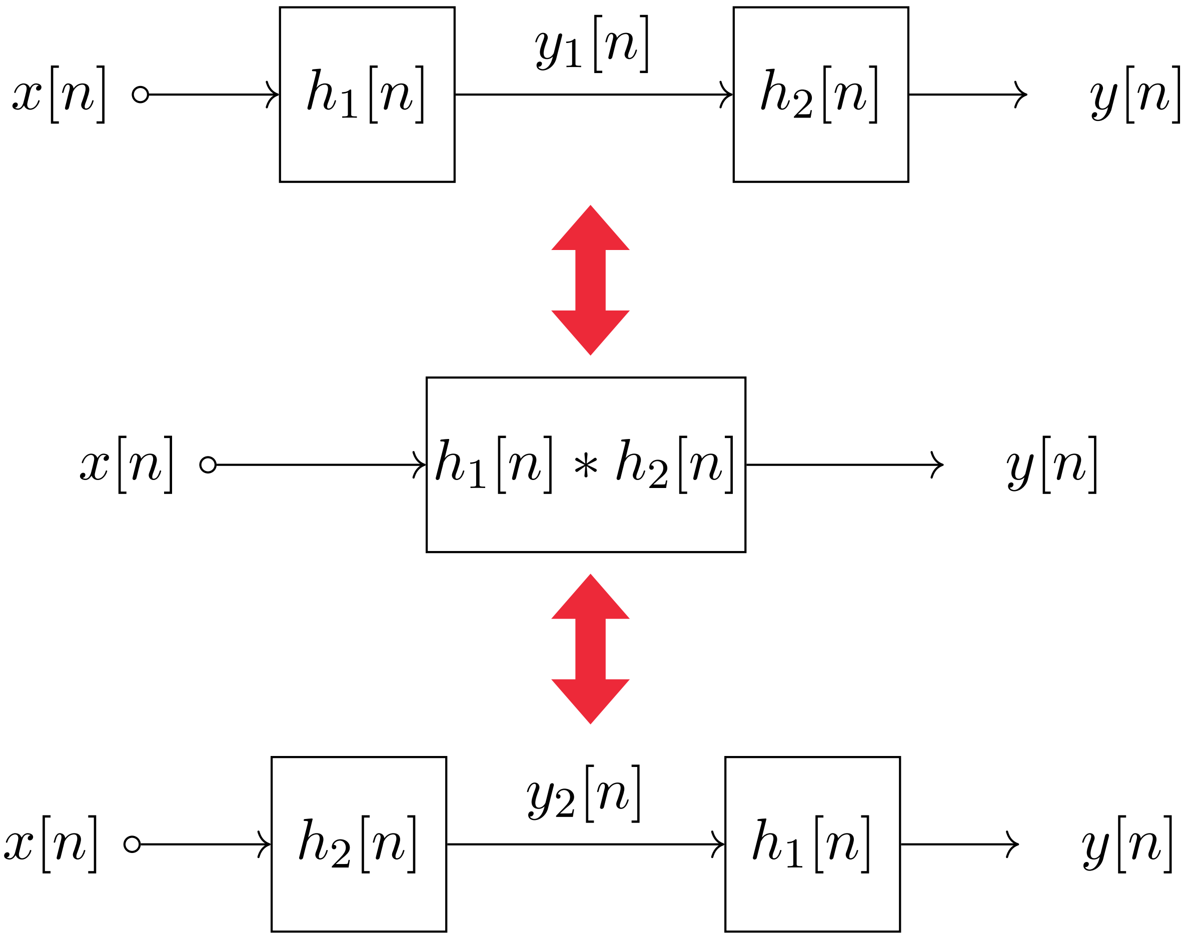
- Sarjaankytkentää vastaa impulssivasteiden kovoluutio

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$



# Kaskadikytkentä

- Assosiatiivisuus ja kommutatiivisuus



# Sarjaankytkennän ominaisuuksia

- Osajärjestelmien paikkoja voidaan vaihtaa
- Osien välillä olevat sekvenssit $y_i[n]$ riippuvat järjestyksestä
- Diskretoiduilla signaaleilla (rajattu määrä bittejä, finite word-length) järjestyksellä on väliä
- Mikä järjestys on paras?

# Sisältö

1. Diskreettiaikaisen järjestelmän luokitus
2. Konvoluutio ja järjestelmien kytkennät
3. LTI-järjestelmät
4. Kompleksieksponentiaalin vaste
5. Suodatus sekä vaihe- ja ryhmäviiveet

# BIBO-stabiilius LTI-järjestelmässä

- BIBO: Bounded input bounded output
- Oletetaan rajattu syöte $x[n]$, eli $|x[n]| \leq B_x$

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \right|$$

# BIBO-stabiilius LTI-järjestelmässä

- BIBO: Bounded input bounded output
- Oletetaan rajattu syöte $x[n]$, eli $|x[n]| \leq B_x$

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| x[n-k]h[k] \right|$$

# BIBO-stabiilius LTI-järjestelmässä

- BIBO: Bounded input bounded output
- Oletetaan rajattu syöte $x[n]$, eli $|x[n]| \leq B_x$

$$
\begin{aligned}
|y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| x[n-k]h[k] \right| \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n-k]| \, |h[k]|
\end{aligned}
$$

# BIBO-stabiilius LTI-järjestelmässä

- BIBO: Bounded input bounded output
- Oletetaan rajattu syöte $x[n]$, eli $|x[n]| \leq B_x$

$$
\begin{aligned}
|y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| x[n-k]h[k] \right| \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n-k]|\ |h[k]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|
\end{aligned}
$$

# BIBO-stabiilius LTI-järjestelmässä

- BIBO: Bounded input bounded output
- Oletetaan rajattu syöte $x[n]$, eli $|x[n]| \leq B_x$

$$
\begin{aligned}
|y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| x[n-k]h[k] \right| \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n-k]| \, |h[k]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|
\end{aligned}
$$

- LTI-järj. on BIBO-stabiili, jos ja vain jos impulssivaste on itseisarvosummautuva

