Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-C5230 Digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteet

Luento 5: Z-muunnos

Luennon aiheet kirjassa

- Mitra: Digital Signal Processing: A Computer Based Approach
  - 6 z-Transform: 6.1-6.7
- Vaihtoehtoinen materiaali Rawat, Digital signal processing: 6.1-6.12

Oppimistavoitteet

- z-muunnos
  - määritelmä ja laskeminen
  - ominaisuudet
  - käänteismuunnos
- LTI-järjestelmän siirtofunktio
  - laskeminen z-muunnoksella
  - yhteys taajuusvasteeseen
- Nolla–napakuvio ja LTI-järjestelmän taajuusvaste ja stabiilius

Sisältö

1. z-muunnoksen määritelmä ja suppenemisalue
2. z-muunnoksen ominaisuudet ja käänteismuunnos
3. Nollat ja navat
4. Siirtofunktio ja suodattimet

Johdanto

- Käytetään LTI-järjestelmän impulssivaste $h[n]$
- Käytetään LTI-järjestelmän syötteenä sekvenssiä $x[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C}$

Johdanto

- Käytetään LTI-järjestelmän impulssivaste $h[n]$
- Käytetään LTI-järjestelmän syötteenä sekvenssiä $x[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C}$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k}$$

Johdanto

- Käytetään LTI-järjestelmän impulssivaste $h[n]$
- Käytetään LTI-järjestelmän syötteenä sekvenssiä $x[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C}$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k}$$

$$= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

Johdanto

- Käytetään LTI-järjestelmän impulssivaste $h[n]$
- Käytetään LTI-järjestelmän syötteenä sekvenssiä $x[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C}$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k}$$

$$= z^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}}_{\mathcal{Z}\{h[n]\}}$$

Johdanto

- Käytetään LTI-järjestelmän impulssivaste $h[n]$
- Käytetään LTI-järjestelmän syötteenä sekvenssiä $x[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C}$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k}$$

$$= z^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}}_{\mathcal{Z}\{h[n]\}}$$

- z^n on LTI-järjestelmän ominaisfunktio

Johdanto

- Käytetään LTI-järjestelmän impulssivaste $h[n]$
- Käytetään LTI-järjestelmän syötteenä sekvenssiä $x[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C}$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k}$$

$$= z^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}}_{\mathcal{Z}\{h[n]\}}$$

- z^n on LTI-järjestelmän ominaisfunktio
- $\mathcal{Z}\{h[n]\}$ on $h[n]$:n z-muunnos (engl. z-transform)

z-muunnos

- Määritelmä

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}}$$

- z on kompleksiluku

z-muunnos ja DTFT

- Valitaan $z = e^{j\omega}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

z-muunnos ja DTFT

- Valitaan $z = e^{j\omega}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

- DTFT on z-muunnos yksikköympyrällä $|z| = 1$

z-muunnos ja DTFT

- Valitaan $z = e^{j\omega}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

- DTFT on z-muunnos yksikköympyrällä $|z| = 1$
- z-muunnos on DTFT:n yleistys

z-muunnos ja DTFT

- Valitaan $z = e^{j\omega}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

- DTFT on z-muunnos yksikköympyrällä $|z| = 1$
- z-muunnos on DTFT:n yleistys
- Käytetään DTFT:lle samaa merkintätapaa $X(e^{j\omega})$ kuin z-muunnokselle

z-muunnos ja suppeneminen

- Suppenemisalue SA (engl. Region Of Convergence, ROC)

$$\boxed{\{z \mid \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \right| < \infty\}}$$

z-muunnos ja suppeneminen

- Suppenemisalue SA (engl. Region Of Convergence, ROC)

$$\boxed{\left\{z \middle| \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right| < \infty \right\}}$$

- Riittävä ehto itseisesti suppeneminen

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n]z^{-n} \right| < \infty$$

z-muunnos ja suppeneminen

- Suppenemisalue SA (engl. Region Of Convergence, ROC)

$$\boxed{\left\{z \middle| \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right| < \infty \right\}}$$

- Riittävä ehto itseisesti suppeneminen

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n]z^{-n} \right| < \infty$$

- Jatkossa tarkastelemme vain itseistä suppenemista

Suppenemisalue

- Itseisen suppenemisen perusteella suppenemisalue on rengasmainen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n}$$

Suppenemisalue

- Itseisen suppenemisen perusteella suppenemisalue on rengasmainen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n}$$

- Vertaa DTFT:een, suppenee tasaisesti, jos $x[n]$ suppenee itseisesti

Suppenemisalue: esimerkki 1

- Oletetaan $x[n] = \alpha^n$ kaikilla n

Suppenemisalue: esimerkki 1

- Oletetaan $x[n] = \alpha^n$ kaikilla n
- Itseisestä suppenemisesta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\alpha}{z} \right|^n$$

Suppenemisalue: esimerkki 1

- Oletetaan $x[n] = \alpha^n$ kaikilla n
- Itseisestä suppenemisesta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\alpha}{z} \right|^n$$

- Divergoi, kun $n \longrightarrow \pm\infty$

Suppenemisalue: esimerkki 1

- Oletetaan $x[n] = \alpha^n$ kaikilla n
- Itseisestä suppenemisesta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\alpha}{z} \right|^n$$

- Divergoi, kun $n \longrightarrow \pm\infty$
- Tässä tapauksessa z-muunnosta ei siis ole

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan kausaalinen $x[n] = \alpha^n u[n]$

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan kausaalinen $x[n] = \alpha^n u[n]$
- kausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n < 0$

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan kausaalinen $x[n] = \alpha^n u[n]$
- kausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n < 0$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

kun $|\alpha z^{-1}| < 1$

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan kausaalinen $x[n] = \alpha^n u[n]$
- kausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n < 0$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

kun $|\alpha z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |\alpha|$

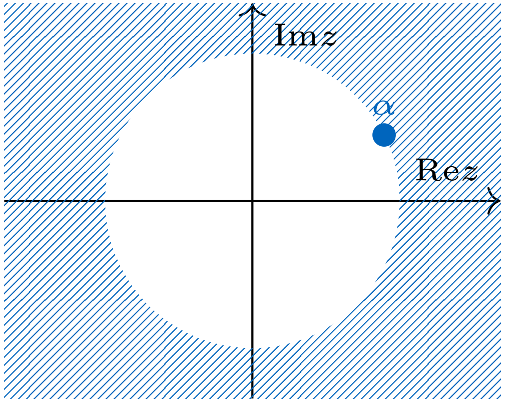
Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan kausaalinen $x[n] = \alpha^n u[n]$
- kausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n < 0$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

kun $|\alpha z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |\alpha|$

- suppenemisalue $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| > |\alpha|\}$



Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan reaaliarvoinen ja antikausaalinen $x[n] = -\alpha^n \mu[-n-1]$

