Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

# ELEC-C5230 Digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteet

## Luento 6: Suodatintyypit, ideaaliset ja yksinkertaiset suodattimet

# Ilmoitusasiat

- 2. laskareiden palautus torstaille 22.4.
- Muiden laskareiden palautuspäivä ei muutu
- Rästikierros kurssin lopuksi
    - mahdollisuus palauttaa pakollisia tai muita tehtäviä (arvosanan nostamiseksi)
    - palautetuista tehtävistä vähemmän pisteitä

# Luennon aiheet kirjassa

- Mitra: Digital Signal Processing: A Computer Based Approach
  - 7 LTI Discrete-Time Systems in the Transform Domain: 7.1 - 7.4
- Vaihtoehtoinen materiaali Rawat, Digital signal processing: 7.1-7.8, 7.11, 7.13

# Oppimistavoitteet

- Eri suodatintyypit ja ideaaliset suodattimet
  - alipäästö
  - ylipäästö
  - kaistanpäästö
  - kaistanesto
  - kaikenpäästö
- Kaikenpäästösuodattimen rakenne ja merkitys
- Lineaarinen vaihevaste ja sen edellytykset
- Maksimi- ja minimivaiheinen suodatin
- Yksinkertaisten suodatinten suunnittelu

# Johdanto

- Suodattimia voidaan luokitella
  - rakenteen mukaan: rekursiivinen, ei-rekursiivinen
  - impulssivasteen mukaan: FIR, IIR
- Luokittelu siirtofunktion/taajuusvasteen perusteella
  - magnitudivasteen muoto
  - vaihevasteen lineaarisuus ja muut ominaisuudet

# Sisältö

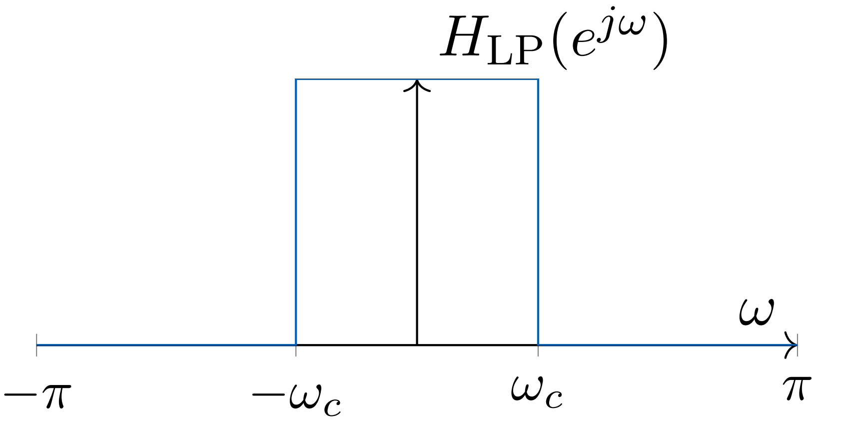
1. Ideaaliset suodattimet
2. Kaikenpäästösuodatin
3. Lineaarinen vaihevaste
4. Yksinkertaiset FIR- ja IIR-suodattimet

# Ideaalinen suodatin

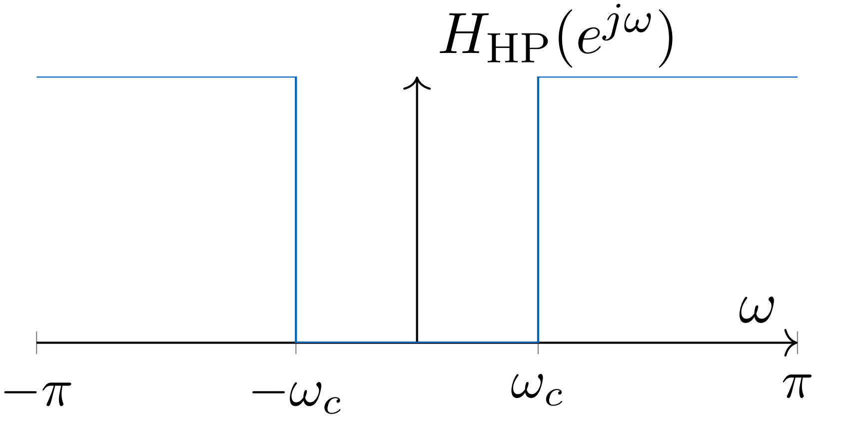
- Taajuusvaste voidaan jakaa
  - päästökaistaan (engl. passband): $H(e^{j\omega}) = 1$
  - estokaistaan (engl. stopband): $H(e^{j\omega}) = 0$
- Ideaalisesti vaihevaste nolla