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty
$$

# Kausaalisuus LTI-järjestelmässä

- LTI-järj. on kausaalinen jos ja vain jos $h[n] = 0$ kaikilla $n < 0$

# Kausaalisuus LTI-järjestelmässä

- LTI-järj. on kausaalinen jos ja vain jos $h[n] = 0$ kaikilla $n < 0$
- Formaalista määritelmästä:
  Oletetaan $x_1[n] = x_2[n]\ \forall n \leq n_0$ ja $x_1[n] \neq x_2[n]\ \forall n > n_0$

# Kausaalisuus LTI-järjestelmässä

- LTI-järj. on kausaalinen jos ja vain jos $h[n] = 0$ kaikilla $n < 0$
- Formaalista määritelmästä:
  Oletetaan $x_1[n] = x_2[n] \; \forall n \leq n_0$ ja $x_1[n] \neq x_2[n] \; \forall n > n_0$
  $$y_i[n_0] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x_i[n_0 - k] + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k] x_i[n_0 - k]$$

# Kausaalisuus LTI-järjestelmässä

- LTI-järj. on kausaalinen jos ja vain jos $h[n] = 0$ kaikilla $n < 0$
- Formaalista määritelmästä:
  Oletetaan $x_1[n] = x_2[n]\ \forall n \leq n_0$ ja $x_1[n] \neq x_2[n]\ \forall n > n_0$

$$y_i[n_0] = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h[k] x_i[n_0 - k]}_{\text{arvo sama } i=1,2} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k] x_i[n_0 - k]}_{=z_i[n_0]}$$

# Kausaalisuus LTI-järjestelmässä

- LTI-järj. on kausaalinen jos ja vain jos $h[n] = 0$ kaikilla $n < 0$
- Formaalista määritelmästä:

  Oletetaan $x_1[n] = x_2[n] \; \forall n \leq n_0$ ja $x_1[n] \neq x_2[n] \; \forall n > n_0$

$$y_i[n_0] = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x_i[n_0 - k]}_{\text{arvo sama } i=1,2} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x_i[n_0 - k]}_{=z_i[n_0]}$$

  Nyt jos $y_1[n_0] = y_2[n_0] \Rightarrow z_1[n_0] = z_2[n_0]$

# Kausaalisuus LTI-järjestelmässä

- LTI-järj. on kausaalinen jos ja vain jos $h[n] = 0$ kaikilla $n < 0$
- Formaalista määritelmästä:

  Oletetaan $x_1[n] = x_2[n]\ \forall n \leq n_0$ ja $x_1[n] \neq x_2[n]\ \forall n > n_0$

$$y_i[n_0] = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x_i[n_0 - k]}_{\text{arvo sama } i=1,2} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x_i[n_0 - k]}_{=z_i[n_0]}$$

  Nyt jos $y_1[n_0] = y_2[n_0] \Rightarrow z_1[n_0] = z_2[n_0]$

  $z_1[n_0] - z_2[n_0] = 0 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k](x_1[n_0 - k] - x_2[n_0 - k]) = 0$

# Kausaalisuus LTI-järjestelmässä

- LTI-järj. on kausaalinen jos ja vain jos $h[n] = 0$ kaikilla $n < 0$
- Formaalista määritelmästä:

  Oletetaan $x_1[n] = x_2[n] \; \forall n \leq n_0$ ja $x_1[n] \neq x_2[n] \; \forall n > n_0$

  $$y_i[n_0] = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x_i[n_0 - k]}_{\text{arvo sama } i=1,2} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x_i[n_0 - k]}_{=z_i[n_0]}$$

  Nyt jos $y_1[n_0] = y_2[n_0] \Rightarrow z_1[n_0] = z_2[n_0]$

  $z_1[n_0] - z_2[n_0] = 0 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k] \underbrace{(x_1[n_0 - k] - x_2[n_0 - k])}_{\neq 0} = 0$

# Kausaalisuus LTI-järjestelmässä

- LTI-järj. on kausaalinen jos ja vain jos $h[n] = 0$ kaikilla $n < 0$
- Formaalista määritelmästä:

Oletetaan $x_1[n] = x_2[n] \ \forall n \leq n_0$ ja $x_1[n] \neq x_2[n] \ \forall n > n_0$

$$y_i[n_0] = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h[k] x_i[n_0 - k]}_{\text{arvo sama } i=1,2} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k] x_i[n_0 - k]}_{=z_i[n_0]}$$

Nyt jos $y_1[n_0] = y_2[n_0] \Rightarrow z_1[n_0] = z_2[n_0]$

$$z_1[n_0] - z_2[n_0] = 0 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k] \underbrace{\left(x_1[n_0 - k] - x_2[n_0 - k]\right)}_{\neq 0} = 0$$

Koska $x_1[n] \neq x_2[n_0]$ kun $n > n_0$ ja molemmat ovat mielivaltaisia, järjestelmä on kausaalinen vain jos $h[k] = 0 \ \forall k < 0$

# LTI-järjestelmien luokittelu

- Tyypilliset luokittelutavat
  - impulssivasteen tyyppi
  - toteutustapa

# LTI-järjestelmien luokittelu

- Tyypilliset luokittelutavat
  - impulssivasteen tyyppi
    - FIR: Äärelliskestoinen impulssivaste (engl. finite impulse response)
    - IIR: Ääretönkestoinen impulssivaste (engl. infinite impulse response)
  - toteutustapa

# LTI-järjestelmien luokittelu

- Tyypilliset luokittelutavat
  - impulssivasteen tyyppi
    - FIR: Äärelliskestoinen impulssivaste (engl. finite impulse response)
    - IIR: Ääretönkestoinen impulssivaste (engl. infinite impulse response)
  - toteutustapa
    - rekursiivinen (engl. recursive)
    - ei-rekursiivinen (engl. nonrecursive)

# Luokittelu impulssivasteen perusteella

- FIR: $h[n] \neq 0$, vain kun $N_1 \leq n \leq N_2$

# Luokittelu impulssivasteen perusteella

- FIR: $h[n] \neq 0$, vain kun $N_1 \leq n \leq N_2$
  - $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=N_1}^{N_2} h[k]x[n-k]$