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan reaaliarvoinen ja antikausaalinen $x[n] = -\alpha^n \mu[-n-1]$
- antikausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n \geq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n}$$

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan reaaliarvoinen ja antikausaalinen $x[n] = -\alpha^n \mu[-n-1]$
- antikausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n \geq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m$$

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan reaaliarvoinen ja antikausaalinen $x[n] = -\alpha^n \mu[-n-1]$
- antikausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n \geq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m$$

$$= -\frac{\alpha^{-1} z}{1 - \alpha^{-1} z}$$

kun $|\alpha^{-1} z| < 1$

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan reaaliarvoinen ja antikausaalinen $x[n] = -\alpha^n \mu[-n-1]$
- antikausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n \geq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m$$

$$= -\frac{\alpha^{-1} z}{1 - \alpha^{-1} z} = -\frac{1}{\alpha z^{-1} - 1}$$

kun $|\alpha^{-1} z| < 1$

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan reaaliarvoinen ja antikausaalinen $x[n] = -\alpha^n \mu[-n-1]$
- antikausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n \geq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m$$

$$= -\frac{\alpha^{-1} z}{1-\alpha^{-1} z} = -\frac{1}{\alpha z^{-1} - 1} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

kun $|\alpha^{-1} z| < 1$

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan reaaliarvoinen ja antikausaalinen $x[n] = -\alpha^n \mu[-n-1]$
- antikausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n \geq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m$$

$$= -\frac{\alpha^{-1} z}{1-\alpha^{-1} z} = -\frac{1}{\alpha z^{-1} - 1} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

kun $|\alpha^{-1} z| < 1 \Rightarrow |z| < \alpha$

Suppenemisalue: esimerkki 2

- Oletetaan reaaliarvoinen ja antikausaalinen $x[n] = -\alpha^n \mu[-n-1]$
- antikausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n \geq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m$$

$$= -\frac{\alpha^{-1} z}{1-\alpha^{-1} z} = -\frac{1}{\alpha z^{-1} - 1} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

kun $|\alpha^{-1} z| < 1 \Rightarrow |z| < \alpha$

- suppenemisalue $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < \alpha\}$

Suppenemisalue: esimerkki 2

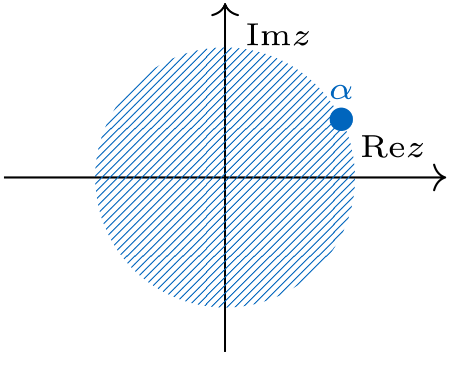
- Oletetaan reaaliarvoinen ja antikausaalinen $x[n] = -\alpha^n \mu[-n-1]$
- antikausaalinen: $x[n] = 0$ kun $n \geq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m$$

$$= -\frac{\alpha^{-1} z}{1-\alpha^{-1} z} = -\frac{1}{\alpha z^{-1} - 1} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

kun $|\alpha^{-1} z| < 1 \Rightarrow |z| < \alpha$

- suppenemisalue $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < \alpha\}$
- Saatiin sama lauseke z-muunnokselle kuin edellä, mutta eri SA!



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Suppenemisalueesta

- Äskeisillä kausaalisella ja antikausaalisella sekvenssillä on täsmälleen sama z-muuunnoksen lauseke
- Suppenemisalue erottaa sekvenssit z-tasossa toisistaan

Suppenemisalueesta

- Äskeisillä kausaalisella ja antikausaalisella sekvenssillä on täsmälleen sama z-muuunnoksen lauseke
- Suppenemisalue erottaa sekvenssit z-tasossa toisistaan
- z-muunnos on aina yhteydessä suppenemisalueeseen!

Sisältö

1. z-muunnoksen määritelmä ja suppenemisalue
2. z-muunnoksen ominaisuudet ja käänteismuunnos
3. Nollat ja navat
4. Siirtofunktio ja suodattimet

z-muunnoksen ominaisuuksia: aikasiirto

$$\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: aikasiirto

$$\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: aikasiirto

$$\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n} \qquad \Big| m = n - n_0$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: aikasiirto

$$\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0] z^{-n} \qquad \Big| m = n - n_0$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-(n+n_0)}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: aikasiirto

$$\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0] z^{-n} \qquad \Big| m = n - n_0$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-(n+n_0)}$$

$$= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-n}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: aikasiirto

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n} \qquad \Big| m = n - n_0 \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(n+n_0)} \\
&= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-n} \\
&= z^{-n_0} \mathcal{Z}\{x[n]\}
\end{aligned}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: lineaarisuus

$$\mathcal{Z}\{\alpha x[n] + \beta y[n]\}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: lineaarisuus

$$\mathcal{Z}\{\alpha x[n] + \beta y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x[n] + \beta y[n]) z^{-n}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: lineaarisuus

$$\mathcal{Z}\{\alpha x[n] + \beta y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x[n] + \beta y[n]) z^{-n}$$
$$= \alpha \mathcal{Z}\{x[n]\} + \beta \mathcal{Z}\{y[n]\}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: lineaarisuus

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\alpha x[n] + \beta y[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x[n] + \beta y[n]) z^{-n} \\ &= \alpha \mathcal{Z}\{x[n]\} + \beta \mathcal{Z}\{y[n]\}\end{aligned}$$

- Itseisen suppenemisen perusteella lin. yhdistelmä suppenee, kun molemmat $\mathcal{Z}\{x[n]\}$ ja $\mathcal{Z}\{y[n]\}$ suppenevat

z-muunnoksen ominaisuuksia: lineaarisuus

$$\mathcal{Z}\{\alpha x[n] + \beta y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x[n] + \beta y[n]) z^{-n}$$
$$= \alpha \mathcal{Z}\{x[n]\} + \beta \mathcal{Z}\{y[n]\}$$

- Itseisen suppenemisen perusteella lin. yhdistelmä suppenee, kun molemmat $\mathcal{Z}\{x[n]\}$ ja $\mathcal{Z}\{y[n]\}$ suppenevat
- Suppenemisalue ainakin $\mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y = \{z \mid \max(R_{x-}, R_{y-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{y+})\}$

z-muunnoksen ominaisuuksia: konvoluutio

$$\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]z^{-n}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: konvoluutio

$$\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]z^{-n} \qquad \Big| m = n - k$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: konvoluutio

$$\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]z^{-n} \qquad \Big| m = n - k$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[m]z^{-(n+k)}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: konvoluutio

$$\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]z^{-n} \qquad \Big| m = n - k$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[m]z^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \quad y[m]z^{-m}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: konvoluutio

$$\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]z^{-n} \qquad \Big| m = n - k$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[m]z^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \right) y[m]z^{-m}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: konvoluutio

