



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-C5230

**Digitaalisen signaalinkäsittelyn
perusteet**

**Luento 3: Diskreettiaikaiset järjestelmät
taajuustasossa**

Luennon aiheet kirjassa

- Mitra: Digital Signal Processing: A Computer Based Approach
 - ▷ 3 Discrete-Time Signals in the Frequency Domain: 3.1-3.3, 3.8, 3.9
 - ▷ 5 Finite-Length Discrete Transforms: 5.1-5.4, 5.6, 5.7, 5.10
- Vaihtoehtoinen materiaali Rawat, Digital signal processing: 2.1-2.3, 2.13, 4, 5.1-5.8, 5.10

Oppimistavoitteet

- Jatkuva-aikainen, diskreettiaikainen ja diskreetti Fourier-muunnos ja niiden yhteydet
- Signaalin aika- ja taajuustason esitys ja Fourier-muunnokset
 - ▷ Fourier-muunnokset
 - ▷ spektri, magnitudi- ja vaihespektri
- Eri Fourier-muunnosten laskeminen määritelmästä ja taulukoista
- Fourier-muunnosten ymmärtäminen esityksenä tietyssä kannassa
- Kiertokonvoluutio ja lineaarinen konvoluutio

Sisältö

1. Jatkuva-aikaisen signaalin taajuustason esitys
2. Jatkuva-aikaisen signaalin digitaalisen käsittelyn periaatteet
3. Näytteistys ja laskostuminen taajuustasossa
4. Eri Fourier-muunnokset
5. Diskreetti Fourier-muunnos
6. Kiertokonvoluutio

Funktion esitys ja kanta

- Avaruuden piste voidaan esittää eri tavoin eri kantavektoreilla
- Myös funktio voidaan esittää eri tavoin eri “kantavektoreilla”.
- Kompleksieksponiaali muodostaa ortogonaalin kannan funktioille reaaliakselilla \Rightarrow Fourier-muunnos

Fourier-muunnos

- Jatkuva-aikainen Fourier-muunnos (engl. Continuous-time Fourier Transform, CTFT)

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

Fourier-muunnos

- Jatkuva-aikainen Fourier-muunnos (engl. Continuous-time Fourier Transform, CTFT)

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- X_a on x_a :n **Fourier-spektri** (engl. Fourier spectrum), tai lyh. spektri

Fourier-muunnos

- Jatkuva-aikainen Fourier-muunnos (engl. Continuous-time Fourier Transform, CTFT)

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- X_a on x_a :n **Fourier-spektri** (engl. Fourier spectrum), tai lyh. spektri
- Ω on kulmataajuus, $\Omega \in [-\infty, \infty]$

Fourier-muunnos

- Jatkuva-aikainen Fourier-muunnos (engl. Continuous-time Fourier Transform, CTFT)

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- X_a on x_a :n **Fourier-spektri** (engl. Fourier spectrum), tai lyh. spektri
- Ω on kulmataajuus, $\Omega \in [-\infty, \infty]$
- X_a on kompleksiarvoinen

Fourier-käänteismuunnos

- Taajuustasosta päästään aikatasoon käänteismuunnoksella

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- x_a :n voidaan ajatella olevan yhdistelmä infinitesimaalisia signaaleja $e^{j\Omega t} d\Omega$

Fourier-muunnoksen olemassaolo

- Riittävä ehto: funktio/signaali on absoluuttisesti integroituva

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)| dt < \infty$$

Fourier-muunnoksen olemassaolo

- Riittävä ehto: funktio/signaali on absoluuttisesti integroituva

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)| dt < \infty$$

- Fourier-muunnos voidaan määritellä joillekin signaaleille, jotka eivät täytä tätä ehtoa
 - ▷ e^{jat}
 - ▷ $\cos(at)$
 - ▷ ...

Magnitudi- ja vaihespektri

- Käyttämällä polaariesitystä $X_a(\Omega) = |X_a(\Omega)|e^{j\theta_a(\Omega)}$ voidaan määritellä
 - ▷ magnitudispektri $|X_a(\Omega)|$
 - ▷ vaihespektri $\theta_a(\Omega)$

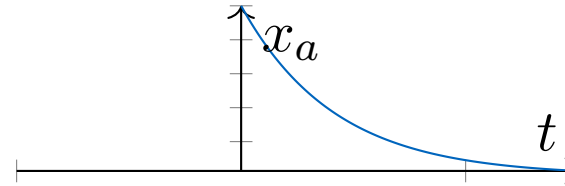
Magnitudi- ja vaihespektri

- Käyttämällä polaariesitystä $X_a(\Omega) = |X_a(\Omega)|e^{j\theta_a(\Omega)}$ voidaan määritellä
 - ▷ **magnitudispektri** $|X_a(\Omega)|$
 - ▷ **vaihespektri** $\theta_a(\Omega)$
- **energiatiheyspektri** (engl. energy density spectrum) on tyypillisesti määritelty

$$S(\Omega) = |X_a(\Omega)|^2$$

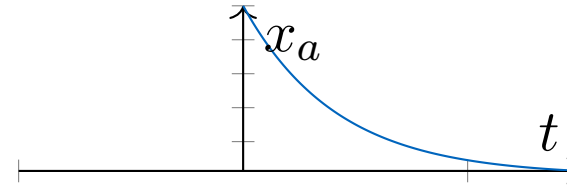
Spektri: esimerkki

$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Spektri: esimerkki

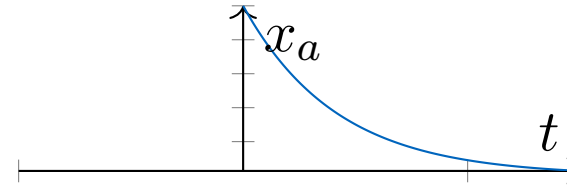
$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$X_a(\Omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t} dt$$

Spektri: esimerkki

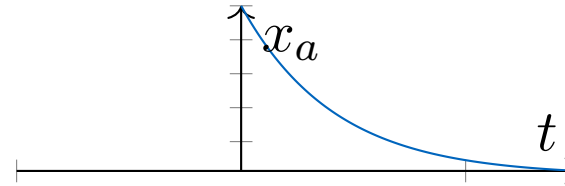
$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} X_a(\Omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{0 - 1}{-\alpha - j\Omega} \end{aligned}$$

Spektri: esimerkki

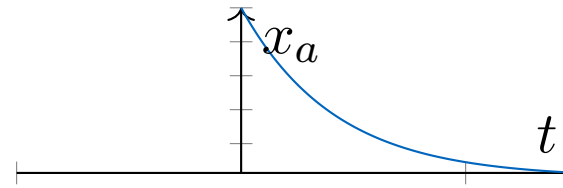
$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



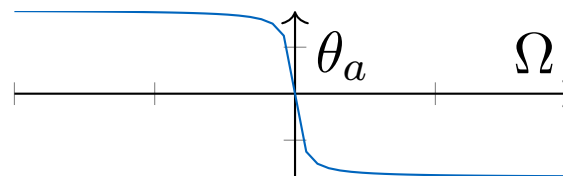
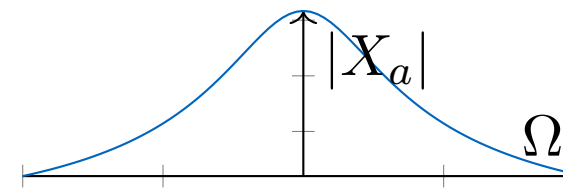
$$\begin{aligned} X_a(\Omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{0 - 1}{-\alpha - j\Omega} \\ &= \frac{1}{\alpha + j\Omega} \end{aligned}$$

Spektri: esimerkki

$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} X_a(\Omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{0 - 1}{-\alpha - j\Omega} \\ &= \frac{1}{\alpha + j\Omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}} e^{-j \arctan(\Omega/\alpha)} \end{aligned}$$



Diracin delta-funktio 1

- Otetaan funktiosta $f(t)$ Fourier-muunnos ja käänteismuunnos takaisin

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega u} d\Omega$$

Diracin delta-funktio 1

- Otetaan funktiosta $f(t)$ Fourier-muunnos ja käänteismuunnos takaisin

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega u} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt e^{j\Omega u} d\Omega$$

Diracin delta-funktio 1

- Otetaan funktiosta $f(t)$ Fourier-muunnos ja käänteismuunnos takaisin

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega u} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt e^{j\Omega u} d\Omega$$

- Oletetaan että integroinnin järjestystä voidaan vaihtaa

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} e^{j\Omega u} d\Omega f(t) dt$$

Diracin delta-funktio 1

- Otetaan funktiosta $f(t)$ Fourier-muunnos ja käänteismuunnos takaisin

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega u} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt e^{j\Omega u} d\Omega$$

- Oletetaan että integroinnin järjestystä voidaan vaihtaa

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} e^{j\Omega u} d\Omega f(t) dt$$

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega(u-t)} d\Omega f(t) dt$$

Diracin delta-funktio 1

- Otetaan funktiosta $f(t)$ Fourier-muunnos ja käänteismuunnos takaisin

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega u} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt e^{j\Omega u} d\Omega$$

- Oletetaan että integroinnin järjestystä voidaan vaihtaa

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} e^{j\Omega u} d\Omega f(t) dt$$

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega(u-t)} d\Omega}_{=\delta(u-t)} f(t) dt$$

Diracin delta-funktio 1

- Otetaan funktiosta $f(t)$ Fourier-muunnos ja käänteismuunnos takaisin

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega u} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt e^{j\Omega u} d\Omega$$

- Oletetaan että integroinnin järjestystä voidaan vaihtaa

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} e^{j\Omega u} d\Omega f(t) dt$$

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega(u-t)} d\Omega}_{=\delta(u-t)} f(t) dt$$

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-t) f(t) dt$$

Diracin delta-funktio 2

- Määritelmä

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega x} d\Omega$$

Diracin delta-funktio 2

- Määritelmä

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega x} d\Omega$$

- Kyseessä on tosiasiaassa **distribuutio**, arvo nollassa ei ole määritelty

Diracin delta-funktio 2

- Määritelmä

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega x} d\Omega$$

- Kyseessä on tosiasiaassa **distribuutio**, arvo nollassa ei ole määritelty
- Intuitiivisesti voidaan ajatella olevan äärettömän kapea ja korkea piikki, jonka pinta ala on yksi

Diracin delta-funktio 2

- Määritelmä

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega x} d\Omega$$

- Kyseessä on tosiasiaassa **distribuutio**, arvo nollassa ei ole määritelty
- Intuitiivisesti voidaan ajatella olevan äärettömän kapea ja korkea piikki, jonka pinta ala on yksi
- Tärkein ominaisuus integroinnissa:

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - t) f(t) dt$$

Diracin delta-funktio 2

- Määritelmä

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega x} d\Omega$$

- Kyseessä on tosiasiaassa **distribuutio**, arvo nollassa ei ole määritelty
- Intuitiivisesti voidaan ajatella olevan äärettömän kapea ja korkea piikki, jonka pinta ala on yksi
- Tärkein ominaisuus integroinnissa:

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - t) f(t) dt$$

tuottaa integraalista integroitavan funktion arvon pisteessä, jossa delta-funktion argumentti saa arvon nolla

Kompleksiekspontiaalin Fourier-muunnos

- Kirjoitetaan kompleksiekspontiaalille $f_a(t) = e^{j\Omega_0 t}$ muunnos

Kompleksiekspontiaalin Fourier-muunnos

- Kirjoitetaan kompleksiekspontiaalille $f_a(t) = e^{j\Omega_0 t}$ muunnos

$$F_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt$$

Kompleksiekspontiaalin Fourier-muunnos

- Kirjoitetaan kompleksiekspontiaalille $f_a(t) = e^{j\Omega_0 t}$ muunnos

$$\begin{aligned} F_a(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt \\ &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\Omega_0 - \Omega)t} dt \end{aligned}$$

Kompleksiekspontiaalin Fourier-muunnos

- Kirjoitetaan kompleksiekspontiaalille $f_a(t) = e^{j\Omega_0 t}$ muunnos

$$\begin{aligned} F_a(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt \\ &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\Omega_0 - \Omega)t} dt \\ &= 2\pi \delta(\Omega_0 - \Omega) \end{aligned}$$

Kompleksiekspontiaalin Fourier-muunnos

- Kirjoitetaan kompleksiekspontiaalille $f_a(t) = e^{j\Omega_0 t}$ muunnos

$$\begin{aligned} F_a(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt \\ &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\Omega_0 - \Omega)t} dt \\ &= 2\pi \delta(\Omega_0 - \Omega) \end{aligned}$$

- Reaaliarvoinen siniaalto $f_a(t) = \cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2}[e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}]$

$$F_a(\Omega) = \pi \delta(\Omega_0 - \Omega) + \pi \delta(\Omega_0 + \Omega)$$

Kertaus: diskreettiaikainen Fourier-muunnos

- Diskreettiaikainen Fourier-muunnos (engl. Discrete-time Fourier Transform, DTFT)
- Määritelty diskreettiaikaisille signaaleille

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Kertaus: diskreettiaikainen Fourier-muunnos

- Diskreettiaikainen Fourier-muunnos (engl. Discrete-time Fourier Transform, DTFT)
- Määritelty diskreettiaikaisille signaaleille

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- ω on normalisoitu kulmataajuus

Kertaus: diskreettiaikainen Fourier-muunnos

- Diskreettiaikainen Fourier-muunnos (engl. Discrete-time Fourier Transform, DTFT)
- Määritelty diskreettiaikaisille signaaleille

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- ω on normalisoitu kulmataajuus
- $X(e^{j\omega})$ on aina 2π -jaksollinen, tai voidaan ajatella $\omega \in [-\pi, \pi]$

Kertaus: diskreettiaikainen Fourier-muunnos

- Diskreettiaikainen Fourier-muunnos (engl. Discrete-time Fourier Transform, DTFT)
- Määritely diskreettiaikaisille signaaleille

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- ω on normalisoitu kulmataajuus
- $X(e^{j\omega})$ on aina 2π -jaksollinen, tai voidaan ajatella $\omega \in [-\pi, \pi]$
- $X(e^{j\omega})$ on tyypillisesti kompleksiarvoinen
- DTFT:n ominaisuuksia listattu Mitran kirjassa ja muissa kirjoissa

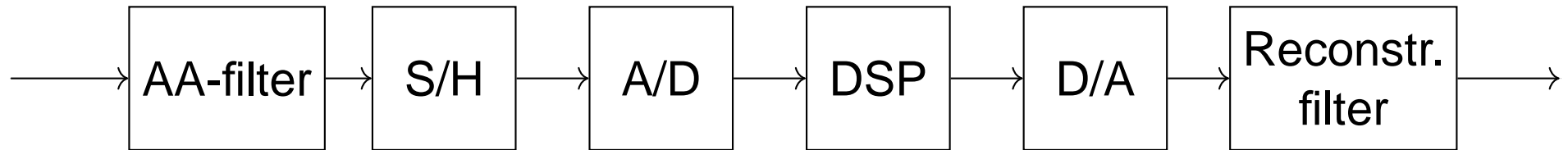
Sisältö

1. Jatkuva-aikaisen signaalin taajuustason esitys
2. Jatkuva-aikaisen signaalin digitaalisen käsittelyn periaatteet
3. Näytteistys ja laskostuminen taajuustasossa
4. Eri Fourier-muunnokset
5. Diskreetti Fourier-muunnos
6. Kiertokonvoluutio

Signaalien digitaalinen käsittely

- Monet signaalit ovat makroskooppisessa mittakaavassa analogisia
 - ▷ Ääni, valo, sähkömagn. säteily, ...
- DSP:n hyödyntämiseksi nämä signaalit muutettava ensin digitaalisiksi
- Käsittelyn jälkeen signaali halutaan usein takaisin analogiseen muotoon

DSP:n perusrakenne



- Anti-aliasing filter (laskostumisenestosuodatin)
- Sample-and-hold
- Analog-to-digital converter (ADC) (analogia–digitaali -muunnin)
- Digital Signal Processor (digitaalinen signaalinkäsittely-yksikkö)
- Digital-to-Analog converter (DAC) (digitaali–analogia -muunnin)
- Reconstruction (smoothing) filter (rekonstruktiosuodatin)

Ideaallinen järjestelmä

- Tällä kurssilla ei oteta kvantisoinnin vaikutusta
- Järjestelmän ajatellaan koostuvan ideaalisesti toimivista osista
 - ▷ ideaallinen näytteistys
 - ▷ diskreettiaikainen prosessointi
 - ▷ ideaallinen rekonstruktointi

Sisältö

1. Jatkuva-aikaisen signaalin taajuustason esitys
2. Jatkuva-aikaisen signaalin digitaalisen käsittelyn periaatteet
3. Näytteistys ja laskostuminen taajuustasossa
4. Eri Fourier-muunnokset
5. Diskreetti Fourier-muunnos
6. Kiertokonvoluutio

Ideaallinen näytteistys

- Jatkuva-aikaisesta signaalista diskreettiaikainen

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

- ▷ näytteenottoväli T
- ▷ näytteenottotaajuus $F_s = 1/T$

Ideaalinen näytteistys

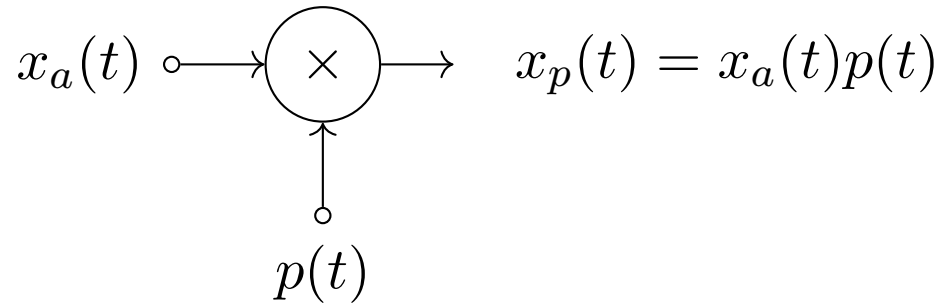
- Jatkuva-aikaisesta signaalista diskreettiaikainen

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

- ▶ näytteenottoväli T
- ▶ näytteenottotaajuus $F_s = 1/T$
- Mitä tapahtuu spektrille näytteistyksessä?

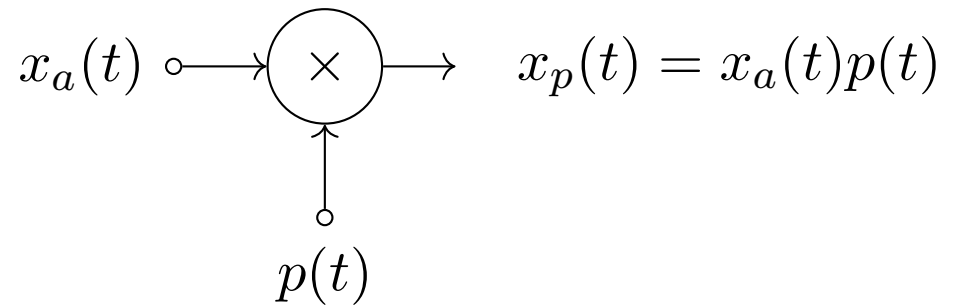
Ideaallinen näytteistysprosessi

Oletetaan ideaallinen näytteistys kertomalla analoginen signaali sarjalla delta-funktioita.

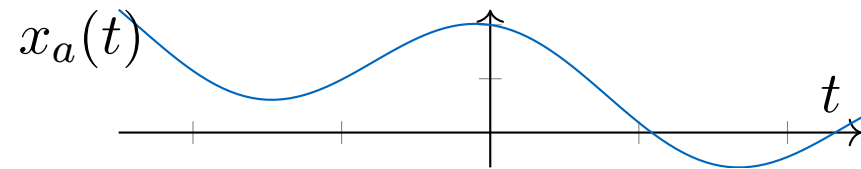


Ideaallinen näytteistysprosessi

Oletetaan ideaallinen näytteistys kertomalla analoginen signaali sarjalla delta-funktioita.

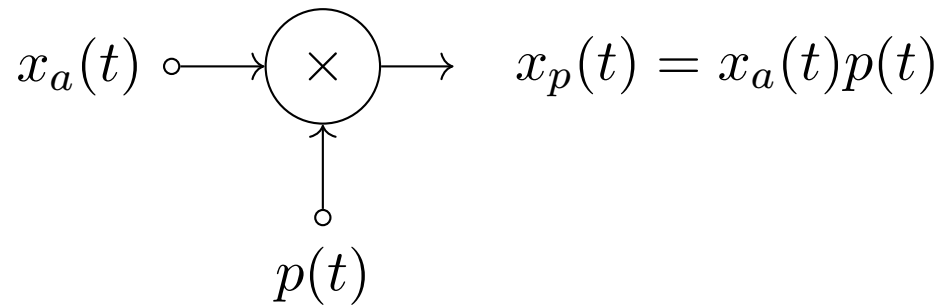


Analoginen signaali

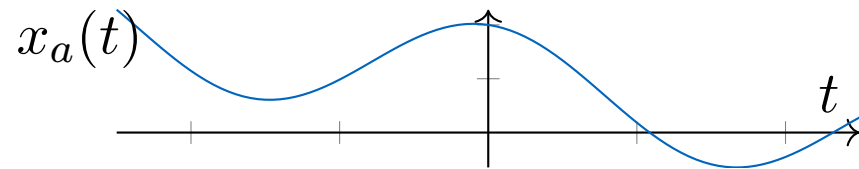


Ideaallinen näytteistysprosessi

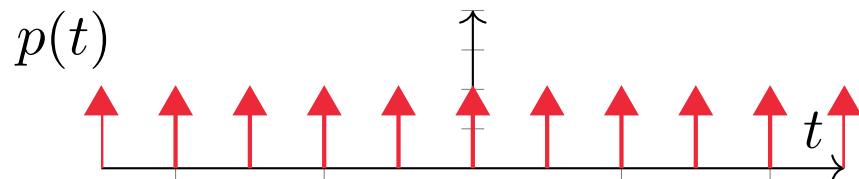
Oletetaan ideaallinen näytteistys kertomalla analoginen signaali sarjalla delta-funktioita.