# Luokittelu impulssivasteen perusteella

- FIR: $h[n] \neq 0$, vain kun $N_1 \leq n \leq N_2$
  - $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=N_1}^{N_2} h[k]x[n-k]$
- IIR: $h[n]$ voi saada nollasta poikkeavia arvoja millä n:llä tahansa

# Luokittelu impulssivasteen perusteella

- FIR: $h[n] \neq 0$, vain kun $N_1 \leq n \leq N_2$
  - $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=N_1}^{N_2} h[k]x[n-k]$
- IIR: $h[n]$ voi saada nollasta poikkeavia arvoja millä n:llä tahansa
  - Kausaalinen IIR:
    $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{n} h[n-k]x[k] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]$

# Luokittelu toteutustavan perusteella

- Ei-rekursiivinen: vaste riippuu vain syötteen arvosta

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x[n-k]$$

# Luokittelu toteutustavan perusteella

- Ei-rekursiivinen: vaste riippuu vain syötteen arvosta

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x[n-k]$$

- Rekursiivinen: vaste riippuu vasteen aiemmista arvoista, mahdollisesti myös syötteestä

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x[n-k]$$

# Luokittelu toteutustavan perusteella

- Ei-rekursiivinen: vaste riippuu vain syötteen arvosta

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x[n-k]$$

- Rekursiivinen: vaste riippuu vasteen aiemmista arvoista, mahdollisesti myös syötteestä

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x[n-k]$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{d_0} x[n-k] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{d_0} y[n-k]$$

- Differenssiyhtälö (engl. difference equation)

# Kausaalit toteutettavat LTI-järj.

- MA: liikkuva/liukuva keskiarvo (engl. moving average)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$$

# Kausaalit toteutettavat LTI-järj.

- MA: liikkuva/liukuva keskiarvo (engl. moving average)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$$

- AR: autoregressiivinen (engl. autoregressive)

$$y[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{N} d_k y[n-k]$$

# Kausaalit toteutettavat LTI-järj.

- MA: liikkuva/liukuva keskiarvo (engl. moving average)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$$

- AR: autoregressiivinen (engl. autoregressive)

$$y[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{N} d_k y[n-k]$$

- ARMA: (engl. autoregressive moving average)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} d_k y[n-k]$$

# Kausaalit toteutettavat LTI-järj.

- MA: liikkuva/liukuva keskiarvo (engl. moving average)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$$

- AR: autoregressiivinen (engl. autoregressive)

$$y[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{N} d_k y[n-k]$$

- ARMA: (engl. autoregressive moving average)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} d_k y[n-k]$$

- Asteluku (engl. order): $\max(M, N)$

# FIR, IIR ja rekursiivisuus

- Ei-rekursiivinen järj. aina käytännössä FIR-tyyppisiä

# FIR, IIR ja rekursiivisuus

- Ei-rekursiivinen järj. aina käytännössä FIR-tyyppisiä
- Ovatko rekursiiviset aina IIR-tyyppisiä?

# FIR, IIR ja rekursiivisuus

- Ei-rekursiivinen järj. aina käytännössä FIR-tyyppisiä
- Ovatko rekursiiviset aina IIR-tyyppisiä?
- Ei, palataan tähän myöhemmin tällä luennolla

# Sisältö

1. Diskreettiaikaisen järjestelmän luokitus
2. Konvoluutio ja järjestelmien kytkennät
3. LTI-järjestelmät
4. Kompleksieksponentiaalin vaste
5. Suodatus sekä vaihe- ja ryhmäviiveet

# Ominaisarvot ja -funktiot

- Olkoon $A$ lineaarinen operaattori ja $f$ funktio.
- Jos $A\ f = \lambda f$,
  - $f$ on $A$:n ominaisfunktio
  - $\lambda$ on $A$:n ominaisarvo

# Ominaisarvot ja -funktiot

- Olkoon $A$ lineaarinen operaattori ja $f$ funktio.
- Jos $A\ f = \lambda f$,
  - $f$ on $A$:n ominaisfunktio
  - $\lambda$ on $A$:n ominaisarvo
- LTI-järjestelmä on lineaarinen operaattori

# Kompleksieksponentiaali ja LTI-järjestelmä

- Oletetaan LTI-järjestelmä $h[n]$
- Syöte: $x[n] = e^{j\omega n}$
- Vaste:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

# Kompleksieksponentiaali ja LTI-järjestelmä

- Oletetaan LTI-järjestelmä $h[n]$
- Syöte: $x[n] = e^{j\omega n}$
- Vaste:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

# Kompleksieksponentiaali ja LTI-järjestelmä

- Oletetaan LTI-järjestelmä $h[n]$
- Syöte: $x[n] = e^{j\omega n}$
- Vaste:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}_{=\mathcal{F}\{h[n]\}}$$

# Kompleksieksponentiaali ja LTI-järjestelmä

- Oletetaan LTI-järjestelmä $h[n]$
- Syöte: $x[n] = e^{j\omega n}$
- Vaste:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}_{=\mathcal{F}\{h[n]\}} = e^{j\omega n} H(e^{j\omega k})$$

# Kompleksieksponentiaali ja LTI-järjestelmä

- Oletetaan LTI-järjestelmä $h[n]$
- Syöte: $x[n] = e^{j\omega n}$
- Vaste:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}_{=\mathcal{F}\{h[n]\}} = \underbrace{e^{j\omega n}}_{\text{ominaisfunk.}} \quad \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{ominaisarvo}}$$

# Kompleksieksponentiaali ja LTI-järjestelmä

- Oletetaan LTI-järjestelmä $h[n]$
- Syöte: $x[n] = e^{j\omega n}$
- Vaste:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}_{=\mathcal{F}\{h[n]\}} = \underbrace{e^{j\omega n}}_{\text{ominaisfunk.}} \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{ominaisarvo}}$$

- $H(e^{j\omega})$ on tässä ominaisarvo koska se ei riipu $n$:stä

# Kompleksieksponentiaali ja LTI-järjestelmä

- Oletetaan LTI-järjestelmä $h[n]$
- Syöte: $x[n] = e^{j\omega n}$
- Vaste:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}_{=\mathcal{F}\{h[n]\}} = \underbrace{e^{j\omega n}}_{\text{ominaisfunk.}} \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{ominaisarvo}}$$