# Ideaaliset suodattimet 1

Alipäästösuodatin
(engl. low-pass filter):
päästökaista $0 \leq \omega \leq \omega_c$
estokaista $\omega_c < \omega \leq \pi$




Ylipäästösuodatin
(engl. high-pass filter):
päästökaista $\omega_c < \omega \leq \pi$
estokaista $0 \leq \omega \leq \omega_c$



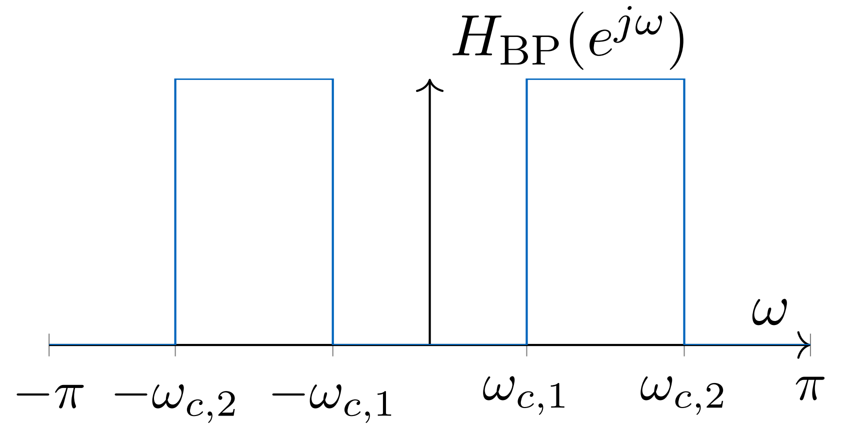
# Ideaaliset suodattimet 2

Kaistanpäästösuodatin
(engl. band-pass filter):

päästökaista $\omega_{c,1} \leq \omega \leq \omega_{c,2}$

estokaistat $0 < \omega \leq \omega_{c,1}$

$\omega_{c,2} < \omega \leq \pi$

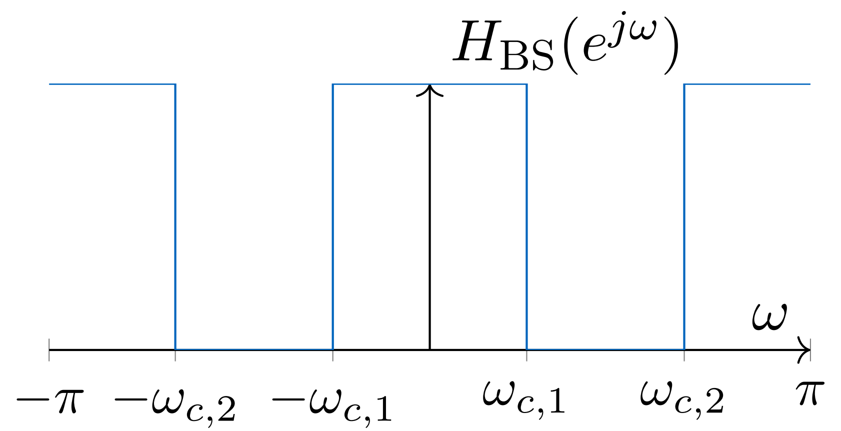



Kaistanestosuodatin
(engl. band-stop filter):

estokaista $\omega_{c,1} \leq \omega \leq \omega_{c,2}$

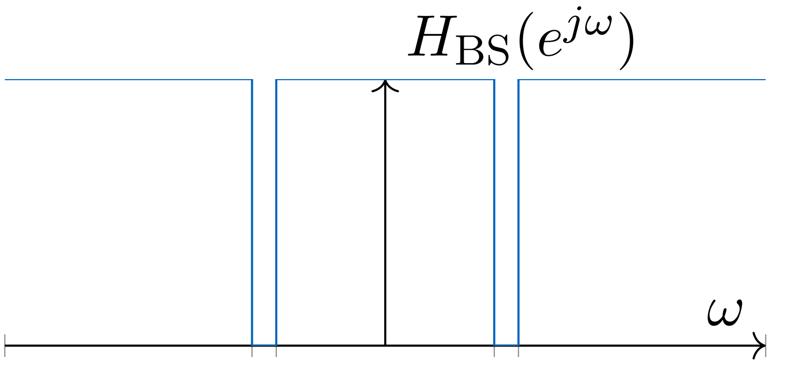
päästökaistat $0 < \omega \leq \omega_{c,1}$