Analoginen signaali

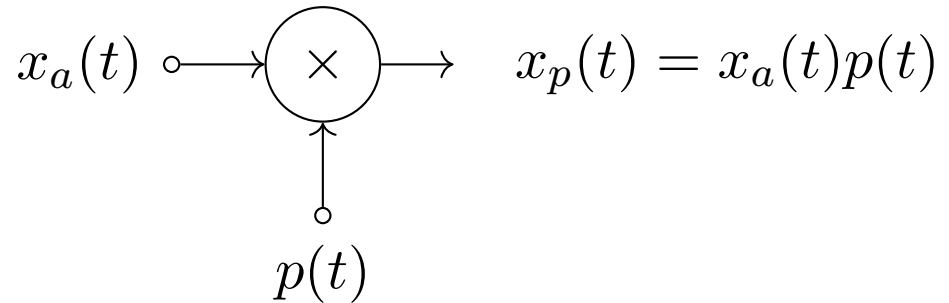


Impulssijono (engl. impulse train) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

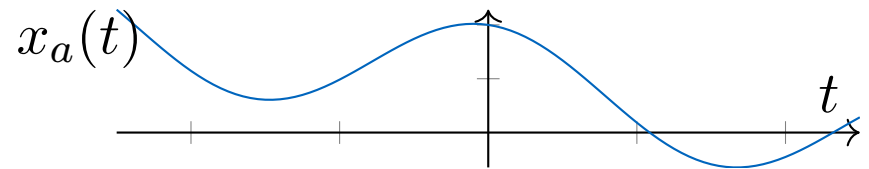


Ideaallinen näytteistysprosessi

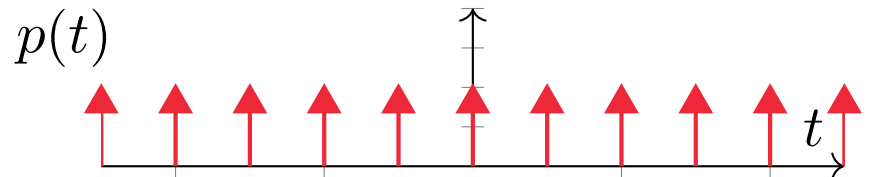
Oletetaan ideaallinen näytteistys kertomalla analoginen signaali sarjalla delta-funktioita.



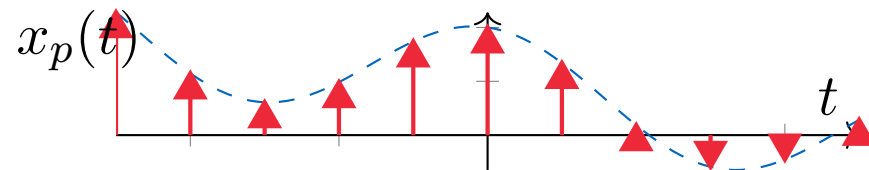
Analoginen signaali



Impulssijono (engl. impulse train) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$



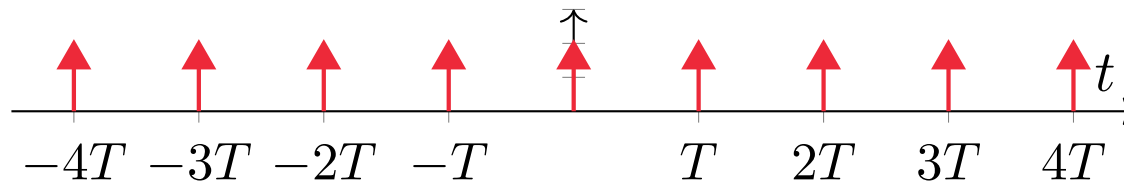
Näytteistetty signaali = painotettu impulssijono $x_p(t) = x_a(t)p(t)$



Diracin kampa

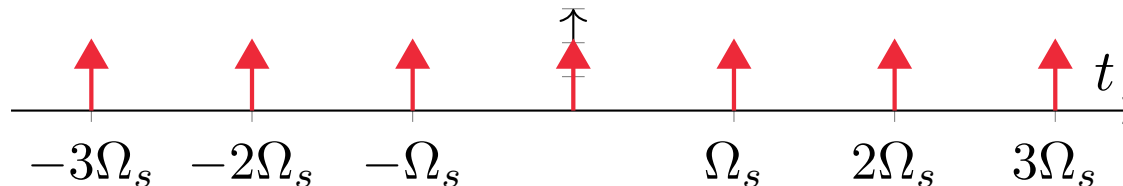
- Impulssijono toiselta nimeltä Diracin kampa (engl. Dirac comb)

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



- Jatkuva-aikainen, distribuutio kuten delta-funktio
- Fourier-muunnos (Fourier-sarjan avulla)

$$P(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$



Diracin kampa ja spektrien konvoluutio

- Konvoluutioteoreema voimassa Fourier-muunnoksille

Diracin kampa ja spektrien konvoluutio

- Konvoluutioteoreema voimassa Fourier-muunnoksille
- Tulo aikatasossa vastaa konvoluutiota taajuustasossa

$$x_p(t) = x_a(t)p(t) \xrightarrow{\text{FT}} X_p(\Omega) = X_a(\Omega) * P(\Omega)$$

Diracin kampa ja spektrien konvoluutio

- Konvoluutioteoreema voimassa Fourier-muunnoksille
- Tulo aikatasossa vastaa konvoluutiota taajuustasossa

$$x_p(t) = x_a(t)p(t) \xrightarrow{\text{FT}} X_p(\Omega) = X_a(\Omega) * P(\Omega)$$

$$X_p(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - \Psi)P(\Psi)d\Psi$$

Diracin kampa ja spektrien konvoluutio

- Konvoluutioteoreema voimassa Fourier-muunnoksille
- Tulo aikatasossa vastaa konvoluutiota taajuustasossa

$$x_p(t) = x_a(t)p(t) \xrightarrow{\text{FT}} X_p(\Omega) = X_a(\Omega) * P(\Omega)$$

$$\begin{aligned} X_p(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - \Psi) P(\Psi) d\Psi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - \Psi) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Psi - k\Omega_s) d\Psi \end{aligned}$$

Diracin kampa ja spektrien konvoluutio

- Konvoluutioteoreema voimassa Fourier-muunnoksille
- Tulo aikatasossa vastaa konvoluutiota taajuustasossa

$$x_p(t) = x_a(t)p(t) \xrightarrow{\text{FT}} X_p(\Omega) = X_a(\Omega) * P(\Omega)$$

$$\begin{aligned} X_p(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - \Psi)P(\Psi)d\Psi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - \Psi)\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Psi - k\Omega_s)d\Psi \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - \Psi)\delta(\Psi - k\Omega_s)d\Psi \end{aligned}$$

Diracin kampa ja spektrien konvoluutio

- Konvoluutioteoreema voimassa Fourier-muunnoksille
- Tulo aikatasossa vastaa konvoluutiota taajuustasossa

$$x_p(t) = x_a(t)p(t) \xrightarrow{\text{FT}} X_p(\Omega) = X_a(\Omega) * P(\Omega)$$

$$\begin{aligned} X_p(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - \Psi)P(\Psi)d\Psi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - \Psi)\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Psi - k\Omega_s)d\Psi \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - \Psi)\delta(\Psi - k\Omega_s)d\Psi \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - k\Omega_s) \end{aligned}$$

Jatkuva- ja diskreettiaikaisen signaalin spektrit

- Lasketaan $x_p(t)$:n Fourier-muunnos suoraan määritelmästä

$$X_p(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-j\Omega t} dt$$

Jatkuva- ja diskreettiaikaisen signaalin spektrit

- Lasketaan $x_p(t)$:n Fourier-muunnos suoraan määritelmästä

$$\begin{aligned} X_p(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \end{aligned}$$

Jatkuva- ja diskreettiaikaisen signaalin spektrit

- Lasketaan $x_p(t)$:n Fourier-muunnos suoraan määritelmästä

$$\begin{aligned} X_p(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \end{aligned}$$

Jatkuva- ja diskreettiaikaisen signaalin spektrit

- Lasketaan $x_p(t)$:n Fourier-muunnos suoraan määritelmästä

$$\begin{aligned} X_p(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} = X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Jatkuva- ja diskreettiaikaisen signaalin spektrit

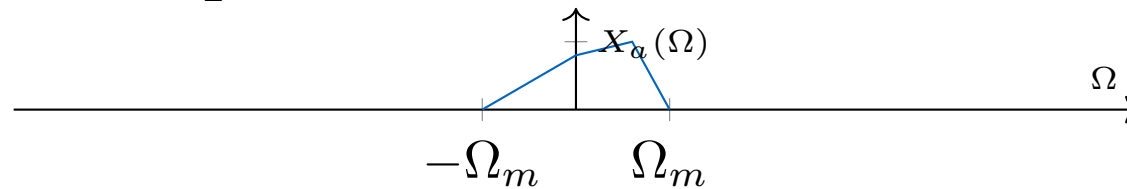
- Lasketaan $x_p(t)$:n Fourier-muunnos suoraan määritelmästä

$$\begin{aligned} X_p(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} = X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

- Diskreettiaikaisen signaalin DTFT:n ja sen analogisen vastineen FT vastaavat siis toisiaan

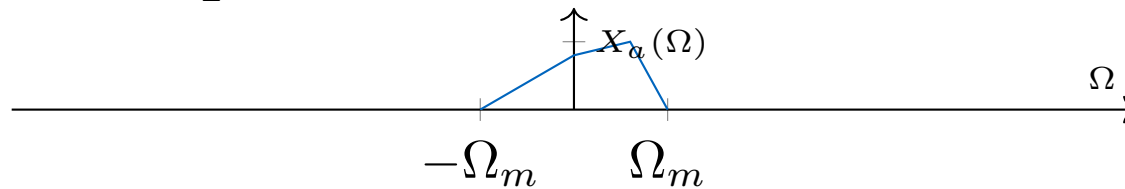
Näytteistetyn signaalin spektri, $\Omega_s > 2\Omega_m$