- $H(e^{j\omega})$ on tässä ominaisarvo koska se ei riipu $n$:stä
- DTFT $H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\}$ määritelty, jos $h[n]$ BIBO-stabiili

# Kompleksieksponentiaali ja LTI-järjestelmä

- Oletetaan LTI-järjestelmä $h[n]$
- Syöte: $x[n] = e^{j\omega n}$
- Vaste:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}_{=\mathcal{F}\{h[n]\}} = \underbrace{e^{j\omega n}}_{\text{ominaisfunk.}} \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{ominaisarvo}}$$

- $H(e^{j\omega})$ on tässä ominaisarvo koska se ei riipu $n$:stä
- DTFT $H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\}$ määritelty, jos $h[n]$ BIBO-stabiili
- Eri lähteissä käytetään merkintojä $H(e^{j\omega})$, $H(j\omega)$, ja $H(\omega)$

# Taajuusvaste

- Jos LTI-järjestelmän syöte on $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, vaste on silloin $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega_0 n}$

# Taajuusvaste

- Jos LTI-järjestelmän syöte on $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, vaste on silloin $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega_0 n}$
- $H(e^{j\omega_0})$ on järjestelmän taajuusvaste (engl. frequency response)

# Taajuusvaste

- Jos LTI-järjestelmän syöte on $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, vaste on silloin $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega_0 n}$
- $H(e^{j\omega_0})$ on järjestelmän taajuusvaste (engl. frequency response)
- Taajuusvaste on impulssivasteen diskreettiaikainen Fourier-muunnos (DTFT)

# Taajuusvaste

- Jos LTI-järjestelmän syöte on $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, vaste on silloin $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega_0 n}$
- $H(e^{j\omega_0})$ on järjestelmän taajuusvaste (engl. frequency response)
- Taajuusvaste on impulssivasteen diskreettiaikainen Fourier-muunnos (DTFT)
  - Määritelty BIBO-stabiileille LTI-järjestelmille

# Taajuusvaste

- Jos LTI-järjestelmän syöte on $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, vaste on silloin $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega_0 n}$
- $H(e^{j\omega_0})$ on järjestelmän taajuusvaste (engl. frequency response)
- Taajuusvaste on impulssivasteen diskreettiaikainen Fourier-muunnos (DTFT)
  - ▷ Määritelty BIBO-stabiileille LTI-järjestelmille
- Taajuusvaste määrittää LTI-järjestelmän taajuustasossa (vrt. impulssivaste)

# Magnitudi- ja vaihevaste

- $H(e^{j\omega})$ on lähtökohtaisesti kompleksiarvoinen

# Magnitudi- ja vaihevaste

- $H(e^{j\omega})$ on lähtökohtaisesti kompleksiarvoinen
- Käytetään polaariesitystä

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}, \quad \theta(\omega) = \arg\Big(H(e^{j\omega})\Big)$$

# Magnitudi- ja vaihevaste

- $H(e^{j\omega})$ on lähtökohtaisesti kompleksiarvoinen
- Käytetään polaariesitystä

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}, \quad \theta(\omega) = \arg\Big(H(e^{j\omega})\Big)$$

  - $|H(e^{j\omega})|$ on magnitudivaste (engl. magnitude response)
  - $\theta(\omega)$ on vaihevaste (engl. phase response)

# Magnitudi- ja vaihevaste

- $H(e^{j\omega})$ on lähtökohtaisesti kompleksiarvoinen
- Käytetään polaariesitystä

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}, \quad \theta(\omega) = \arg\left(H(e^{j\omega})\right)$$

  - $|H(e^{j\omega})|$ on magnitudivaste (engl. magnitude response)
  - $\theta(\omega)$ on vaihevaste (engl. phase response)

- Magnitudivasteen neliö (yleensä logaritmina) on vahvistusfunktio (engl. gain function)

$$G(\omega) = 10\log_{10}|H(e^{j\omega})|^2\mathrm{dB} = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})|\mathrm{dB}$$

# Taajuustason esitys

- Fourier-muunnokselle: aikatason konvoluutiota vastaa taajuustason tulo

$$y[n] = h[n] * x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

# Taajuustason esitys

- Fourier-muunnokselle: aikatason konvoluutiota vastaa taajuustason tulo

$$y[n] = h[n] * x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

- Taajuustasossa saadaan siis

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{-j\omega})}$$

# Taajuustason esitys: esimerkki

- Otetaan 1. asteen AR-malli

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n], \quad |\alpha| < 1$$

# Taajuustason esitys: esimerkki

- Otetaan 1. asteen AR-malli

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n], \quad |\alpha| < 1$$

- Fourier-muunnokselle $\mathcal{F}\{y[n-k]\} = e^{-j\omega k}\mathcal{F}\{y[n]\}$

# Taajuustason esitys: esimerkki

- Otetaan 1. asteen AR-malli

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n], \quad |\alpha| < 1$$

- Fourier-muunnokselle $\mathcal{F}\{y[n-k]\} = e^{-j\omega k}\mathcal{F}\{y[n]\}$
- Taajuusvaste

$$Y(e^{-j\omega}) - \alpha e^{-j\omega} Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

# Taajuustason esitys: esimerkki

- Otetaan 1. asteen AR-malli

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n], \quad |\alpha| < 1$$

- Fourier-muunnokselle $\mathcal{F}\{y[n-k]\} = e^{-j\omega k}\mathcal{F}\{y[n]\}$
- Taajuusvaste

$$Y(e^{-j\omega}) - \alpha e^{-j\omega} Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

# Taajuustason esitys: esimerkki

- Otetaan 1. asteen AR-malli

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n], \quad |\alpha| < 1$$

- Fourier-muunnokselle $\mathcal{F}\{y[n-k]\} = e^{-j\omega k}\mathcal{F}\{y[n]\}$
- Taajuusvaste

$$Y(e^{-j\omega}) - \alpha e^{-j\omega} Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

- Selvitetään impulssivaste ottamalla käänteis-Fourier-muunnos:

$$h[n] = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}\right\} = \alpha^n \mu[n]$$