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]z^{-n} \qquad \Big| m = n - k \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[m]z^{-(n+k)} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \right) y[m]z^{-m} = \mathcal{Z}\{x[n]\}\mathcal{Z}\{y[n]\}
\end{aligned}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: konvoluutio

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]z^{-n} \qquad \Big| m = n - k \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[m]z^{-(n+k)} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \right) y[m]z^{-m} = \mathcal{Z}\{x[n]\}\mathcal{Z}\{y[n]\}
\end{aligned}$$

- Itseisen suppenemisen perusteella suppenemisalue ainakin $\mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y$

z-muunnoksen ominaisuuksia: konvoluutio

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]z^{-n} \qquad \Big| m = n - k \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[m]z^{-(n+k)} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \right) y[m]z^{-m} = \mathcal{Z}\{x[n]\}\mathcal{Z}\{y[n]\}
\end{aligned}$$

- Itseisen suppenemisen perusteella suppenemisalue ainakin $\mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y$
- Huom! $\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} \neq \mathcal{Z}\{x[n]\} * \mathcal{Z}\{y[n]\}$

z-muunnoksen ominaisuuksia: käänteismuunnos

- Käänteismuunnos määritetään polkuintegraalina

$$\boxed{x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz}$$

- C on origon vastapäivään kiertävä polku ja kokonaan suppenemisalueella

z-muunnoksen ominaisuuksia: käänteismuunnos

- Käänteismuunnos määritetään polkuintegraalina

$$\boxed{x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz}$$

- C on origon vastapäivään kiertävä polku ja kokonaan suppenemisalueella
- Todistus residyteoreemasta

z-muunnoksen ominaisuuksia: käänteismuunnos

- Käänteismuunnos määritetään polkuintegraalina

$$\boxed{x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz}$$

- C on origon vastapäivään kiertävä polku ja kokonaan suppenemisalueella
- Todistus residyteoreemasta
- Erikoistapaus käänteis-DTFT: $z = e^{j\omega}$

z-muunnoksen ominaisuuksia: käänteismuunnos

- Käänteismuunnos määritetään polkuintegraalina

$$\boxed{x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz}$$

- C on origon vastapäivään kiertävä polku ja kokonaan suppenemisalueella
- Todistus residyteoreemasta
- Erikoistapaus käänteis-DTFT: $z = e^{j\omega} \Rightarrow dz = je^{j\omega} d\omega$

z-muunnoksen ominaisuuksia: käänteismuunnos

- Käänteismuunnos määritetään polkuintegraalina

$$\boxed{x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz}$$

- C on origon vastapäivään kiertävä polku ja kokonaan suppenemisalueella
- Todistus residyteoreemasta
- Erikoistapaus käänteis-DTFT: $z = e^{j\omega} \Rightarrow dz = je^{j\omega}d\omega$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: käänteismuunnos

- Käänteismuunnos määritetään polkuintegraalina

$$\boxed{x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz}$$

- C on origon vastapäivään kiertävä polku ja kokonaan suppenemisalueella
- Todistus residyteoreemasta
- Erikoistapaus käänteis-DTFT: $z = e^{j\omega} \Rightarrow dz = je^{j\omega} d\omega$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n - j\omega} j e^{j\omega} d\omega$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: käänteismuunnos

- Käänteismuunnos määritetään polkuintegraalina

$$\boxed{x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz}$$

- C on origon vastapäivään kiertävä polku ja kokonaan suppenemisalueella
- Todistus residyteoreemasta
- Erikoistapaus käänteis-DTFT: $z = e^{j\omega} \Rightarrow dz = je^{j\omega}d\omega$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n - j\omega}je^{j\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Käänteismuunnoksen laskeminen

- Käänteismuunnos voidaan laskea suoraan
  - parametrisoimalla polku (kuten DTFT:n tapauksessa)
  - residyteoreemaa käyttäen (engl. residue theorem)

Käänteismuunnoksen laskeminen

- Käänteismuunnos voidaan laskea suoraan
  - parametrisoimalla polku (kuten DTFT:n tapauksessa)
  - residyteoreemaa käyttäen (engl. residue theorem)
- Usein käytännössä käytetään
  - z-muunnoksen taulukoita
  - osamurtokehitelmää
  - symbolisen laskennan ohjelmistoja

z-muunnoksen ominaisuuksia: modulaatio

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: modulaatio

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n} \quad \Bigg| \; y[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dv$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: modulaatio

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n} \quad \bigg| y[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dv$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dvz^{-n}$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: modulaatio

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n} \quad \Bigg| y[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dv$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dvz^{-n}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{v}{z}\right)^n Y(v)v^{-1}dv$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: modulaatio

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n} \quad \Bigg| y[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dv$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dv z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{v}{z}\right)^n}_{=X(z/v)} Y(v)v^{-1}dv$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: modulaatio

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n} \quad \Big| y[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dv$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dv z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{v}{z}\right)^n}_{=X(z/v)} Y(v)v^{-1}dv$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z/v)Y(v)v^{-1}dv$$

z-muunnoksen ominaisuuksia: modulaatio

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n} \quad \Big| \, y[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dv$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(v)v^{n-1}dvz^{-n}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{v}{z}\right)^n}_{=X(z/v)} Y(v)v^{-1}dv$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z/v)Y(v)v^{-1}dv$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)Y(z/v)v^{-1}dv$$

Modulaatio ja suppenemisalue

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)Y(z/v)v^{-1}dv$$

- Suppenemisalue

Modulaatio ja suppenemisalue

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y(z/v)v^{-1}dv$$

- Suppenemisalue
  - $X(v)$: $R_{x-} < |v| < R_{x+}$

Modulaatio ja suppenemisalue

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)Y(z/v)v^{-1}dv$$

- Suppenemisalue
  - $X(v)$: $R_{x-} < |v| < R_{x+}$
  - $Y(v/z)$: $R_{y-} < |z/v| < R_{y+} \Rightarrow |v|R_{y-} < |z| < |v|R_{y+}$

Modulaatio ja suppenemisalue

$$\mathcal{Z}\{x[n]y[n]\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)Y(z/v)v^{-1}dv$$

- Suppenemisalue
  - $X(v)$: $R_{x-} < |v| < R_{x+}$
  - $Y(v/z)$: $R_{y-} < |z/v| < R_{y+} \Rightarrow |v|R_{y-} < |z| < |v|R_{y+}$
  - molemmat: $R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$

Yleisiä z-muunnoksia

- Yksikköimpulssi: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$

Yleisiä z-muunnoksia

- Yksikköimpulssi: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$
- Kausaalinen geometrinen sarja $\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z| > |\alpha|$

Yleisiä z-muunnoksia

- Yksikköimpulssi: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$
- Kausaalinen geometrinen sarja $\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z| > |\alpha|$
- Vaimeneva siniaalto

$$\mathcal{Z}\{r^n \cos(\omega_0 n + \phi)\mu[n]\}$$

Yleisiä z-muunnoksia

- Yksikköimpulssi: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$
- Kausaalinen geometrinen sarja $\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z| > |\alpha|$
- Vaimeneva siniaalto