- Oletetaan analogisen signaalin itseisarvoltaan suurimmaksi taajuudeksi $\Omega_m < \frac{1}{2}\Omega_s$

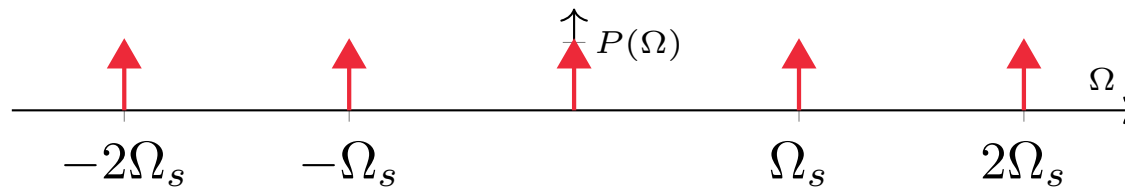


Näytteistetyn signaalin spektri, $\Omega_s > 2\Omega_m$

- Oletetaan analogisen signaalin itseisarvoltaan suurimmaksi taajuudeksi $\Omega_m < \frac{1}{2}\Omega_s$

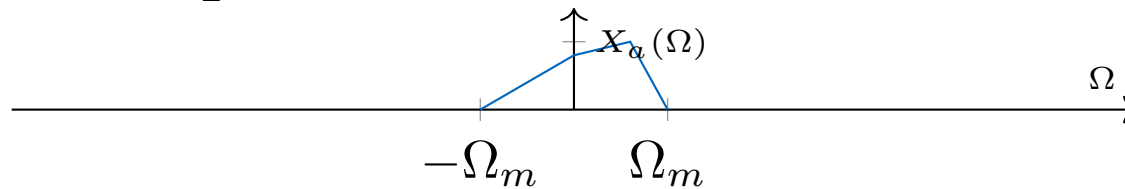


- Näytteistys

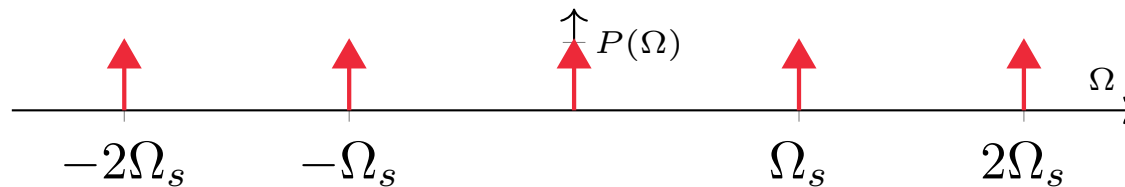


Näytteistetyn signaalin spektri, $\Omega_s > 2\Omega_m$

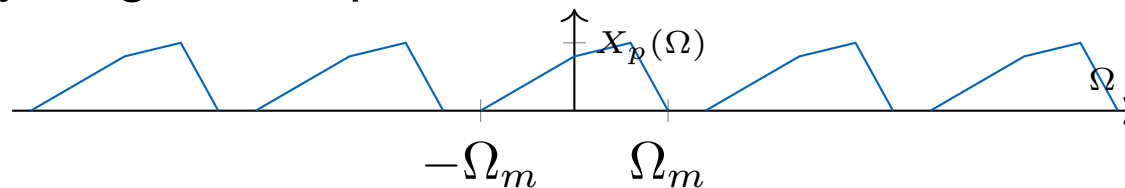
- Oletetaan analogisen signaalin itseisarvoltaan suurimmaksi taajuudeksi $\Omega_m < \frac{1}{2}\Omega_s$



- Näytteistys

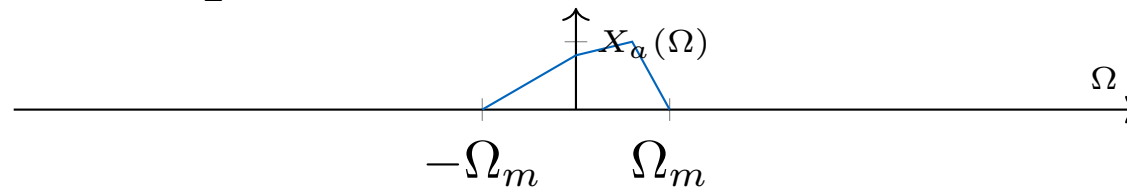


- Näytteistetyn signaalin spektri



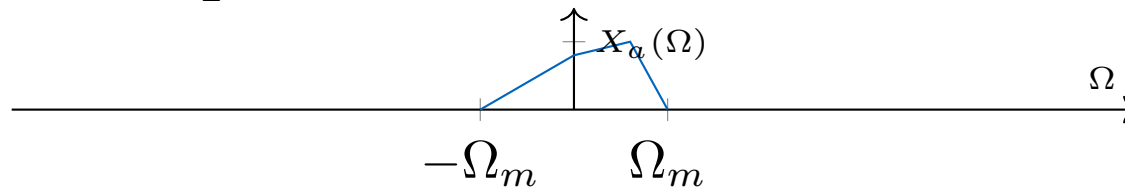
Näytteistetyn signaalin spektri, $\Omega_s = 2\Omega_m$

- Oletetaan analogisen signaalin itseisarvoltaan suurimmaksi taajuudeksi $\Omega_m = \frac{1}{2}\Omega_s$

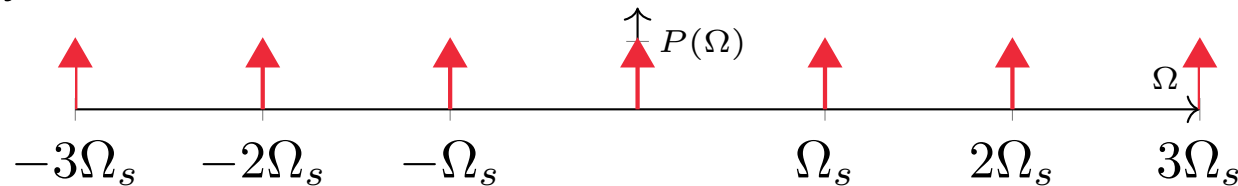


Näytteistetyn signaalin spektri, $\Omega_s = 2\Omega_m$

- Oletetaan analogisen signaalin itseisarvoltaan suurimmaksi taajuudeksi $\Omega_m = \frac{1}{2}\Omega_s$

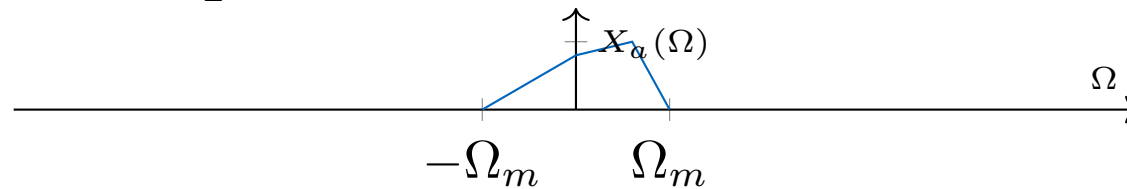


- Näytteistys

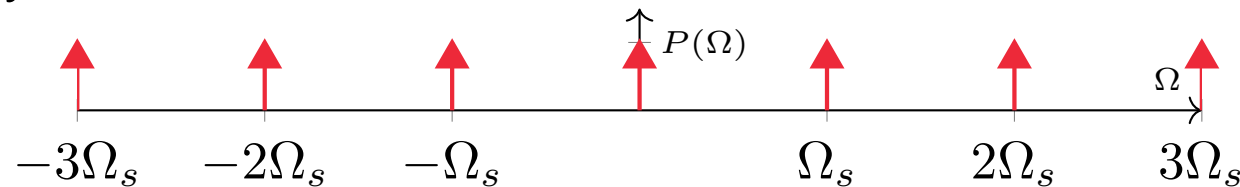


Näytteistetyn signaalin spektri, $\Omega_s = 2\Omega_m$

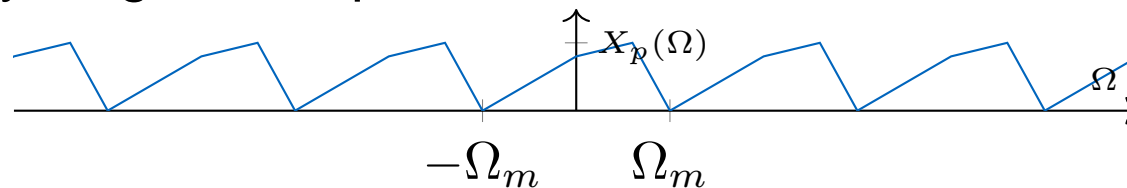
- Oletetaan analogisen signaalin itseisarvoltaan suurimmaksi taajuudeksi $\Omega_m = \frac{1}{2}\Omega_s$



- Näytteistys

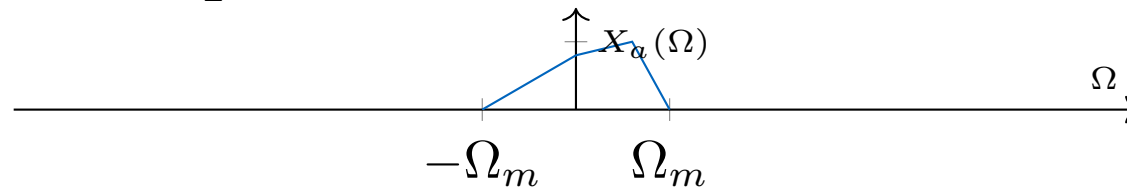


- Näytteistetyn signaalin spektri



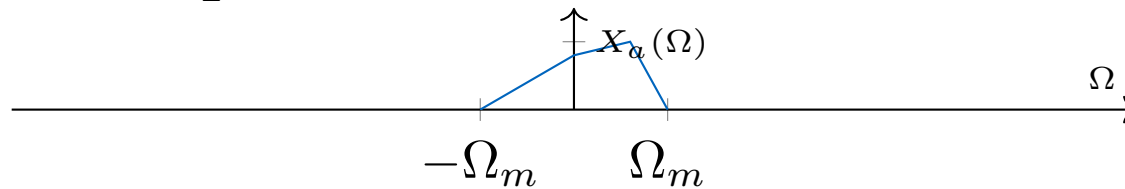
Näytteistetyn signaalin spektri, $\Omega_s < 2\Omega_m$

- Oletetaan analogisen signaalin itseisarvoltaan suurimmaksi taajuudeksi $\Omega_m > \frac{1}{2}\Omega_s$