# LTI-järjestelmät taajuustasossa

- MA-malli $y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$

# LTI-järjestelmät taajuustasossa

- MA-malli $y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k}$$

# LTI-järjestelmät taajuustasossa

- MA-malli $y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k}$$

# LTI-järjestelmät taajuustasossa

- MA-malli $y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k}$$

- ARMA-malli (jonka erikoistapaus AR-malli on)

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$$

# LTI-järjestelmät taajuustasossa

- MA-malli $y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k}$$

- ARMA-malli (jonka erikoistapaus AR-malli on)

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{N} d_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k}$$

# LTI-järjestelmät taajuustasossa

- MA-malli $y[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k}$$

- ARMA-malli (jonka erikoistapaus AR-malli on)

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{N} d_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} p_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k e^{-j\omega k}}$$

# Rekursiiviset FIR-järjestelmät

- Esim. liukuva keskiarvo $y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

# Rekursiiviset FIR-järjestelmät

- Esim. liukuva keskiarvo $y[n] = \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

$$\Rightarrow Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k}$$

# Rekursiiviset FIR-järjestelmät

- Esim. liukuva keskiarvo $y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

$$\Rightarrow Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k} = X(e^{-j\omega})\frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega k N}}{1-e^{-j\omega k}}$$

# Rekursiiviset FIR-järjestelmät

- Esim. liukuva keskiarvo $y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

$$\Rightarrow Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k} = X(e^{-j\omega})\frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega kN}}{1-e^{-j\omega k}}$$

$$\Rightarrow \left(1-e^{-j\omega k}\right)Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega})\frac{1}{N}\left(1-e^{-j\omega kN}\right)$$

# Rekursiiviset FIR-järjestelmät

- Esim. liukuva keskiarvo $y[n] = \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

$$\Rightarrow Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k} = X(e^{-j\omega})\frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega kN}}{1-e^{-j\omega k}}$$

$$\Rightarrow \left(1-e^{-j\omega k}\right)Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega})\frac{1}{N}\left(1-e^{-j\omega kN}\right)$$

$$\Rightarrow y[n] = y[n-1] + \frac{1}{N}\left(x[n]-x[n-N]\right)$$

# Rekursiiviset FIR-järjestelmät

- Esim. liukuva keskiarvo $y[n] = \dfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

$$\Rightarrow Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k} = X(e^{-j\omega}) \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega k N}}{1 - e^{-j\omega k}}$$

$$\Rightarrow \left(1 - e^{-j\omega k}\right) Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \frac{1}{N} \left(1 - e^{-j\omega k N}\right)$$

$$\Rightarrow y[n] = y[n-1] + \frac{1}{N} \left(x[n] - x[n-N]\right)$$

- Joillekin operaatioille on rekursiivinen ja ei-rekursiivinen toteutus

# Sisältö

1. Diskreettiaikaisen järjestelmän luokitus
2. Konvoluutio ja järjestelmien kytkennät
3. LTI-järjestelmät
4. Kompleksieksponentiaalin vaste
5. Suodatus sekä vaihe- ja ryhmäviiveet

# Suodatus

- Tyypillinen LTI-järjestelmien käyttökohde on suodatus
  - Esim. alutaan vaimentaa tai vahvistaa tiettyjä taajuuksia

# Suodatus

- Tyypillinen LTI-järjestelmien käyttökohde on suodatus
  - Esim. alutaan vaimentaa tai vahvistaa tiettyjä taajuuksia
- Suodatusta varten tulee
  - Selvittää suodattimelle haluttu magnitudivaste
  - Löytää magnitudivastetta mahd. hyvin vastaava LTI-järjestelmä

# Suodatus

- Tyypillinen LTI-järjestelmien käyttökohde on suodatus
  - Esim. alutaan vaimentaa tai vahvistaa tiettyjä taajuuksia
- Suodatusta varten tulee
  - Selvittää suodattimelle haluttu magnitudivaste
  - Löytää magnitudivastetta mahd. hyvin vastaava LTI-järjestelmä
- Suodatintyyppejä
  - alipäästösuodatin (engl. low-pass filter)
  - ylipäästösuodatin (engl. high-pass filter)
  - kaistanpäästösuodatin (engl. band-pass filter)
  - ...

# Suodatus: esimerkki

- Alipäästösuodatin (engl. low-pass filter)
  - Päästetään läpi vain tietyn rajan alittavat taajuudet, muut poistetaan

# Suodatus: esimerkki

- Alipäästösuodatin (engl. low-pass filter)
  - Päästetään läpi vain tietyn rajan alittavat taajuudet, muut poistetaan
- Ideaalinen alipäästösuodatin

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} \gamma, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

# Suodatus: esimerkki

- Alipäästösuodatin (engl. low-pass filter)
  - Päästetään läpi vain tietyn rajan alittavat taajuudet, muut poistetaan
- Ideaalinen alipäästösuodatin

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} \gamma, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- Myös vaihevaste $\theta(\omega)$ vaikuttaa järjestelmän toimintaan!

# Vaiheviive

- LTI-järjestelmän vaikutus kompleksieksponentiaaliin
- Syöte $x[n] = e^{j(\omega_0 n + \phi)}$, vaste

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j(\omega_0 n + \phi)}$$

# Vaiheviive

- LTI-järjestelmän vaikutus kompleksieksponentiaaliin
- Syöte $x[n] = e^{j(\omega_0 n+\phi)}$, vaste

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j(\omega_0 n+\phi)} = |H(e^{j\omega_0})|e^{j(\omega_0 n+\theta(\omega_0)+\phi)}$$

# Vaiheviive

- LTI-järjestelmän vaikutus kompleksieksponentiaaliin
- Syöte $x[n] = e^{j(\omega_0 n + \phi)}$, vaste

$$
\begin{aligned}
y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j(\omega_0 n + \phi)} &= |H(e^{j\omega_0})|e^{j(\omega_0 n + \theta(\omega_0) + \phi)} \\
&= |H(e^{j\omega_0})|e^{j\omega_0(n + \theta(\omega_0)/\omega_0) + j\phi}
\end{aligned}
$$