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}\{r^n \cos(\omega_0 n + \phi)\mu[n]\} \\
=&\frac{1}{2}\mathcal{Z}\{r^n (e^{j\omega_0 n + j\phi} + e^{-j\omega_0 n - j\phi})\mu[n]\} \quad \Big| \alpha = re^{j\omega_0 n}
\end{aligned}$$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Yleisiä z-muunnoksia

- Yksikköimpulssi: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$
- Kausaalinen geometrinen sarja $\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z| > |\alpha|$
- Vaimeneva siniaalto

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Z}\{r^n \cos(\omega_0 n + \phi)\mu[n]\} \\
=&\frac{1}{2}\mathcal{Z}\{r^n(e^{j\omega_0 n + j\phi} + e^{-j\omega_0 n - j\phi})\mu[n]\} \quad \Big| \alpha = re^{j\omega_0 n} \\
=&\frac{e^{j\phi}}{2}\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} + \frac{e^{-j\phi}}{2}\mathcal{Z}\{(\alpha^*)^n \mu[n]\}
\end{aligned}
$$

Yleisiä z-muunnoksia

- Yksikköimpulssi: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$
- Kausaalinen geometrinen sarja $\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z| > |\alpha|$
- Vaimeneva siniaalto

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Z}\{r^n \cos(\omega_0 n + \phi)\mu[n]\} \\
=&\frac{1}{2}\mathcal{Z}\{r^n(e^{j\omega_0 n + j\phi} + e^{-j\omega_0 n - j\phi})\mu[n]\} \quad \Big| \alpha = re^{j\omega_0 n} \\
=&\frac{e^{j\phi}}{2}\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} + \frac{e^{-j\phi}}{2}\mathcal{Z}\{(\alpha^*)^n \mu[n]\} \\
=&\frac{e^{j\phi}}{2}\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{e^{-j\phi}}{2}\frac{1}{1-\alpha^* z^{-1}}
\end{aligned}
$$

Yleisiä z-muunnoksia

- Yksikköimpulssi: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$
- Kausaalinen geometrinen sarja $\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z| > |\alpha|$
- Vaimeneva siniaalto

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Z}\{r^n \cos(\omega_0 n + \phi)\mu[n]\} \\
=&\frac{1}{2}\mathcal{Z}\{r^n(e^{j\omega_0 n + j\phi} + e^{-j\omega_0 n - j\phi})\mu[n]\} \quad \Big| \alpha = re^{j\omega_0 n} \\
=&\frac{e^{j\phi}}{2}\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} + \frac{e^{-j\phi}}{2}\mathcal{Z}\{(\alpha^*)^n \mu[n]\} \\
=&\frac{e^{j\phi}}{2}\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{e^{-j\phi}}{2}\frac{1}{1-\alpha^* z^{-1}} = \dots
\end{aligned}
$$

Yleisiä z-muunnoksia

- Yksikköimpulssi: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$
- Kausaalinen geometrinen sarja $\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z| > |\alpha|$
- Vaimeneva siniaalto

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Z}\{r^n \cos(\omega_0 n + \phi)\mu[n]\} \\
=&\frac{1}{2}\mathcal{Z}\{r^n(e^{j\omega_0 n + j\phi} + e^{-j\omega_0 n - j\phi})\mu[n]\} \quad \Big| \alpha = re^{j\omega_0 n} \\
=&\frac{e^{j\phi}}{2}\mathcal{Z}\{\alpha^n \mu[n]\} + \frac{e^{-j\phi}}{2}\mathcal{Z}\{(\alpha^*)^n \mu[n]\} \\
=&\frac{e^{j\phi}}{2}\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{e^{-j\phi}}{2}\frac{1}{1-\alpha^* z^{-1}} = \dots \\
=&\frac{\cos(\phi) - r\cos(\omega_0 n - \phi)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0 n)z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r
\end{aligned}
$$

z-muunnoksen ominaisuuksia

Ominaisuus	Sekvenssi	z-muunnos	Supp. alue
	$g[n]$ $h[n]$	$G(z)$ $H(z)$	$\mathcal{R}_g : R_{g-} < \|z\| < R_{g+}$ $\mathcal{R}_h : R_{h-} < \|z\| < R_{h+}$
konjugaatio	$g^*[n]$	$G^*(z^*)$	$\mathcal{R}_g$
ajan kääntö	$g[-n]$	$G(1/z)$	$1/R_{g+} < \|z\| < 1/R_{g-}$
lineaarisuus	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G(z) + \beta H(z)$	ainakin $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_h$
aikasiirto	$g[n - n_0]$	$z^{-n_0} G[k]$	$\mathcal{R}_g$, mahdollisesti ei 0 tai ∞
exponetiaalisekvenssillä kertominen	$\alpha^n g[n]$	$G(z/a)$	$\|\alpha\| R_{g-} < \|z\| < \|\alpha\| R_{g+}$
z-muunnoksen derivointi	$n g[n]$	$-z \frac{dG(z)}{dz}$	$\mathcal{R}_g$, mahdollisesti ei 0 tai ∞
konvoluutio	$g[n] * h[n]$	$G(z)H(z)$	ainakin $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_h$
modulaatio	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C G(v)H(z/v)v^{-1}dv$	ainakin $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_h$
Parsevalin teor.	$\sum_{n=0}^{N-1} g[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y(1/v^*)v^{-1}dv$		

Sisältö

1. z-muunnoksen määritelmä ja suppenemisalue
2. z-muunnoksen ominaisuudet ja käänteismuunnos
3. Nollat ja navat
4. Siirtofunktio ja suodattimet

Kertausta: polynomit ja nollakohdat

- Algebran peruslause: polynomilla on sen asteluvun verran (mahdollisesti kompleksiarvoisia) nollakohtia eli juuria

Kertausta: polynomit ja nollakohdat

- Algebran peruslause: polynomilla on sen asteluvun verran (mahdollisesti kompleksiarvoisia) nollakohtia eli juuria
- Polynomi voidaan kirjoittaa sen juurien ξ_k avulla

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \\ &= a_0 (x - \xi_1)(x - \xi_1) \cdots (x - \xi_n) \end{aligned}$$

Kertausta: polynomit ja nollakohdat

- Algebran peruslause: polynomilla on sen asteluvun verran (mahdollisesti kompleksiarvoisia) nollakohtia eli juuria
- Polynomi voidaan kirjoittaa sen juurien ξ_k avulla

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \\
&= a_0 (x - \xi_1)(x - \xi_1) \cdots (x - \xi_n)
\end{aligned}
$$