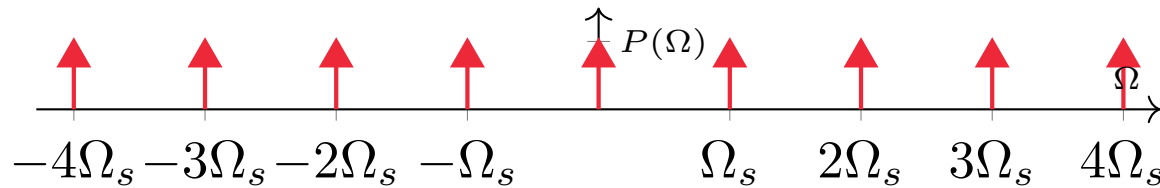


Näytteistetyn signaalin spektri, $\Omega_s < 2\Omega_m$

- Oletetaan analogisen signaalin itseisarvoltaan suurimmaksi taajuudeksi $\Omega_m > \frac{1}{2}\Omega_s$

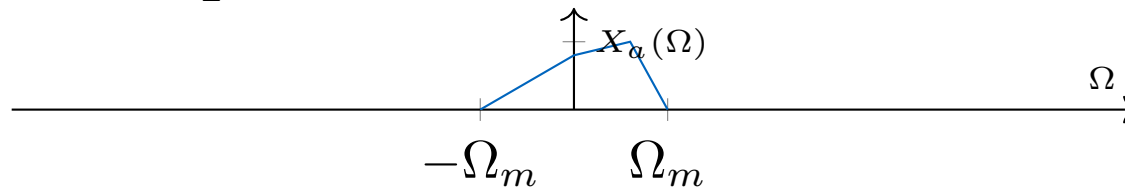


- Näytteistys

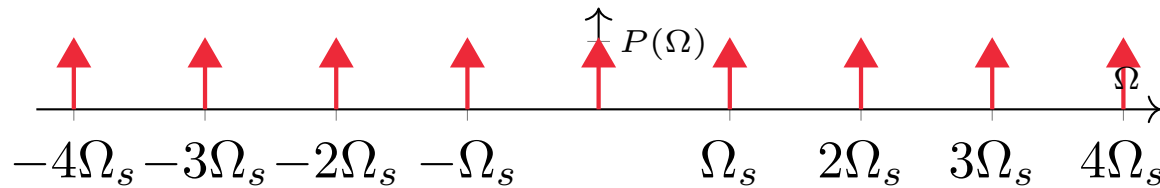


Näytteistetyn signaalin spektri, $\Omega_s < 2\Omega_m$

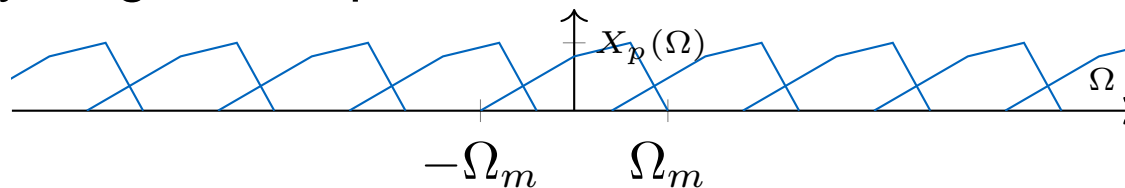
- Oletetaan analogisen signaalin itseisarvoltaan suurimmaksi taajuudeksi $\Omega_m > \frac{1}{2}\Omega_s$



- Näytteistys

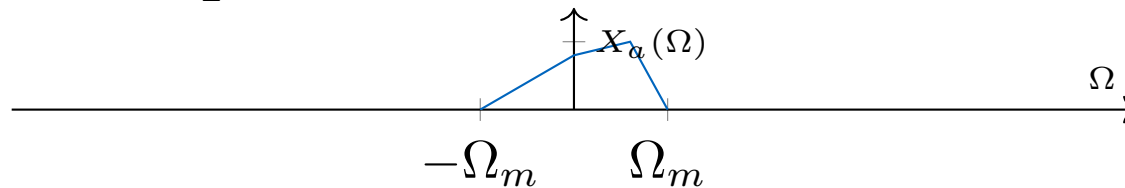


- Näytteistetyn signaalin spektri

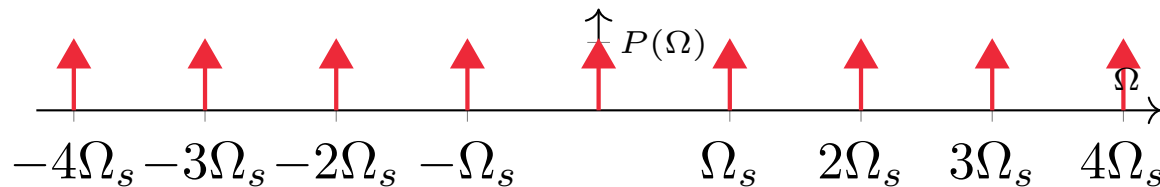


Näytteistetyn signaalin spektri, $\Omega_s < 2\Omega_m$

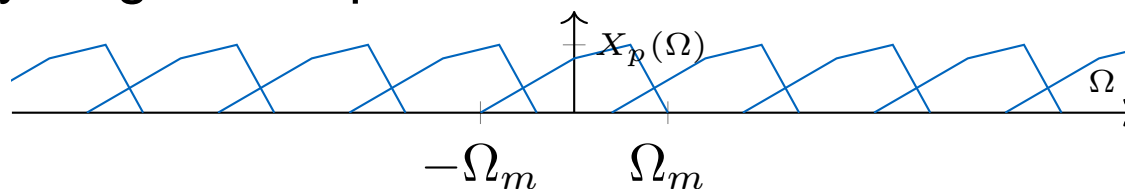
- Oletetaan analogisen signaalin itseisarvoltaan suurimmaksi taajuudeksi $\Omega_m > \frac{1}{2}\Omega_s$



- Näytteistys



- Näytteistetyn signaalin spektri



- Spektrit menevät päällekkäin, eli tapahtuu laskostumista

Näytteenottoteoreema

- Näytteenottotaajuuden on oltava vähintään kaksi kertaa signaalin suurimman taajuuskomponentin suuruinen, jotta signaali on rekonstruoitavissa näytteistä
- Nyquist-näytteenottotaajuus (engl. Nyquist rate) = $2\Omega_m$

Näytteenottoteoreema

- Näytteenottotaajuuden on oltava vähintään kaksi kertaa signaalin suurimman taajuuskomponentin suuruinen, jotta signaali on rekonstruoitavissa näytteistä
- **Nyquist-näytteenottotaajuus** (engl. Nyquist rate) = $2\Omega_m$
- Taajuudet $> \frac{1}{2}\Omega_s$ laskostuvat!
- **Nyquist-taajuus** (engl. Nyquist frequency) = $\frac{1}{2}\Omega_m$

Näytteenottooteoreema

- Näytteenottotaajuuden on oltava vähintään kaksi kertaa signaalin suurimman taajuuskomponentin suuruinen, jotta signaali on rekonstruoitavissa näytteistä
- **Nyquist-näytteenottotaajuus** (engl. Nyquist rate) = $2\Omega_m$
- Taajuudet $> \frac{1}{2}\Omega_s$ laskostuvat!
- **Nyquist-taajuus** (engl. Nyquist frequency) = $\frac{1}{2}\Omega_m$
- Nyquist-taajuus siis kertoo mikä on suurin yksikäsitteinen taajuus näytteistetyssä signaalissa

Näytteenottoteoreema

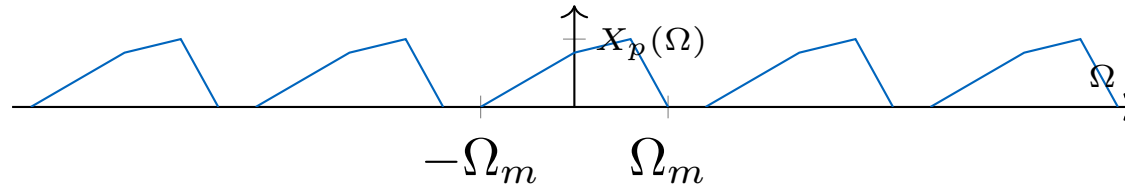
- Näytteenottotaajuuden on oltava vähintään kaksi kertaa signaalin suurimman taajuuskomponentin suuruinen, jotta signaali on rekonstruoitavissa näytteistä
- **Nyquist-näytteenottotaajuus** (engl. Nyquist rate) = $2\Omega_m$
- Taajuudet $> \frac{1}{2}\Omega_s$ laskostuvat!
- **Nyquist-taajuus** (engl. Nyquist frequency) = $\frac{1}{2}\Omega_m$
- Nyquist-taajuus siis kertoo mikä on suurin yksikäsitteinen taajuus näytteistetyssä signaalissa
- Taustaa: Harry Nyquist oli Ruotissa syntynyt, mutta Amerikkalaistunut insinööri ja tutkija Bell Telephone Laboratoriesissa

Näytteistystyytit

- Kriittinen näytteistys (engl. critical sampling) $\Omega_s = 2\Omega_m$
- Ylinäytteistys (engl. oversampling) $\Omega_s > 2\Omega_m$
- Alinäytteistys (engl. undersampling) $\Omega_s < 2\Omega_m$

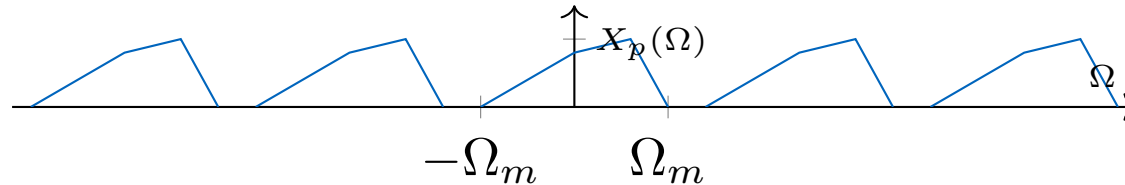
Signaalin Ideaalinen rekonstruointi

- Näytteistetyn signaalin spektri



Signaalin Ideaalinen rekonstruointi

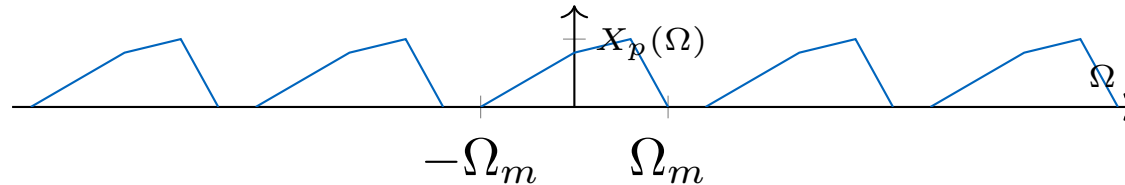
- Näytteistetyn signaalin spektri



- Haluamme pitää vain alkuperäisen osan
- Kertaus: LTI-järj \rightarrow konvoluutio impulssivasteen kanssa \rightarrow tulo taajuustasossa