# Vaiheviive

- LTI-järjestelmän vaikutus kompleksieksponentiaaliin
- Syöte $x[n] = e^{j(\omega_0 n + \phi)}$, vaste

$$
\begin{aligned}
y[n] &= H(e^{j\omega_0})e^{j(\omega_0 n + \phi)} = |H(e^{j\omega_0})|e^{j(\omega_0 n + \theta(\omega_0) + \phi)} \\
&= |H(e^{j\omega_0})|e^{j\omega_0(n + \theta(\omega_0)/\omega_0) + j\phi} \\
&= |H(e^{j\omega_0})|e^{j\omega_0(n - \tau_p(\omega_0)) + j\phi}
\end{aligned}
$$

# Vaiheviive

- LTI-järjestelmän vaikutus kompleksieksponentiaaliin
- Syöte $x[n] = e^{j(\omega_0 n + \phi)}$, vaste

$$
\begin{aligned}
y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j(\omega_0 n + \phi)} &= |H(e^{j\omega_0})|e^{j(\omega_0 n + \theta(\omega_0) + \phi)} \\
&= |H(e^{j\omega_0})|e^{j\omega_0(n + \theta(\omega_0)/\omega_0) + j\phi} \\
&= |H(e^{j\omega_0})|e^{j\omega_0(n - \tau_p(\omega_0)) + j\phi}
\end{aligned}
$$

- Vaiheviive (engl. phase delay)

$$
\boxed{\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}}
$$

# Vaiheviive

- LTI-järjestelmän vaikutus kompleksieksponentiaaliin
- Syöte $x[n] = e^{j(\omega_0 n + \phi)}$, vaste

$$\begin{aligned} y[n] &= H(e^{j\omega_0}) e^{j(\omega_0 n + \phi)} = |H(e^{j\omega_0})| e^{j(\omega_0 n + \theta(\omega_0) + \phi)} \\ &= |H(e^{j\omega_0})| e^{j\omega_0 (n + \theta(\omega_0)/\omega_0) + j\phi} \\ &= |H(e^{j\omega_0})| e^{j\omega_0 (n - \tau_p(\omega_0)) + j\phi} \end{aligned}$$

- Vaiheviive (engl. phase delay)

$$\boxed{\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}}$$

- Kuvaa kuinka paljon yksittäisen siniaallon vaihe muuttuu

# Ryhmäviive

- Vaiheviive kertoo vain yksittäisen siniaallon vaiheen muutoksen

# Ryhmäviive

- Vaiheviive kertoo vain yksittäisen siniaallon vaiheen muutoksen
- Signaalit koostuvat tyypillisesti useammista siniaalloista

# Ryhmäviive

- Vaiheviive kertoo vain yksittäisen siniaallon vaiheen muutoksen
- Signaalit koostuvat tyypillisesti useammista siniaalloista
- Vaiheviiveistä aiheutuu viive koko signaaliin

# Ryhmäviive

- Vaiheviive kertoo vain yksittäisen siniaallon vaiheen muutoksen
- Signaalit koostuvat tyypillisesti useammista siniaalloista
- Vaiheviiveistä aiheutuu viive koko signaaliin
- Signaalin kulun viivettä kuvaa ryhmäviive (engl. group delay)

$$\boxed{\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}}$$

# Ryhmäviive: perusajatus 1

- Oletetaan moduloitu kompleksinen siniaalto $x[n] = a(n)e^{j\omega_0 n}$

# Ryhmäviive: perusajatus 1

- Oletetaan moduloitu kompleksinen siniaalto $x[n] = a(n)e^{j\omega_0 n}$
- $a$:n suurin taajuus $< \omega_0$

# Ryhmäviive: perusajatus 1

- Oletetaan moduloitu kompleksinen siniaalto $x[n] = a(n)e^{j\omega_0 n}$
- $a$:n suurin taajuus $< \omega_0$
- $a$:n Fourier-muunnos $A(e^{j\omega})$, $x$:n $X(e^{j\omega}) = A(e^{j(\omega-\omega_0)})$

# Ryhmäviive: perusajatus 1

- Oletetaan moduloitu kompleksinen siniaalto $x[n] = a(n)e^{j\omega_0 n}$
- $a$:n suurin taajuus $< \omega_0$
- $a$:n Fourier-muunnos $A(e^{j\omega})$, $x$:n $X(e^{j\omega}) = A(e^{j(\omega-\omega_0)})$
- käänteis-Fourier-muunnos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)}) e^{j\omega n} d\omega$$

# Ryhmäviive: perusajatus 1

- Oletetaan moduloitu kompleksinen siniaalto $x[n] = a(n)e^{j\omega_0 n}$
- $a$:n suurin taajuus $< \omega_0$
- $a$:n Fourier-muunnos $A(e^{j\omega})$, $x$:n $X(e^{j\omega}) = A(e^{j(\omega-\omega_0)})$
- käänteis-Fourier-muunnos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)})e^{j\omega n}d\omega$$

- LTI-järjestelmä $T$, jonka taajuusvaste $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$

# Ryhmäviive: perusajatus 1

- Oletetaan moduloitu kompleksinen siniaalto $x[n] = a(n)e^{j\omega_0 n}$
- $a$:n suurin taajuus $< \omega_0$
- $a$:n Fourier-muunnos $A(e^{j\omega})$, $x$:n $X(e^{j\omega}) = A(e^{j(\omega-\omega_0)})$
- käänteis-Fourier-muunnos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)})e^{j\omega n}d\omega$$

- LTI-järjestelmä $T$, jonka taajuusvaste $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$
- Vaste

$$y[n] = Tx[n]$$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

# Ryhmäviive: perusajatus 1

- Oletetaan moduloitu kompleksinen siniaalto $x[n] = a(n)e^{j\omega_0 n}$
- $a$:n suurin taajuus $< \omega_0$
- $a$:n Fourier-muunnos $A(e^{j\omega})$, $x$:n $X(e^{j\omega}) = A(e^{j(\omega-\omega_0)})$
- käänteis-Fourier-muunnos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)})e^{j\omega n}d\omega$$

- LTI-järjestelmä $T$, jonka taajuusvaste $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$
- Vaste ($T$ lineaarinen, $A(e^{j\omega})$ ei riipu $n$:stä)

$$y[n] = Tx[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)})Te^{j\omega n}d\omega$$