- Reaalikertoimisen polynomin ei-reaaliset juuret esiintyvät kompleksikonjugaattipareina

$$
\begin{aligned}
p(\xi_k) = a_0 + a_1 \xi_k + a_2 \xi_k^2 + \ldots a_n \xi_k^n = 0 \qquad |()^* \\
\Rightarrow p^*(\xi_k) = a_0 + a_1 \xi_k^* + a_2 (\xi_k^*)^2 + \ldots a_n (\xi_k^*)^n = 0
\end{aligned}
$$

Nollat ja navat

- Kirjoitetaan z-muunnos rationaalifunktiona

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k}} = \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(1-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(1-\lambda_k z)} = \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(z-\lambda_k)}$$

Nollat ja navat

- Kirjoitetaan z-muunnos rationaalifunktiona

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k}} = \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(1-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(1-\lambda_k z)} = \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(z-\lambda_k)}$$

- Osoittajan juuret ξ_k ovat nollia (engl. zero), $k = 1, \ldots, M$

$$\boxed{H(\xi_k) = 0}$$

Nollat ja navat

- Kirjoitetaan z-muunnos rationaalifunktiona

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k}} = \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(1-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(1-\lambda_k z)} = \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(z-\lambda_k)}$$

- Osoittajan juuret ξ_k ovat nollia (engl. zero), $k = 1, \ldots, M$

$$\boxed{H(\xi_k) = 0}$$

- Nimittäjän juuret λ_k ovat napoja (engl. poles)

$$\boxed{H(z) \xrightarrow{z \to \lambda_k} \pm\infty}$$

Nollat ja navat

- Kirjoitetaan z-muunnos rationaalifunktiona

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k}} = \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(1-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(1-\lambda_k z)} = \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(z-\lambda_k)}$$

- Osoittajan juuret ξ_k ovat nollia (engl. zero), $k = 1, \ldots, M$

$$\boxed{H(\xi_k) = 0}$$

- Nimittäjän juuret λ_k ovat napoja (engl. poles)

$$\boxed{H(z) \xrightarrow{z \to \lambda_k} \pm\infty}$$

- Nollien ja napojen määrä kausaalisilla sekvensseillä/järj.: $\max(N, M)$

Nollat ja navat: esimerkki 1

- $h[n] = 0.8^n \mu[n]$

Nollat ja navat: esimerkki 1

- $h[n] = 0.8^n \mu[n]$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}} = z\frac{1}{z - 0.8}$$

Nollat ja navat: esimerkki 1

- $h[n] = 0.8^n \mu[n]$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}} = z\frac{1}{z - 0.8}$$

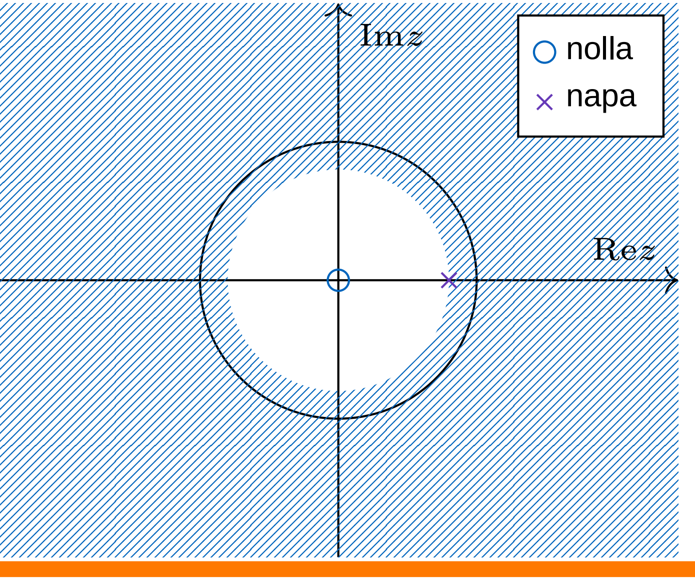
- $M = 0$, ylimääräinen nolla $z = 0$

Nollat ja navat: esimerkki 1

- $h[n] = 0.8^n \mu[n]$

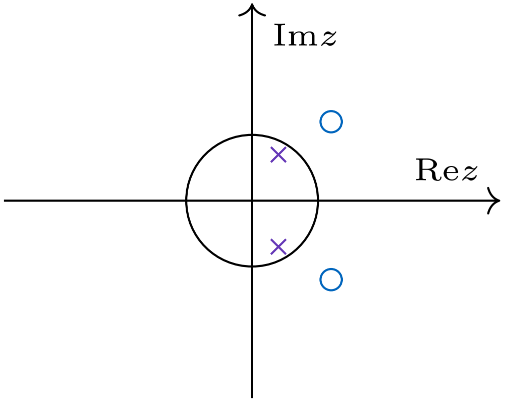
$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}} = z\frac{1}{z - 0.8}$$

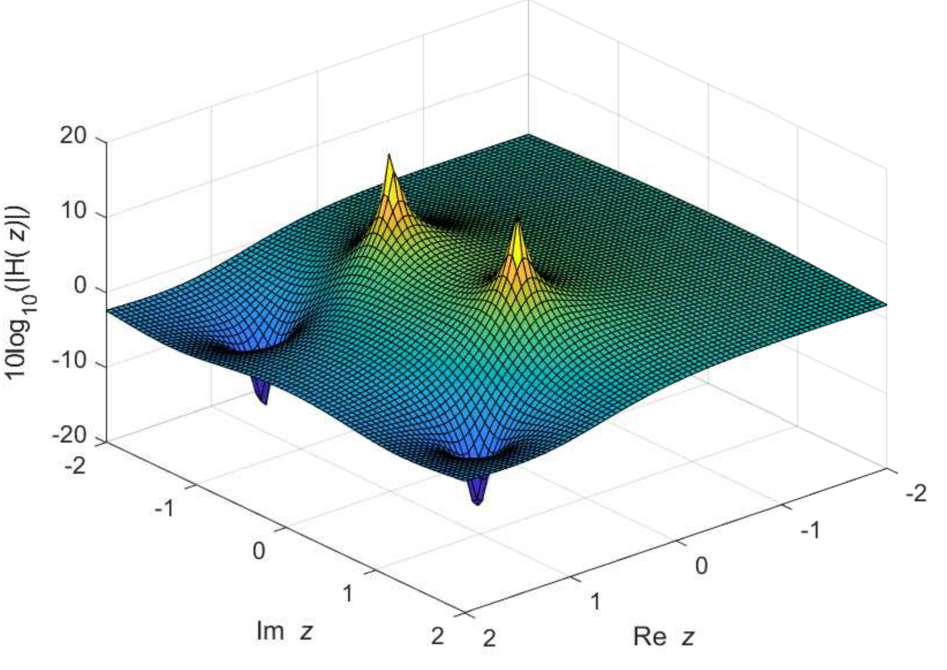
- $M = 0$, ylimääräinen nolla $z = 0$
- $N = 1$, napa $z = 0.8$