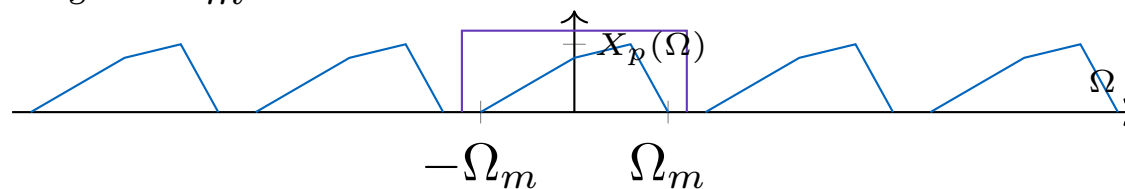
Signaalin Ideaalinen rekonstruointi

- Näytteistetyn signaalin spektri



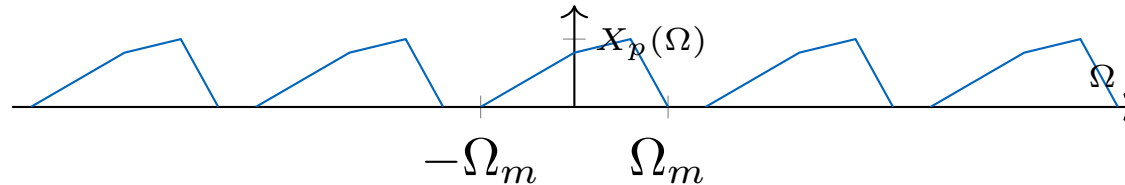
- Haluamme pitää vain alkuperäisen osan
- Kertaus: LTI-järj \rightarrow konvoluutio impulssivasteen kanssa \rightarrow tulo taajuustasossa
- Suodatin, jolla **rajataajuus** (engl. cut-off frequency)

$$\Omega_m < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_m$$

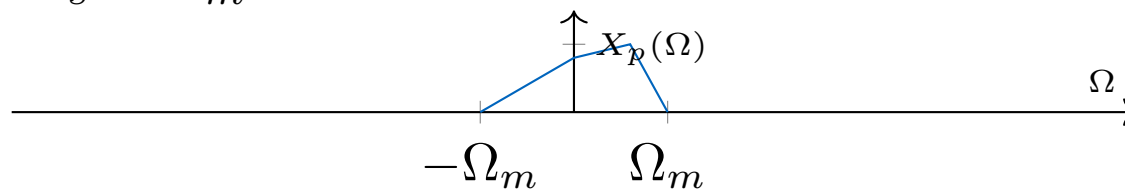


Signaalin Ideaalinen rekonstruointi

- Näytteistetyn signaalin spektri



- Haluamme pitää vain alkuperäisen osan
- Kertaus: LTI-järj \rightarrow konvoluutio impulssivasteen kanssa \rightarrow tulo taajuustasossa
- Suodatin, jolla **rajataajuus** (engl. cut-off frequency)
 $\Omega_m < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_m$



- Jäljelle jää vain alkuperäisen signaalin spektri

Ideaalinen rekonstruktiosuodatin

- Taajuustasossa ideaalinen alipäästösuodatin

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

Ideaalinen rekonstruktiosuodatin

- Taajuustasossa ideaalinen alipäästösuodatin

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

- Impulssivaste käänteismuunnoksella

$$h_r(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega t} d\Omega$$

Ideaalinen rekonstruktiosuodatin

- Taajuustasossa ideaalinen alipäästösuodatin

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

- Impulssivaste käänteismuunnoksella

$$\begin{aligned} h_r(t) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \frac{2 \sin(\Omega_c t)}{t} \quad \left| \Omega_s = \frac{2\pi}{T} \right. \end{aligned}$$

Ideaalinen rekonstruktiosuodatin

- Taajuustasossa ideaalinen alipäästösuodatin

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

- Impulssivaste käänteismuunnoksella

$$\begin{aligned} h_r(t) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \frac{2 \sin(\Omega_c t)}{t} \quad \left| \Omega_s = \frac{2\pi}{T} \right. \\ &= \frac{2\Omega_c}{\Omega_s} \frac{\sin(\Omega_c t)}{\Omega_c t} \end{aligned}$$

Ideaalinen rekonstruktiosuodatin

- Taajuustasossa ideaalinen alipäästösuodatin

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

- Impulssivaste käänteismuunnoksella

$$\begin{aligned} h_r(t) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \frac{2 \sin(\Omega_c t)}{t} \quad \left| \Omega_s = \frac{2\pi}{T} \right. \\ &= \frac{2\Omega_c}{\Omega_s} \frac{\sin(\Omega_c t)}{\Omega_c t} \end{aligned}$$

- Jos valitaan $\Omega_c = \frac{1}{2}\Omega_s \Rightarrow \Omega_c = \frac{\pi}{T}, \frac{2\Omega_c}{\Omega_s} = 1 \Rightarrow h_r(t) = \text{sinc}(t/T)$

Sisältö

1. Jatkuva-aikaisen signaalin taajuustason esitys
2. Jatkuva-aikaisen signaalin digitaalisen käsittelyn periaatteet
3. Näytteistys ja laskostuminen taajuustasossa
4. Eri Fourier-muunnokset
5. Diskreetti Fourier-muunnos
6. Kiertokonvoluutio

Kanta ja Fourier-muunnokset

- Oletetaan täydellinen kanta (engl. complete basis) vektoreita tai funktioita ϕ_k

Kanta ja Fourier-muunnokset

- Oletetaan täydellinen kanta (engl. complete basis) vektoreita tai funktioita ϕ_k
- Oletetaan sisätulo $\langle \phi_n, \phi_m \rangle$

Kanta ja Fourier-muunnokset

- Oletetaan täydellinen kanta (engl. complete basis) vektoreita tai funktioita ϕ_k
- Oletetaan sisätulo $\langle \phi_n, \phi_m \rangle$
- Kanta ortogonaalinen: $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$, kun $m \neq n$

Kanta ja Fourier-muunnokset

- Oletetaan täydellinen kanta (engl. complete basis) vektoreita tai funktioita ϕ_k
- Oletetaan sisätulo $\langle \phi_n, \phi_m \rangle$
- Kanta ortogonaalinen: $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$, kun $m \neq n$
- Funktiolle x voidaan kirjoittaa

$$X_n = \langle x, \phi_n \rangle$$

$$x = \sum_n \frac{X_n}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} \phi_n$$

(analyysi)

(synteesi)

Kanta ja Fourier-muunnokset

- Oletetaan täydellinen kanta (engl. complete basis) vektoreita tai funktioita ϕ_k
- Oletetaan sisätulo $\langle \phi_n, \phi_m \rangle$
- Kanta ortogonaalinen: $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$, kun $m \neq n$
- Funktiolle x voidaan kirjoittaa

$$X_n = \langle x, \phi_n \rangle$$

(analyysi)

$$x = \sum_n \frac{X_n}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} \phi_n$$

(synteesi)

- Jos kantafunktiojoukko on ylinumeroituva, summan paikalla integraali
 - ▷ ortogonaalisuus: $\langle \phi(t), \phi(u) \rangle = \delta(t - u)$

Normi

- Normi voidaan määritellä $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- Toisaalta tässä tapauksessa

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \langle x, x \rangle = \sum_n \sum_m \frac{X_n}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} \frac{X_m^*}{\langle \phi_m, \phi_m \rangle} \langle \phi_n, \phi_m \rangle \\ &= \sum_n \frac{X_n X_n^*}{(\langle \phi_n, \phi_n \rangle)^2} \langle \phi_n, \phi_n \rangle = \sum_n \frac{|X_n|^2}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}\end{aligned}$$

- Oletetaan $\langle \phi_n, \phi_n \rangle = C$ kaikilla n

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \frac{1}{C} \|X\|^2$$

- Fourier-muunnoksilla tätä kutsutaan Planchellin/Parsevalin teoreemaksi/lauseeksi

Fourier-sarja (FS)

- Kantafunktiot $\phi_n = \frac{1}{\Delta} e^{j2\pi nt/\Delta}$
- $\|\phi_n\|^2 = \langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta^2} \left| e^{j2\pi nt/\Delta} \right|^2 dt = \frac{1}{\Delta}$

$$X[n] = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x(t) e^{-j2\pi nt/\Delta} dt$$

$$x(t) = \sum_n \frac{X[n] e^{j2\pi nt/\Delta} / \Delta}{1/\Delta} = \sum_n X_n e^{j2\pi nt/\Delta}$$

- Parseval:

$$\sum_n |X[n]|^2 = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} |x(t)|^2 dt$$

Fourier-muunnos (FT)

- Kantafunktiot $\phi(\Omega) = e^{j\Omega t}$
- Kantafunktioiden normi ei ole määritelty
- Delta-funktion määritelmästä saadaan $\langle \phi(\Omega), \phi(\Psi) \rangle = 2\pi\delta(\Omega - \Psi)$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

- Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Diskreettiaikainen Fourier-muunnos (DTFT)

- Kantafunktiot $\phi(\omega) = e^{j\omega t}$
- $\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{j\omega t}|^2 = 2\pi$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega$$

- Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Fourier-muunnokset

	AIKATASO		TAAJUUSTASO
FS:	$\left\{ \begin{array}{l} \text{jatkuva} \\ \text{periodinen} \end{array} \right.$	\longrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{ei-periodinen} \\ \text{diskreetti} \end{array} \right.$
FT:	$\left\{ \begin{array}{l} \text{jatkuva} \\ \text{ei-periodinen} \end{array} \right.$	\longrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{ei-periodinen} \\ \text{jatkuva} \end{array} \right.$
DTFT:	$\left\{ \begin{array}{l} \text{diskreetti} \\ \text{ei-periodinen} \end{array} \right.$	\longrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{periodinen} \\ \text{jatkuva} \end{array} \right.$

Fourier-muunnokset

	AIKATASO		TAAJUUSTASO
FS:	$\begin{cases} \text{jatkuva} \\ \text{periodinen} \end{cases}$	\longrightarrow	$\begin{cases} \text{ei-periodinen} \\ \text{diskreetti} \end{cases}$
FT:	$\begin{cases} \text{jatkuva} \\ \text{ei-periodinen} \end{cases}$	\longrightarrow	$\begin{cases} \text{ei-periodinen} \\ \text{jatkuva} \end{cases}$
DTFT:	$\begin{cases} \text{diskreetti} \\ \text{ei-periodinen} \end{cases}$	\longrightarrow	$\begin{cases} \text{periodinen} \\ \text{jatkuva} \end{cases}$
DFT:	$\begin{cases} \text{diskreetti} \\ \text{periodinen} \end{cases}$	\longrightarrow	$\begin{cases} \text{periodinen} \\ \text{diskreetti} \end{cases}$