# Ryhmäviive: perusajatus 1

- Oletetaan moduloitu kompleksinen siniaalto $x[n] = a(n)e^{j\omega_0 n}$
- $a$:n suurin taajuus $< \omega_0$
- $a$:n Fourier-muunnos $A(e^{j\omega})$, $x$:n $X(e^{j\omega}) = A(e^{j(\omega-\omega_0)})$
- käänteis-Fourier-muunnos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)})e^{j\omega n}d\omega$$

- LTI-järjestelmä $T$, jonka taajuusvaste $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$
- Vaste ($T$ lineaarinen, $A(e^{j\omega})$ ei riipu $n$:stä)

$$y[n] = Tx[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)})Te^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)})|H(e^{j\omega})|e^{j\omega n+j\theta(\omega)}d\omega$$

# Ryhmäviive: perusajatus 2

- Oletetaan, että magnitudivaste on vakio on modulaatiosignaalin $a$ komponenteille
  $|H(e^{j\omega})| \approx C$, kun $A(e^{j\omega}) \neq 0$

# Ryhmäviive: perusajatus 2

- Oletetaan, että magnitudivaste on vakio on modulaatiosignaalin $a$ komponenteille
  $|H(e^{j\omega})| \approx C$, kun $A(e^{j\omega}) \neq 0$
- Tehdään 1. asteen Taylorin sarja vaihevasteelle

$$\theta(\omega) = \theta(\omega_0) + \left.\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

# Ryhmäviive: perusajatus 2

- Oletetaan, että magnitudivaste on vakio on modulaatiosignaalin $a$ komponenteille
  $|H(e^{j\omega})| \approx C$, kun $A(e^{j\omega}) \neq 0$
- Tehdään 1. asteen Taylorin sarja vaihevasteelle

$$\theta(\omega) = \underbrace{\theta(\omega_0)}_{=\alpha} + \underbrace{\left.\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}}_{=\beta} (\omega - \omega_0)$$

# Ryhmäviive: perusajatus 2

- Oletetaan, että magnitudivaste on vakio on modulaatiosignaalin $a$ komponenteille
  $|H(e^{j\omega})| \approx C$, kun $A(e^{j\omega}) \neq 0$
- Tehdään 1. asteen Taylorin sarja vaihevasteelle

$$\theta(\omega) = \underbrace{\theta(\omega_0)}_{=\alpha} + \underbrace{\left.\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}}_{=\beta} (\omega - \omega_0)$$

$$\theta(\omega) = \alpha + (\omega - \omega_0)\beta$$

- Vaste

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)}) C e^{j(\omega n + \alpha + (\omega-\omega_0)\beta)} d\omega$$

# Ryhmäviive: perusajatus 2

- Oletetaan, että magnitudivaste on vakio on modulaatiosignaalin $a$ komponenteille
  $|H(e^{j\omega})| \approx C$, kun $A(e^{j\omega}) \neq 0$
- Tehdään 1. asteen Taylorin sarja vaihevasteelle

$$\theta(\omega) = \underbrace{\theta(\omega_0)}_{=\alpha} + \underbrace{\left.\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}}_{=\beta} (\omega - \omega_0)$$

$$\theta(\omega) = \alpha + (\omega - \omega_0)\beta$$

- Vaste

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)}) C e^{j(\omega n + \alpha + (\omega - \omega_0)\beta)} d\omega \\ &= C e^{j(\alpha - \beta\omega_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j(\omega-\omega_0)}) e^{j(n+\beta)\omega} d\omega \end{aligned}$$

# Ryhmäviive: perusajatus 3

- Tehdään muuttujan vaihdos $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$, funktiot $2\pi$-jaksollisia joten integrointirajoja ei tarvitse muuttaa

# Ryhmäviive: perusajatus 3

- Tehdään muuttujan vaihdos $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$, funktiot $2\pi$-jaksollisia joten integrointirajoja ei tarvitse muuttaa

$$y[n] = Ce^{j(\alpha-\beta\omega_0)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}})e^{j(n+\beta)(\tilde{\omega}+\omega_0)}d\tilde{\omega}$$

# Ryhmäviive: perusajatus 3

- Tehdään muuttujan vaihdos $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$, funktiot $2\pi$-jaksollisia joten integrointirajoja ei tarvitse muuttaa

$$
\begin{aligned}
y[n] &= Ce^{j(\alpha - \beta\omega_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}}) e^{j(n+\beta)(\tilde{\omega}+\omega_0)} d\tilde{\omega} \\
&= Ce^{j(\alpha - \beta\omega_0) + j(n+\beta)\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}}) e^{j\beta\tilde{\omega}} e^{jn\tilde{\omega}} d\tilde{\omega}
\end{aligned}
$$

# Ryhmäviive: perusajatus 3

- Tehdään muuttujan vaihdos $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$, funktiot $2\pi$-jaksollisia joten integrointirajoja ei tarvitse muuttaa

$$
\begin{aligned}
y[n] &= Ce^{j(\alpha - \beta\omega_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}}) e^{j(n+\beta)(\tilde{\omega}+\omega_0)} d\tilde{\omega} \\
&= Ce^{j(\alpha - \beta\omega_0) + j(n+\beta)\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}}) e^{j\beta\tilde{\omega}} e^{jn\tilde{\omega}} d\tilde{\omega} \\
&= Ce^{j(\alpha + \omega_0 n)} a(n+\beta)
\end{aligned}
$$

# Ryhmäviive: perusajatus 3

- Tehdään muuttujan vaihdos $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$, funktiot $2\pi$-jaksollisia joten integrointirajoja ei tarvitse muuttaa

$$y[n] = Ce^{j(\alpha - \beta\omega_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}}) e^{j(n+\beta)(\tilde{\omega}+\omega_0)} d\tilde{\omega}$$

$$= Ce^{j(\alpha-\beta\omega_0)+j(n+\beta)\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}}) e^{j\beta\tilde{\omega}} e^{jn\tilde{\omega}} d\tilde{\omega}$$

$$= Ce^{j(\alpha+\omega_0 n)} a(n+\beta) \quad \Big| \; \alpha\text{:n ja } \beta\text{:n määritelmät}$$