$\omega_{c,2} < \omega \leq \pi$

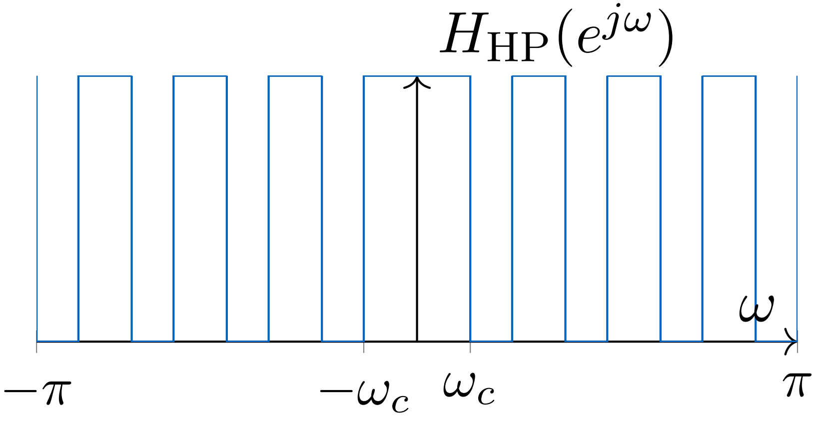


# Muita suodatintyyppejä

Lovisuodatin
(engl. notch filter):
kaistanestosuodatin, jolla kapea estokaista

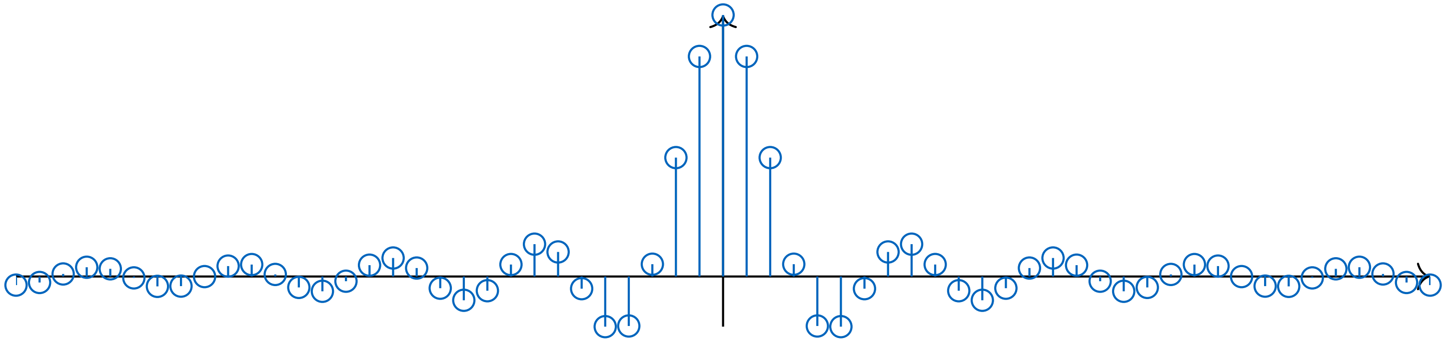



Kampasuodatin
(engl. comb filter):
useita päästö- ja estokaistoja



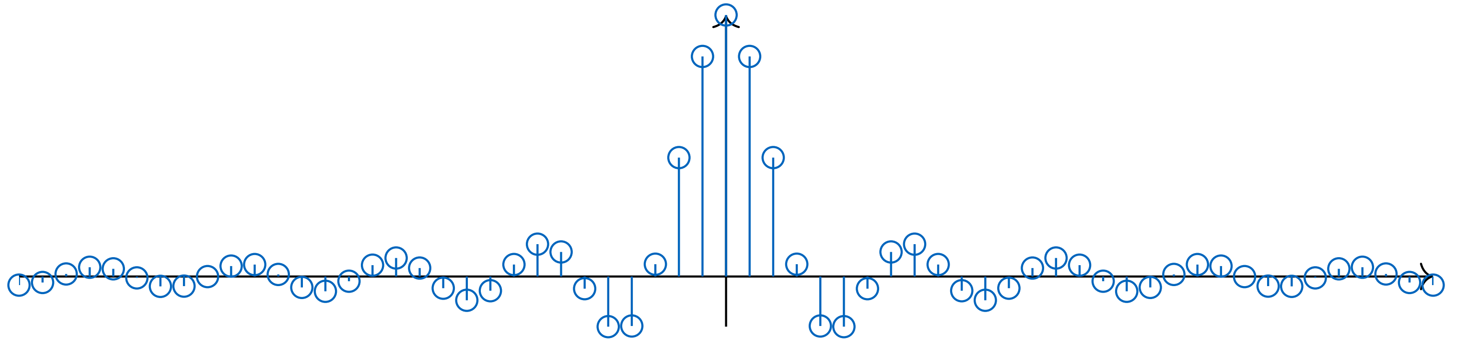
# Ideaalinen alipäästösuodatin

$$h_{LP}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{LP}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



# Ideaalinen alipäästösuodatin

$$h_{LP}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{LP}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



- Äärettomän kestoinen, ei kausaalinen
- Ei toteutettavissa

# Ideaalinen alipäästösuodatin

- Ideaalisille suodattimille taajuusvaste saa vain arvoja nolla tai yksi
  - vaihevaste nolla kaikkialla
  - äärettömän kestoinen impulssivaste

# Ideaalinen alipäästösuodatin

- Ideaalisille suodattimille taajuusvaste saa vain arvoja nolla tai yksi
  - vaihevaste nolla kaikkialla
  - äärettömän kestoinen impulssivaste