Sisältö

1. Jatkuva-aikaisen signaalin taajuustason esitys
2. Jatkuva-aikaisen signaalin digitaalisen käsittelyn periaatteet
3. Näytteistys ja laskostuminen taajuustasossa
4. Eri Fourier-muunnokset
5. Diskreetti Fourier-muunnos
6. Kiertokonvoluutio

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT) 1

- Jaksollinen sekvenssi $x[k]$, jakso N
- Kantafunktiot $\phi_n[k] = e^{j2\pi kn/N}$, $k = 1, \dots, N - 1$

$$\begin{aligned}\langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} e^{-j2\pi km/N} \\ &= \begin{cases} \frac{1 - e^{-j2\pi k(n-m)}}{1 - e^{-j2\pi k(n-m)/N}} = 0, & n \neq m \\ N, & n = m \end{cases}\end{aligned}$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT) 2

- Diskreetti Fourier-muunnos ja käänteismuunnos

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j2\pi kn/N} \quad (\text{DFT})$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{j2\pi kn/N} \quad (\text{IDFT})$$

- Parseval:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X[n]|^2$$

DFT:n matriisiesitys 1

- Merkitään $w_N = e^{-j2\pi/N}$ (-1:n N:s juuri)
- DFT:n kantafunktiot $\phi_n[k] = w_N^{kn}$

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] w_N^{kn}$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] w_N^{-kn}$$

- merkitään sekvenssiä ja sen DFT:tä vektoreilla \mathbf{x} ja \mathbf{X}

$$\mathbf{x} = [x[0] \quad x[1] \quad \dots \quad x[N-1]]^T$$

$$\mathbf{X} = [X[0] \quad X[1] \quad \dots \quad X[N-1]]^T$$

DFT:n matriisiesitys 2

- Määritellään matriisi

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \dots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \dots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

- Nyt DFT ja IDFT voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}$$

Unitaarinen DFT

- Vaihtoehtoisesti voidaan määrittää

$$\tilde{\mathbf{W}}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N$$

- $\tilde{\mathbf{W}}_N$ on unitaarinen (kompleksikonjugaattitranspoosi on käänteismatriisi)

$$\tilde{\mathbf{W}}_N^H \tilde{\mathbf{W}}_N = \left(\tilde{\mathbf{W}}_N^T \right)^* \tilde{\mathbf{W}}_N = \tilde{\mathbf{W}}_N^* \tilde{\mathbf{W}}_N = \mathbf{I}$$

- Nyt DFT ja IDFT

$$\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{W}}_N \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{W}}_N^* \tilde{\mathbf{X}}$$

$$\|\mathbf{x}\| = \|\tilde{\mathbf{X}}\|$$

DFT ja DTFT 1

- Määritellään ei-periodinen sekvenssi

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0, \dots, N - 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

- DTFT

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\hat{X}(e^{j2\pi k/N}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} = X[k]$$

DFT ja DTFT 2

- Usein on tarpeen laskea DTFT:n likiarvo
- Määritellään

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0, \dots, N - 1 \\ 0, & n = N, \dots, M - 1 \end{cases}$$

- Nähdään, että x_e :n DFT “lähestyy” DTFT:tä, kun $M \rightarrow \infty$
- Täsmällinen yhteys DFT:n ja DTFT:n välillä voidaan kirjoittaa

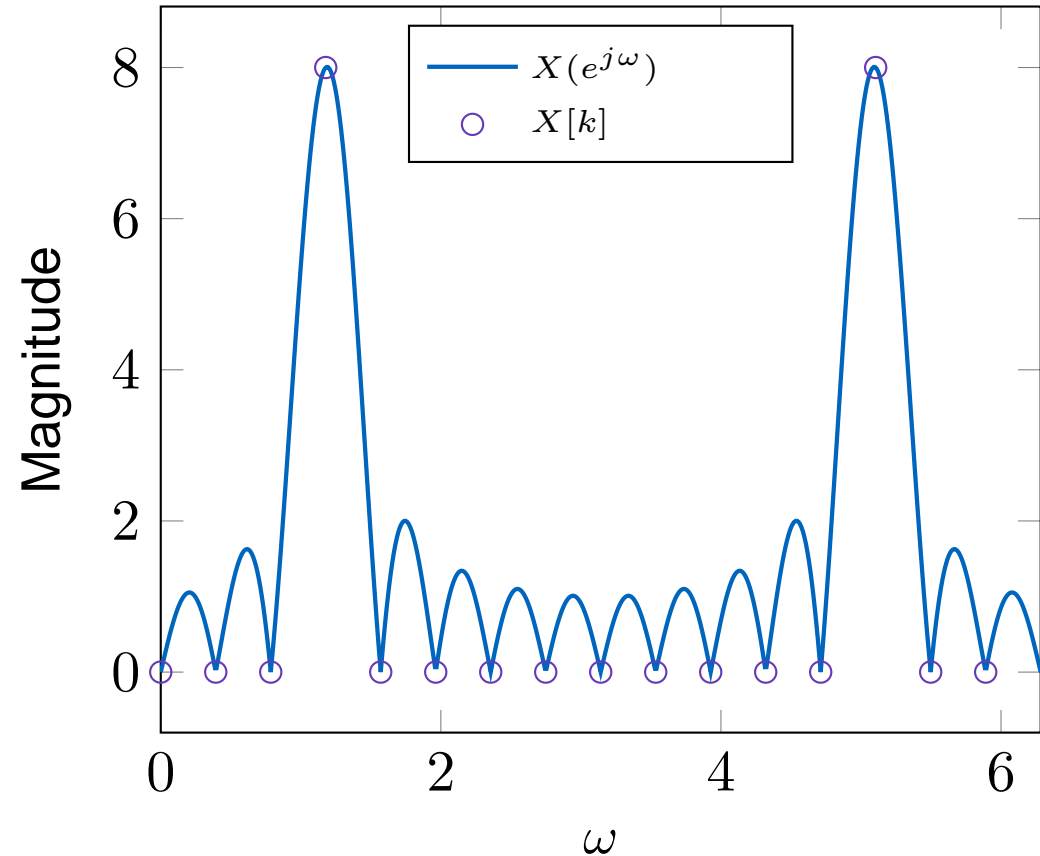
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \Phi \left(\omega - \frac{2\pi k}{N} \right),$$

missä

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2}$$

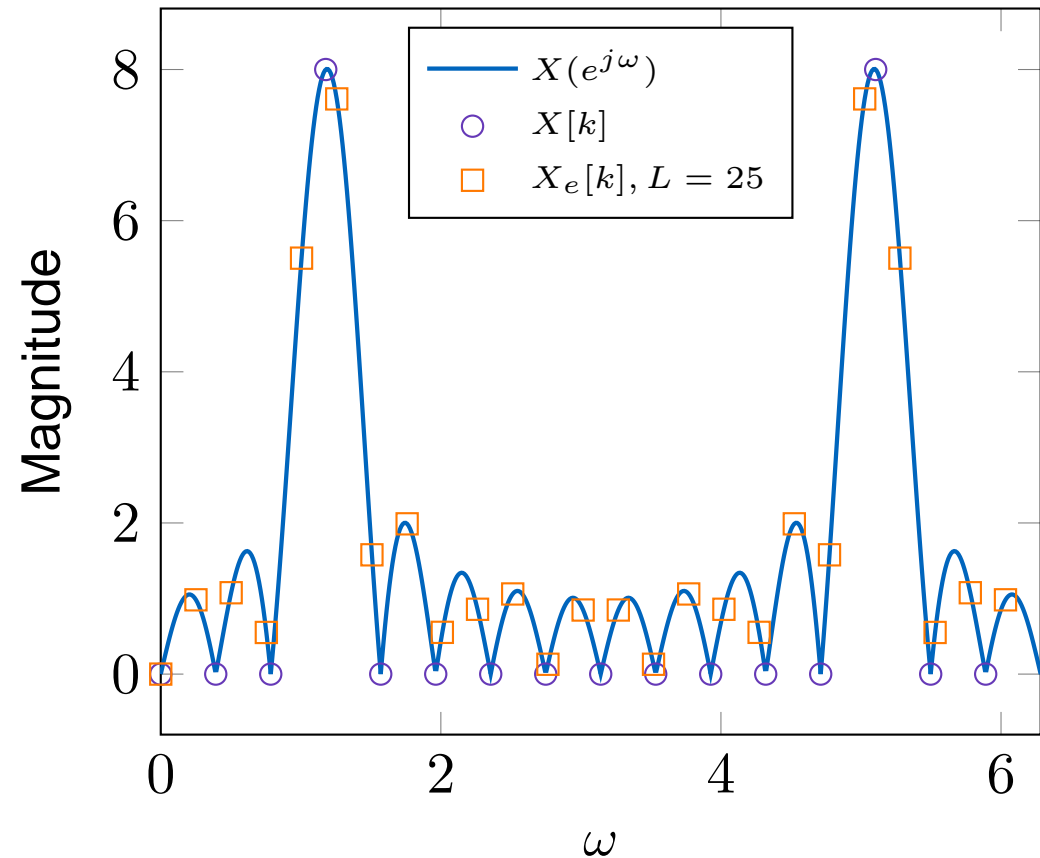
DFT esimerkki 1

- $x[n] = \cos(2\pi 3n/16)$
$$X[k] = \begin{cases} 8, & k = 3, 13 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$
- DTFT voidaan laskea määritelmästä



DFT esimerkki 1

- $x[n] = \cos(2\pi 3n/16)$
$$X[k] = \begin{cases} 8, & k = 3, 13 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$
- DTFT voidaan laskea määritelmästä