Nollat ja navat: esimerkki 2

$$H(z) = \frac{1 - 2.4z^{-1} + 2.88z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.65z^{-2}} = \frac{(z - 1.2 + j1.2)(z - 1.2 - j1.2)}{(z - 0.4 + j0.7)(z - 0.4 - j0.7)}$$





Polynomin suppenemisalue

- Oletetaan äärellisen pituinen sekvenssi $h[n] = \sum_{k=M_1}^{M_2} p_k \delta[n-k]$

Polynomin suppenemisalue

- Oletetaan äärellisen pituinen sekvenssi $h[n] = \sum_{k=M_1}^{M_2} p_k \delta[n-k]$
- z-muunnos polynomi $H(z) = \sum_{k=M_1}^{M_2} p_k z^{-k}$

Polynomin suppenemisalue

- Oletetaan äärellisen pituinen sekvenssi $h[n] = \sum_{k=M_1}^{M_2} p_k \delta[n-k]$
- z-muunnos polynomi $H(z) = \sum_{k=M_1}^{M_2} p_k z^{-k}$
- z-muunnos määritelty, $z \in \mathbb{C}$
  - $|z| > 0$ jos $M_2 > 0$

Rationaalifunktion suppenemisalue 1

- Oletetaan kausaalinen (oikeanpuoleinen) sekvenssi
- z-muunnos rationaalifuntio

$$H(z) = z^{N-M} \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M} (z - \xi_k)}{\prod_{k=0}^{N} (z - \lambda_k)}$$

Rationaalifunktion suppenemisalue 1

- Oletetaan kausaalinen (oikeanpuoleinen) sekvenssi
- z-muunnos rationaalifuntio

$$H(z) = z^{N-M} \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(z - \xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(z - \lambda_k)}$$

- Käytetää osamurtokehitelmää

$$H(z) = z^{N-M} \frac{p_0}{d_0} \left[R(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{z - \lambda_k} \right]$$

missä polynomi $R(z) \neq 0$, jos $M > N$

Rationaalifunktion suppenemisalue 1

- Oletetaan kausaalinen (oikeanpuoleinen) sekvenssi
- z-muunnos rationaalifuntio

$$H(z) = z^{N-M} \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M} (z - \xi_k)}{\prod_{k=0}^{N} (z - \lambda_k)}$$

- Käytetää osamurtokehitelmää

$$H(z) = z^{N-M} \frac{p_0}{d_0} \left[R(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{z - \lambda_k} \right]$$

missä polynomi $R(z) \neq 0$, jos $M > N$

- $R(z)$ ei vaikuta suppenemisalueeseen

Rationaalifunktion suppenemisalue 1

- Oletetaan kausaalinen (oikeanpuoleinen) sekvenssi
- z-muunnos rationaalifuntio

$$H(z) = z^{N-M} \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(z-\lambda_k)}$$

- Käytetää osamurtokehitelmää

$$H(z) = z^{N-M} \frac{p_0}{d_0} \left[R(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{z-\lambda_k} \right]$$

missä polynomi $R(z) \neq 0$, jos $M > N$

- $R(z)$ ei vaikuta suppenemisalueeseen
- Aiemman perusteella suppenemisalue on joukkojen $|z| > |\lambda_k|$ leikkaus, eli

$$\boxed{\mathcal{R} = \{z \big| |z| > \max_k |\lambda_k| \}}$$

Rationaalifunktion suppenemisalue 2

- Oletetaan anti-kausaalinen (vasemmanpuoleinen) sekvenssi

Rationaalifunktion suppenemisalue 2

- Oletetaan anti-kausaalinen (vasemmanpuoleinen) sekvenssi
- Käytetään osamurtokehitelmää

$$H'(z) = \frac{p_0}{d_0}\left[R'(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{c'_k}{z - \lambda'_k}\right]$$

Rationaalifunktion suppenemisalue 2

- Oletetaan anti-kausaalinen (vasemmanpuoleinen) sekvenssi
- Käytetään osamurtokehitelmää

$$H'(z) = \frac{p_0}{d_0}\left[R'(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{c'_k}{z - \lambda'_k}\right]$$

- Aiemman perusteella suppenemisalue on joukkojen $|z| < |\lambda'_k|$ leikkaus

Rationaalifunktion suppenemisalue 2

- Oletetaan anti-kausaalinen (vasemmanpuoleinen) sekvenssi
- Käytetään osamurtokehitelmää

$$H'(z) = \frac{p_0}{d_0} \left[R'(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{c'_k}{z - \lambda'_k} \right]$$

- Aiemman perusteella suppenemisalue on joukkojen $|z| < |\lambda'_k|$ leikkaus
- Molemminpuolinen sekvenssi voidaan jakaa kausaaliseen ja antikausaaliseen osaan, joilla navat $\lambda_{a,k}$ ja $\lambda_{c,k}$

$$h[n] = h_a[n] + h_c[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = H_a(z) + H_c(z),$$

Rationaalifunktion suppenemisalue 2

- Oletetaan anti-kausaalinen (vasemmanpuoleinen) sekvenssi
- Käytetään osamurtokehitelmää

$$H'(z) = \frac{p_0}{d_0}\left[R'(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{c'_k}{z - \lambda'_k}\right]$$

- Aiemman perusteella suppenemisalue on joukkojen $|z| < |\lambda'_k|$ leikkaus
- Molemminpuolinen sekvenssi voidaan jakaa kausaaliseen ja antikausaaliseen osaan, joilla navat $\lambda_{a,k}$ ja $\lambda_{c,k}$

$$h[n] = h_a[n] + h_c[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = H_a(z) + H_c(z),$$

- Aiemman perusteella suppenemisalue on

$$\boxed{\mathcal{R} = \{z \,|\, \max_k |\lambda_{c,k}| < |z| < \min_k |\lambda_{a,k}|\}}$$

Sisältö

1. z-muunnoksen määritelmä ja suppenemisalue
2. z-muunnoksen ominaisuudet ja käänteismuunnos
3. Nollat ja navat
4. Siirtofunktio ja suodattimet

Siirtofunktio

- ARMA-prosessin differenssiyhtälo

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k] \qquad \Big| \mathcal{Z}\{\cdot\}$$

Siirtofunktio

- ARMA-prosessin differenssiyhtälo

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k] \qquad \Big| \mathcal{Z}\{\cdot\}$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}$$

Siirtofunktio

- ARMA-prosessin differenssiyhtälo

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k] \qquad \Big| \mathcal{Z}\{\cdot\}$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}$$

$$\Rightarrow Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k}}$$

Siirtofunktio

- ARMA-prosessin differenssiyhtälo

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k] \qquad \Big| \mathcal{Z}\{\cdot\}$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}$$

$$\Rightarrow Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k}}$$

- $H(z)$ on siirtofunktio (engl. transfer function)