- Ei toteutettavissa äärellisasteisella LTI-järjestelmällä

# Ideaalinen alipäästösuodatin

- Ideaalisille suodattimille taajuusvaste saa vain arvoja nolla tai yksi
  - vaihevaste nolla kaikkialla
  - äärettömän kestoinen impulssivaste
- Ei toteutettavissa äärellisasteisella LTI-järjestelmällä
- Tarvitaan kompromisseja

# Ideaalinen alipäästösuodatin

- Ideaalisille suodattimille taajuusvaste saa vain arvoja nolla tai yksi
  - vaihevaste nolla kaikkialla
  - äärettömän kestoinen impulssivaste
- Ei toteutettavissa äärellisasteisella LTI-järjestelmällä
- Tarvitaan kompromisseja
  - Taajuusvaste saa nollasta ja ykkösestä poikkeavia arvoja

# Ideaalinen alipäästösuodatin

- Ideaalisille suodattimille taajuusvaste saa vain arvoja nolla tai yksi
  - vaihevaste nolla kaikkialla
  - äärettömän kestoinen impulssivaste
- Ei toteutettavissa äärellisasteisella LTI-järjestelmällä
- Tarvitaan kompromisseja
  - Taajuusvaste saa nollasta ja ykkösestä poikkeavia arvoja
  - Muutos päästökaistasta estokaistaan vaiheittainen