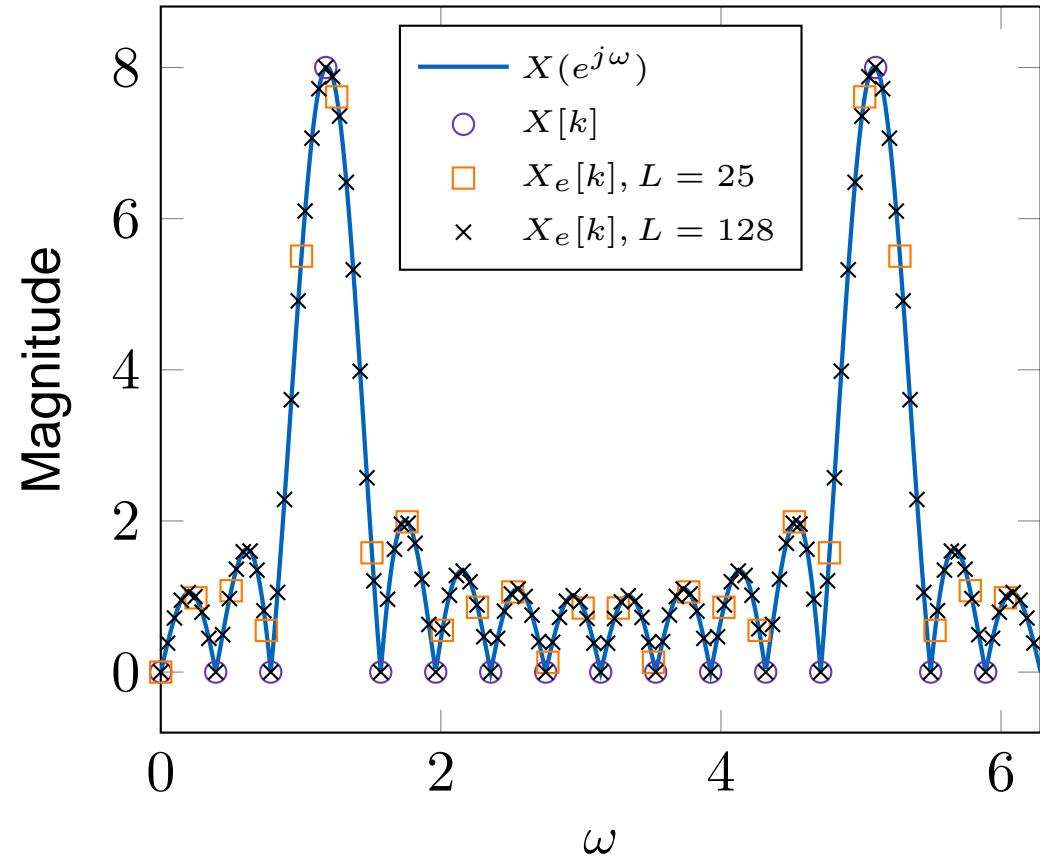


DFT esimerkki 1

- $x[n] = \cos(2\pi 3n/16)$

$$X[k] = \begin{cases} 8, & k = 3, 13 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

- DTFT voidaan laskea määritelmästä

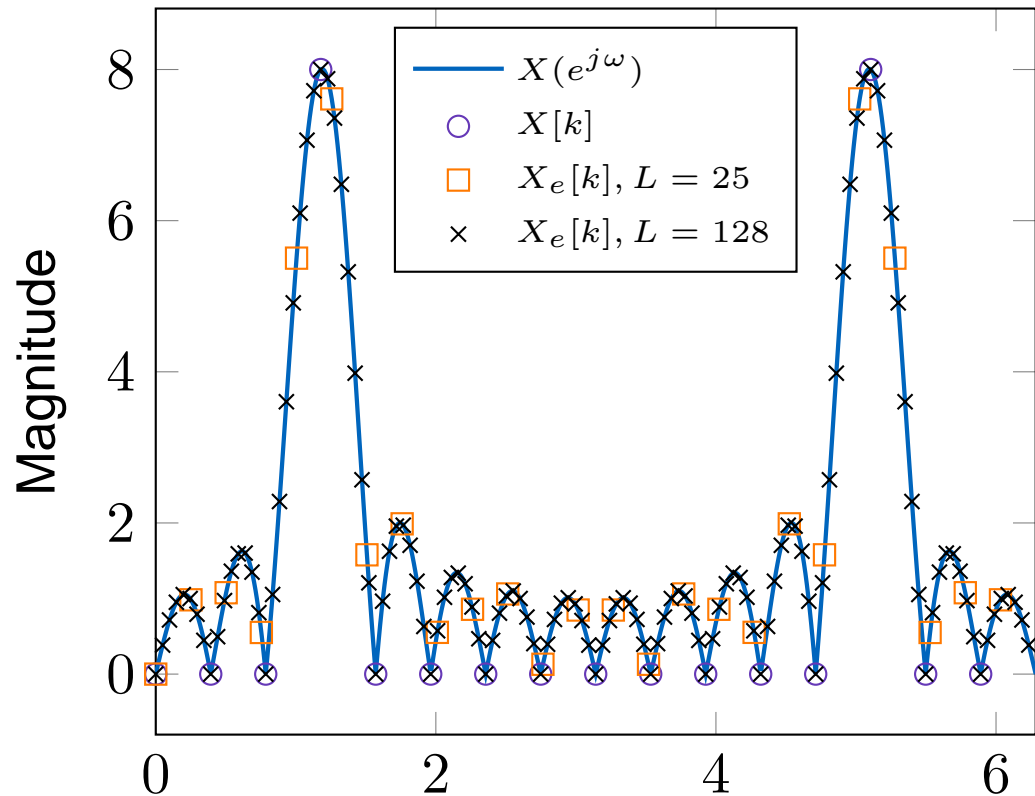


DFT esimerkki 1

- $x[n] = \cos(2\pi 3n/16)$

$$X[k] = \begin{cases} 8, & k = 3, 13 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

- DTFT voidaan laskea määritelmästä



- DFT:llä voidaan “näytteistää” DTFT:tä tasavälein ^{ω}

Sisältö

1. Jatkuva-aikaisen signaalin taajuustason esitys
2. Jatkuva-aikaisen signaalin digitaalisen käsittelyn periaatteet
3. Näytteistys ja laskostuminen taajuustasossa
4. Eri Fourier-muunnokset
5. Diskreetti Fourier-muunnos
6. [Kiertokonvoluutio](#)

DFT ja konvoluutio

- DTFT:lle on voimassa $g[n] * h[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
- DFT:lle voimassa vastaava lauseke, mutta DFT olettaa sekvenssien periodisuuden
- Periodisuutta vastaa kiertokonvoluutio (engl. circular convolution)
- Vastaavasti periodisuus otettava huomioon myös taajuus- ja aikasiirtoteoreemoissa

Modulo-operaatio

- Olkoon N positiivinen kokonaisluku ja $k \in \mathbb{Z}$

$$r = k \text{ modulo } N = \langle k \rangle_N$$
$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \text{ s.e. } r = k + mN$$

- Esimerkkejä:

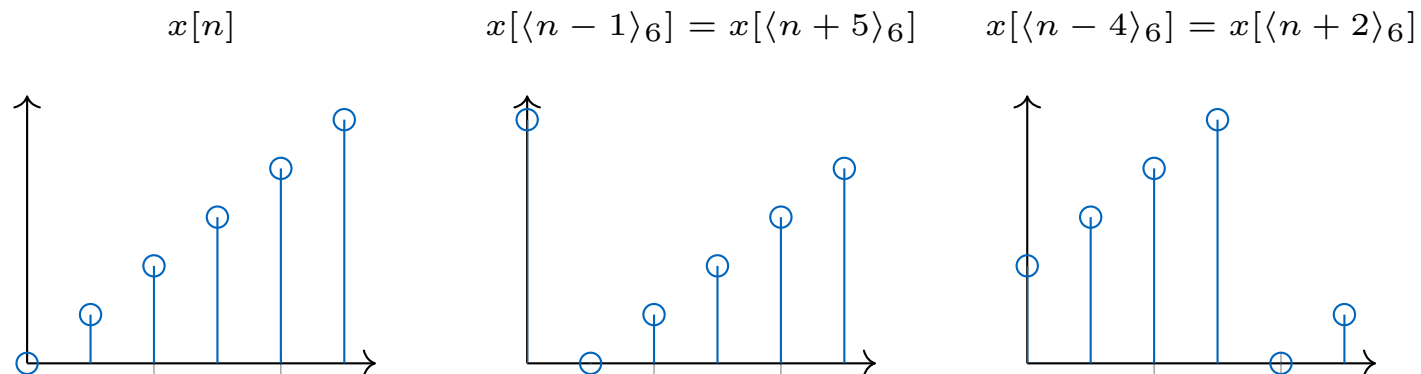
- ▷ $\langle 25 \rangle_7 = 4$ (koska $4 + 3 \times 7 = 25$)
- ▷ $\langle -13 \rangle_4 = 3$ (koska $3 - 4 \times 4 = -13$)

Syklinen siirto

- Olkoon $x[n]$:n pituus N
- Määritellään $x_c[n]$ $x[n]$:n syklisenä siirtona (engl. circular shift)

$$x_c[n] = x[\langle n - n_0 \rangle_N]$$

- $x_c[n]$:n pituus N
- Syklinen siirto vastaa periodisen sekvenssin aikasiirtoa



Kiertokonvoluutio

- Kahdelle N -pituiselle sekvenssille $g[n]$ ja $h[n]$ (lineaarinen eritavallinen) konvoluutio

$$g[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]*h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k]*h[n-k], n = 0, \dots, 2N-2$$

- Vastaavasti kiertokonvoluutio on määritelty

$$g[n] \circledast_N h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k] * h[\langle n - m \rangle_N], n = 0, \dots, N - 1$$

- Kiertokonvoluutiolle voimassa lineaarisuus, kommutatiivisuus ja assosiatiivisuus

DFT:n ominaisuuksia

Ominaisuus	Sekvenssi	DFT
lineaarisuus	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G[k] + \beta H[k]$
aikasiirto	$g[\langle n - n_0 \rangle_N]$	$w_N^{kn_0} G[k]$
taajuussiirto	$w_N^{-kn_0} g[k]$	$G[\langle k - k_0 \rangle_N]$
konvoluutio	$g[n] \otimes_N h[n]$	$G[k] H[k]$
Parsevalin teor.	$\sum_{n=0}^{N-1} g[n] h^*[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G[k] H^*[k]$

Lineaarinen konvoluutio kiertokonvoluutiolla

- Jaksot $g[n]$, $n = 0, \dots, M - 1$ ja $h[n]$, $n = 0, \dots, N - 1$
- Konvoluutio $y_L[n] = g[n] * h[n]$, $n = 0, \dots, L$, missä $L = M + N - 1$
- Toteutus kiertokonvoluutiolla
 - ▷ muodostetaan $g_e[n]$ ja $h_e[n]$ täyttämällä nolilla (engl. zero-pad) $g[n]$ ja $h[n]$ pituuteen L
 - ▷ $y_L[n] = g_e[n] \circledast_L h_e[n]$

Lineaarinen konvoluutio DFT:llä

- DFT:n laskemiseksi olemassa tehokkaita menetelmiä (FFT, Fast Fourier Transform)
- Pitkien sekvenssien konvoluutio voidaan laskea DFT:tä käyttämällä
 - ▷ muodostetaan $g_e[n]$ ja $h_e[n]$ täyttämällä nolilla (engl. zero-pad) $g[n]$ ja $h[n]$ pituuteen L
 - ▷ lasketaan $G_e[n]$ ja $H_e[n]$, ja $Y_L[k] = G_e[n]H_e[n]$
 - ▷ lasketaan käänteismuunnoksella $y_L[n]$
- Jos toisen sekvenssin pituutta ei tiedetä
 - ▷ Overlap-Add
 - ▷ Overlap-Save

Seuraavalla luennolla

- z-muunnos