Siirtofunktio

- ARMA-prosessin differenssiyhtälo

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k] \qquad \Big| \mathcal{Z}\{\cdot\}$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}$$

$$\Rightarrow Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k}}$$

- $H(z)$ on siirtofunktio (engl. transfer function)
- Vertaa: taajuusvaste $H(e^{j\omega})$ on siirtofunktion erikoistapaus

Siirtofunktio ja stabiilius

- Luennolla 3 nähtiin, että LTI-järjestelmä on BIBO-stabiili, jos ja vain jos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Siirtofunktio ja stabiilius

- Luennolla 3 nähtiin, että LTI-järjestelmä on BIBO-stabiili, jos ja vain jos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

- Vastaa ehtoa, että z-muunnos suppenee, kun $|z| = 1$ (DTFT suppenee tasaisesti)

Siirtofunktio ja stabiilius

- Luennolla 3 nähtiin, että LTI-järjestelmä on BIBO-stabiili, jos ja vain jos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

- Vastaa ehtoa, että z-muunnos suppenee, kun $|z| = 1$ (DTFT suppenee tasaisesti)

$\Rightarrow$ LTI-järj. BIBO-stabiili jos ja vain jos yksikköympyrä kuuluu suppenemisalueeseen

Siirtofunktio ja stabiilius

- Luennolla 3 nähtiin, että LTI-järjestelmä on BIBO-stabiili, jos ja vain jos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

- Vastaa ehtoa, että z-muunnos suppenee, kun $|z| = 1$ (DTFT suppenee tasaisesti)

$\Rightarrow$ LTI-järj. BIBO-stabiili jos ja vain jos yksikköympyrä kuuluu suppenemisalueeseen

$\Rightarrow$ Kausaali LTI-järj. BIBO-stabiili jos ja vain kaikki navat yksikköympyrän sisäpuolella

Suodattimet ja siirtofunktio

Olemme pääasiassa kiinnostuneet seuraavista LTI-järjestelmistä:

1. FIR-tyyppiset digitaaliset suodattimet
   - siirtofunktio z^{-1}:n polynomi
2. IIR-tyyppiset digitaaliset suodattimet
   - siirtofunktio z^{-1}:n rationaalifuntio

Kausaalinen FIR-suodatin

- impulssivaste $h[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k \delta[n-k]$

Kausaalinen FIR-suodatin

- impulssivaste $h[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k \delta[n-k]$
- siirtofunktio

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k} = z^{-M} \sum_{m=0}^{M} p_{M-m} z^m$$

Kausaalinen FIR-suodatin

- impulssivaste $h[n] = \sum_{k=0}^{M} p_k \delta[n-k]$
- siirtofunktio

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k} = z^{-M} \sum_{m=0}^{M} p_{M-m} z^{m}$$

- Nollien lisäksi M napaa origossa

FIR-suodatin: esimerkki

- Liukuva keskiarvo $h[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\delta[n-k]$ (huom! nyt $M = K-1$)

FIR-suodatin: esimerkki

- Liukuva keskiarvo $h[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\delta[n-k]$ (huom! nyt $M = K-1$)
- siirtofunktio

$$H(z) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K} z^{-k} = \frac{1}{K}\frac{1-z^{-K}}{1-z^{-1}}\frac{z^k}{z^K} = \frac{1}{K}\frac{z^K-1}{z^{K-1}(z-1)}$$

FIR-suodatin: esimerkki

- Liukuva keskiarvo $h[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \delta[n-k]$ (huom! nyt $M = K-1$)
- siirtofunktio

$$H(z) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K} z^{-k} = \frac{1}{K}\frac{1-z^{-K}}{1-z^{-1}}\frac{z^k}{z^K} = \frac{1}{K}\frac{z^K-1}{z^{K-1}(z-1)}$$

- Nollat: $z^K = 1$

FIR-suodatin: esimerkki

- Liukuva keskiarvo $h[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\delta[n-k]$ (huom! nyt $M = K-1$)
- siirtofunktio

$$H(z) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K} z^{-k} = \frac{1}{K}\frac{1-z^{-K}}{1-z^{-1}}\frac{z^k}{z^K} = \frac{1}{K}\frac{z^K-1}{z^{K-1}(z-1)}$$

- Nollat: $z^K = 1 \Rightarrow \xi_k = e^{2\pi jk/K}$, $k = 0, \ldots, K-1$

FIR-suodatin: esimerkki

- Liukuva keskiarvo $h[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\delta[n-k]$ (huom! nyt $M = K-1$)
- siirtofunktio

$$H(z) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K} z^{-k} = \frac{1}{K}\frac{1-z^{-K}}{1-z^{-1}}\frac{z^k}{z^K} = \frac{1}{K}\frac{z^K-1}{z^{K-1}(z-1)}$$

- Nollat: $z^K = 1 \Rightarrow \xi_k = e^{2\pi jk/K}$, $k = 0, \ldots, K-1$
- Navat: $\lambda_0 = 1$, $\lambda_k = 0$, $k = 1, \ldots, K-1$

FIR-suodatin: esimerkki

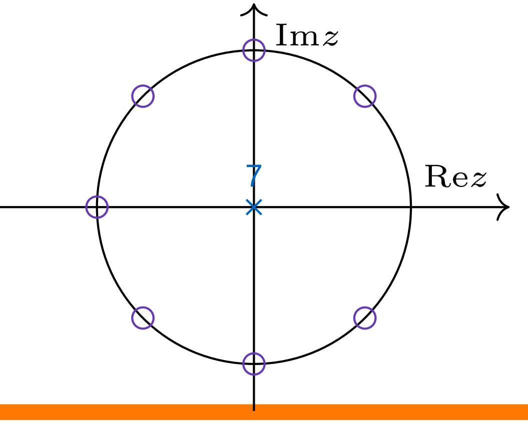
- Liukuva keskiarvo $h[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\delta[n-k]$ (huom! nyt $M = K-1$)
- siirtofunktio

$$H(z) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K} z^{-k} = \frac{1}{K}\frac{1-z^{-K}}{1-z^{-1}}\frac{z^k}{z^K} = \frac{1}{K}\frac{z^K-1}{z^{K-1}(z-1)}$$

- Nollat: $z^K = 1 \Rightarrow \xi_k = e^{2\pi jk/K}$, $k = 0,\ldots,K-1$
- Navat: $\lambda_0 = 1$, $\lambda_k = 0$, $k = 1,\ldots,K-1$
- Huom! Siirtofunktiosta supistuvat tekijät $(z-\lambda_0)$ ja $(z-\xi_0)$

$$H(z) = \frac{z^{-(K-1)}}{K}\prod_{k=1}^{K-1}(z - e^{2\pi jk/K})$$

$K = 8$



Kausaalinen IIR-suodatin

- impulssivaste $h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta[n-k]$

Kausaalinen IIR-suodatin

- impulssivaste $h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta[n-k]$
- siirtofunktio

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k}} = \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(1-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(1-\lambda_k z)} = \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(z-\lambda_k)}$$