# Ideaalinen alipäästösuodatin

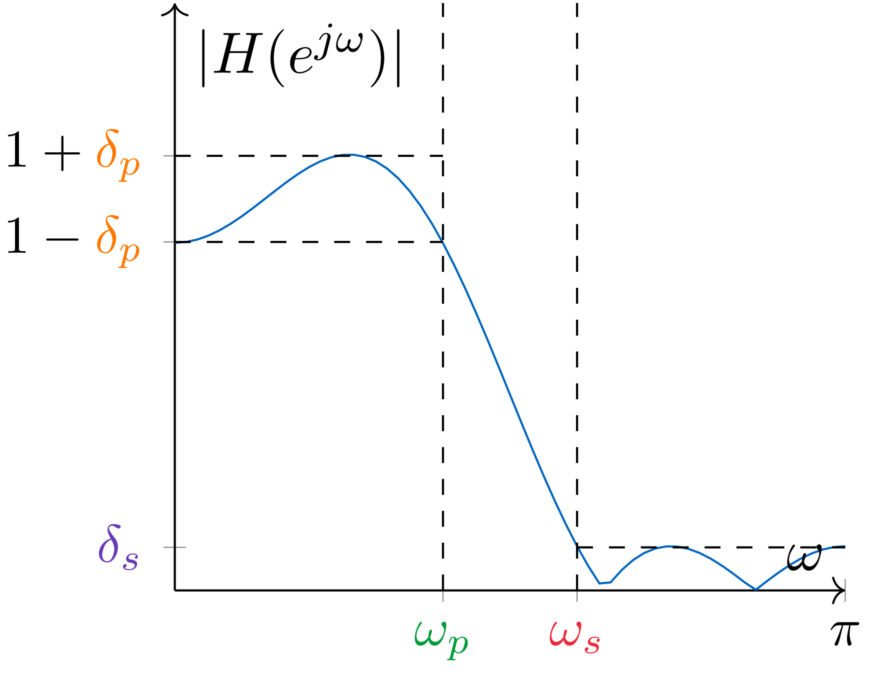
- Ideaalisille suodattimille taajuusvaste saa vain arvoja nolla tai yksi
  - vaihevaste nolla kaikkialla
  - äärettömän kestoinen impulssivaste
- Ei toteutettavissa äärellisasteisella LTI-järjestelmällä
- Tarvitaan kompromisseja
  - Taajuusvaste saa nollasta ja ykkösestä poikkeavia arvoja
  - Muutos päästökaistasta estokaistaan vaiheittainen
  - Vaihevaste nollasta poikkeava

# Suodattimen suunnittelu

Magnitudivasteen spesifikaatio

| | |
|---|---|
| $\omega_p$ | päästökaistan rajataajuus (passband cutoff frequency) |
| $\omega_s$ | estokaistan rajataajuus (stopband cutoff frequency) |
| $\delta_s$ | estokaistan aaltoilu (stopband ripple) |
| $\delta_p$ | päästökaistan aaltoilu (passband ripple) |

Alipäästösuodatin




Päästö- ja estokaistan väliin jää siirtymäkaista (engl. transition band).

# Sisältö

1. Ideaaliset suodattimet
2. Kaikenpäästösuodatin
3. Lineaarinen vaihevaste
4. Yksinkertaiset FIR- ja IIR-suodattimet

# Kaikenpäästösuodatin 1

- Merkitään kaikenpäästösuodattimen (engl. allpass filter) siirtofunktiota $A(z)$
- Magnitudivaste yksi kaikilla taajuuksilla:

$$\boxed{|A(e^{j\omega})| = 1 \quad \forall\omega}$$

- Vaihevasteen täytyy olla jotain muuta kuin vakio, jotta suodattimesta on hyötyä

# Kaikenpäästösuodatin 2

- Teoreema: suodatin, jolla on navat $\lambda_k$ ja nollat $1/\lambda_k^*$ on kaikenpäästösuodatin
- Todistus:

$$|A(e^{j\omega})| = \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{M} \left| e^{j\omega} - \xi_k \right|}{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - \lambda_k \right|}$$

# Kaikenpäästösuodatin 2

- Teoreema: suodatin, jolla on navat $\lambda_k$ ja nollat $1/\lambda_k^*$ on kaikenpäästösuodatin
- Todistus:

$$|A(e^{j\omega})| = \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{M} \left| e^{j\omega} - \xi_k \right|}{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - \lambda_k \right|} = \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - 1/\lambda_k^* \right|}{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - \lambda_k \right|}$$

# Kaikenpäästösuodatin 2

- Teoreema: suodatin, jolla on navat $\lambda_k$ ja nollat $1/\lambda_k^*$ on kaikenpäästösuodatin
- Todistus:

$$|A(e^{j\omega})| = \frac{|p_0|}{|d_0|}\frac{\prod_{k=0}^{M}\left|e^{j\omega}-\xi_k\right|}{\prod_{k=0}^{N}\left|e^{j\omega}-\lambda_k\right|} = \frac{|p_0|}{|d_0|}\frac{\prod_{k=0}^{N}\left|e^{j\omega}-1/\lambda_k^*\right|}{\prod_{k=0}^{N}\left|e^{j\omega}-\lambda_k\right|}$$

$$= \frac{|p_0|}{|d_0|}\frac{\prod_{k=0}^{N}\left|(\lambda_k^*-e^{-j\omega})e^{j\omega}/\lambda_k^*\right|}{\prod_{k=0}^{N}\left|e^{j\omega}-\lambda_k\right|}$$