# Ryhmäviive: perusajatus 3

- Tehdään muuttujan vaihdos $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$, funktiot $2\pi$-jaksollisia joten integrointirajoja ei tarvitse muuttaa

$$\begin{aligned} y[n] &= Ce^{j(\alpha-\beta\omega_0)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}})e^{j(n+\beta)(\tilde{\omega}+\omega_0)}d\tilde{\omega} \\ &= Ce^{j(\alpha-\beta\omega_0)+j(n+\beta)\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}})e^{j\beta\tilde{\omega}}e^{jn\tilde{\omega}}d\tilde{\omega} \\ &= Ce^{j(\alpha+\omega_0 n)}a(n+\beta) \\ &= Ca(n+\theta'(\omega_0))e^{j(\omega_0 n+\theta(\omega_0))} \end{aligned}$$

$\alpha$:n ja $\beta$:n määritelmät

# Ryhmäviive: perusajatus 3

- Tehdään muuttujan vaihdos $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$, funktiot $2\pi$-jaksollisia joten integrointirajoja ei tarvitse muuttaa

$$
\begin{aligned}
y[n] &= Ce^{j(\alpha-\beta\omega_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}}) e^{j(n+\beta)(\tilde{\omega}+\omega_0)} d\tilde{\omega} \\
&= Ce^{j(\alpha-\beta\omega_0)+j(n+\beta)\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}}) e^{j\beta\tilde{\omega}} e^{jn\tilde{\omega}} d\tilde{\omega} \\
&= Ce^{j(\alpha+\omega_0 n)} a(n+\beta) \qquad \Big| \, \alpha\text{:n ja } \beta\text{:n määritelmät} \\
&= Ca(n+\theta'(\omega_0)) e^{j(\omega_0 n+\theta(\omega_0))} \\
&= Ca(n-\tau_g(\omega_0)) e^{j\omega_0(n-\tau_p(\omega_0))}
\end{aligned}
$$

# Ryhmäviive: perusajatus 3

- Tehdään muuttujan vaihdos $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$, funktiot $2\pi$-jaksollisia joten integrointirajoja ei tarvitse muuttaa

$$
\begin{aligned}
y[n] &= Ce^{j(\alpha - \beta\omega_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}}) e^{j(n+\beta)(\tilde{\omega}+\omega_0)} d\tilde{\omega} \\
&= Ce^{j(\alpha - \beta\omega_0) + j(n+\beta)\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\tilde{\omega}}) e^{j\beta\tilde{\omega}} e^{jn\tilde{\omega}} d\tilde{\omega} \\
&= Ce^{j(\alpha + \omega_0 n)} a(n+\beta) \qquad \Big| \alpha\text{:n ja } \beta\text{:n määritelmät} \\
&= Ca(n + \theta'(\omega_0)) e^{j(\omega_0 n + \theta(\omega_0))} \\
&= Ca(n - \tau_g(\omega_0)) e^{j\omega_0(n - \tau_p(\omega_0))}
\end{aligned}
$$

- Informaatiosignaalin viive $\tau_g(\omega_0)$, kantoaallon vaiheviive $\tau_p(\omega_0)$

# Ryhmäviive: esimerkki 1

- Viivästyspiiri $y[n] = x[n - N]$

# Ryhmäviive: esimerkki 1

- Viivästyspiiri $y[n] = x[n - N]$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N} X(e^{j\omega})$$

# Ryhmäviive: esimerkki 1

- Viivästyspiiri $y[n] = x[n-N]$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N}X(e^{j\omega}) \;\Rightarrow\; H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N}$$

# Ryhmäviive: esimerkki 1

- Viivästyspiiri $y[n] = x[n - N]$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N} X(e^{j\omega}) \;\Rightarrow\; H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = 1 \\ \theta(\omega) = -\omega N \end{cases}$$

# Ryhmäviive: esimerkki 1

- Viivästyspiiri $y[n] = x[n-N]$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N} X(e^{j\omega}) \;\Rightarrow\; H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = 1 \\ \theta(\omega) = -\omega N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_g(\omega) = N \\ \tau_p(\omega) = N \end{cases}$$

# Ryhmäviive: esimerkki 2

- Liukuva keskiarvo $y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

# Ryhmäviive: esimerkki 2

- Liukuva keskiarvo $y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k}$$

# Ryhmäviive: esimerkki 2

- Liukuva keskiarvo $y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k}$$

$$\Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}}$$

# Ryhmäviive: esimerkki 2

- Liukuva keskiarvo $y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k}$$

$$\Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{e^{-j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2}}\frac{e^{j\omega N/2}-e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}$$

# Ryhmäviive: esimerkki 2

- Liukuva keskiarvo $y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k}$$

$$\Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{e^{-j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2}}\frac{e^{j\omega N/2}-e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}$$

$$= \frac{1}{N}e^{-j\omega(N-1)/2}\frac{2j\sin(\omega N/2)}{2j\sin(\omega/2)}$$

# Ryhmäviive: esimerkki 2

- Liukuva keskiarvo $y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k}$$

$$\Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{e^{-j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2}}\frac{e^{j\omega N/2}-e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}$$

$$= \frac{1}{N}e^{-j\omega(N-1)/2}\frac{2j\sin(\omega N/2)}{2j\sin(\omega/2)}$$

$$\tau_g(\omega) = \tau_p(\omega) = \frac{N-1}{2}$$

# Ryhmäviive: LTI-järjestelmät

- Kausaali N. asteen LTI-järjestelmä

# Ryhmäviive: LTI-järjestelmät

- Kausaali N. asteen LTI-järjestelmä
- Vaihevaste on (paloittain) lineaarinen

# Ryhmäviive: LTI-järjestelmät

- Kausaali N. asteen LTI-järjestelmä
- Vaihevaste on (paloittain) lineaarinen
- Ryhmäviive on taajuudesta $\omega$ riippumaton (epäjatkuvuuskohtia lukuunottamatta)

# Seuraavalla luennolla

- Näytteistys ja spektri
- Diskreetti Fourier-muunnos DFT