- Suppenemisalue $|z| > \max_k |\lambda_k|$

Kausaalinen IIR-suodatin

- impulssivaste $h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta[n-k]$
- siirtofunktio

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} d_k z^{-k}} = \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(1-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(1-\lambda_k z)} = \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{p_0}{d_0} \frac{\prod_{k=0}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{k=0}^{N}(z-\lambda_k)}$$

- Suppenemisalue $|z| > \max_k |\lambda_k|$
- Stabiili jos $\max_k |\lambda_k| < 1$

Kausaalinen IIR-suodatin: esimerkki

- differenssiyhtälö $y[n] = x[n-1]-1.2x[n-2]+x[n-3]+1.3y[n-1]-1.04y[n-2]+0.222y[n-3]$

Kausaalinen IIR-suodatin: esimerkki

- differenssiyhtälö $y[n] = x[n-1] - 1.2x[n-2] + x[n-3] + 1.3y[n-1] - 1.04y[n-2] + 0.222y[n-3]$
- siirtofunktio $H(z)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1z^{-1} - 1.2z^{-2} + 1z^{-3}}{1 - 1.3z^{-1} + 1.04z^{-2} - 0.222z^{-3}} \\
&= \frac{1z^{2} - 1.2z + 1}{z^{3} - 1.3z^{2} + 1.04z - 0.222} \\
&= \frac{(z - 0.6 - j0.8)(z - 0.6 + j0.8)}{(z - 0.3)(z - 0.5 - j0.7)(z - 0.5 + j0.7)}
\end{aligned}
$$

Kausaalinen IIR-suodatin: esimerkki

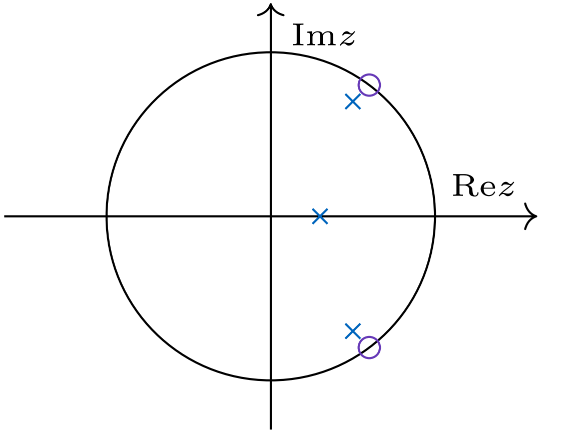
- differenssiyhtälö $y[n] = x[n-1]-1.2x[n-2]+x[n-3]+1.3y[n-1]-1.04y[n-2]+0.222y[n-3]$

- siirtofunktio $H(z)$

$$=\frac{1z^{-1}-1.2z^{-2}+1z^{-3}}{1-1.3z^{-1}+1.04z^{-2}-0.222z^{-3}}$$

$$=\frac{1z^{2}-1.2z+1}{z^{3}-1.3z^{2}+1.04z-0.222}$$

$$=\frac{(z-0.6-j0.8)(z-0.6+j0.8)}{(z-0.3)(z-0.5-j0.7)(z-0.5+j0.7)}$$



Impulssivaste, siirtofunktio sekä nollat ja navat

- Impulssivaste, siirtofunktio sekä nollat ja navat jokainen itsesään määrää järjestelmän (kausaalisuuden lisäksi)

Impulssivaste, siirtofunktio sekä nollat ja navat

- Impulssivaste, siirtofunktio sekä nollat ja navat jokainen itsesään määrää järjestelmän (kausaalisuuden lisäksi)
- Impulssivaste $\rightarrow$ siirtofunktio $\rightarrow$ nollat ja navat
  - z-muunnos
  - osoittajan ja nimittäjän nollakohtien ratkaisu

Impulssivaste, siirtofunktio sekä nollat ja navat

- Impulssivaste, siirtofunktio sekä nollat ja navat jokainen itsesään määrää järjestelmän (kausaalisuuden lisäksi)
- Impulssivaste $\rightarrow$ siirtofunktio $\rightarrow$ nollat ja navat
  - z-muunnos
  - osoittajan ja nimittäjän nollakohtien ratkaisu
- Nollat ja navat $\rightarrow$ siirtofunktio $\rightarrow$ impulssivaste
  - nollien ja napojen sijoitus ja sievennys
  - z-käänteismuunnos

Nollat ja navat sekä magnitudivaste

- Magnitudivasteen määritelmästä

$$|H(e^{j\omega})| = |e^{j\omega}|^{N-M} \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{M} \left| e^{j\omega} - \xi_k \right|}{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - \lambda_k \right|}$$

Nollat ja navat sekä magnitudivaste

- Magnitudivasteen määritelmästä

$$|H(e^{j\omega})| = |e^{j\omega}|^{N-M} \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{M} \left| e^{j\omega} - \xi_k \right|}{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - \lambda_k \right|}$$

$$\propto \frac{\prod_{k=0}^{M} \text{pisteen } e^{j\omega} \text{ etäisyys nollasta } \xi_k}{\prod_{k=0}^{N} \text{pisteen } e^{j\omega} \text{ etäisyys navasta } \lambda_k}$$

Nollat ja navat sekä magnitudivaste

- Magnitudivasteen määritelmästä

$$|H(e^{j\omega})| = |e^{j\omega}|^{N-M} \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{M} \left|e^{j\omega} - \xi_k\right|}{\prod_{k=0}^{N} \left|e^{j\omega} - \lambda_k\right|}$$

$$\propto \frac{\prod_{k=0}^{M} \text{pisteen } e^{j\omega} \text{ etäisyys nollasta } \xi_k}{\prod_{k=0}^{N} \text{pisteen } e^{j\omega} \text{ etäisyys navasta } \lambda_k}$$

- Lähellä nollia ja kaukana navoista $\Rightarrow$ magnitudivaste pieni

Nollat ja navat sekä magnitudivaste

- Magnitudivasteen määritelmästä

$$|H(e^{j\omega})| = |e^{j\omega}|^{N-M} \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{M} \left|e^{j\omega} - \xi_k\right|}{\prod_{k=0}^{N} \left|e^{j\omega} - \lambda_k\right|}$$

$$\propto \frac{\prod_{k=0}^{M} \text{pisteen } e^{j\omega} \text{ etäisyys nollasta } \xi_k}{\prod_{k=0}^{N} \text{pisteen } e^{j\omega} \text{ etäisyys navasta } \lambda_k}$$

- Lähellä nollia ja kaukana navoista $\Rightarrow$ magnitudivaste pieni
- kaukana nollista ja lähellä napoja $\Rightarrow$ magnitudivaste suuri

Seuraava luento

- Aiheet
  - Suodattimet ja niiden suunnittelu
- Aikataulu
  - Ensi viikolla ei luentoa eikä harjoituksia
  - Arviointiviikolla ylimääräiset laskuharjoitukset