# Kaikenpäästösuodatin 2

- Teoreema: suodatin, jolla on navat $\lambda_k$ ja nollat $1/\lambda_k^*$ on kaikenpäästösuodatin
- Todistus:

$$|A(e^{j\omega})| = \frac{|p_0|}{|d_0|}\frac{\prod_{k=0}^{M}\left|e^{j\omega}-\xi_k\right|}{\prod_{k=0}^{N}\left|e^{j\omega}-\lambda_k\right|} = \frac{|p_0|}{|d_0|}\frac{\prod_{k=0}^{N}\left|e^{j\omega}-1/\lambda_k^*\right|}{\prod_{k=0}^{N}\left|e^{j\omega}-\lambda_k\right|}$$

$$= \frac{|p_0|}{|d_0|}\frac{\prod_{k=0}^{N}\left|(\lambda_k^*-e^{-j\omega})e^{j\omega}/\lambda_k^*\right|}{\prod_{k=0}^{N}\left|e^{j\omega}-\lambda_k\right|}$$

$$= \frac{|p_0|}{|d_0|}\frac{\prod_{k=0}^{N}\left|-(e^{j\omega}-\lambda_k)^*\right|}{\prod_{k=0}^{N}\left|e^{j\omega}-\lambda_k\right|}\left|\frac{e^{j\omega}}{\lambda_k^*}\right|$$

# Kaikenpäästösuodatin 2

- Teoreema: suodatin, jolla on navat $\lambda_k$ ja nollat $1/\lambda_k^*$ on kaikenpäästösuodatin
- Todistus:

$$
|A(e^{j\omega})| = \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{M} \left| e^{j\omega} - \xi_k \right|}{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - \lambda_k \right|} = \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - 1/\lambda_k^* \right|}{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - \lambda_k \right|}
$$

$$
= \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{N} \left| (\lambda_k^* - e^{-j\omega}) e^{j\omega} / \lambda_k^* \right|}{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - \lambda_k \right|}
$$

$$
= \frac{|p_0|}{|d_0|} \frac{\prod_{k=0}^{N} \left| -(e^{j\omega} - \lambda_k)^* \right|}{\prod_{k=0}^{N} \left| e^{j\omega} - \lambda_k \right|} \left| \frac{e^{j\omega}}{\lambda_k^*} \right| = \frac{|p_0|}{|d_0|} \prod_{k=0}^{N} \frac{1}{|\lambda_k|}
$$

# Kaikenpäästösuodatin 3

- Kuinka saadaan sopivat nollat ja navat?

# Kaikenpäästösuodatin 3

- Kuinka saadaan sopivat nollat ja navat?
- Resiprookkipolynomi (engl. reciprocal polynomial):
  Polynomi $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, jolla juuret $r_i \neq 0$
  Resiprookkipolynomi $p^R(x) = a_n + a_{n-1} x + \ldots + a_1 x + a_0 x^n$, jolla juuret $1/r_i$

# Kaikenpäästösuodatin 3

- Kuinka saadaan sopivat nollat ja navat?
- Resiprookkipolynomi (engl. reciprocal polynomial):
  Polynomi $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, jolla juuret $r_i \neq 0$
  Resiprookkipolynomi $p^R(x) = a_n + a_{n-1} x + \ldots + a_1 x + a_0 x^n$, jolla juuret $1/r_i$
  Todistus:
  $p^R(x) = x^n(a_n x^{-n} + a_{n-1} x^{-n+1} + \ldots + a_1 x + a_0) = x^n p(x^{-1})$

# Kaikenpäästösuodatin 3

- Kuinka saadaan sopivat nollat ja navat?
- Resiprookkipolynomi (engl. reciprocal polynomial):
  Polynomi $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, jolla juuret $r_i \neq 0$
  Resiprookkipolynomi $p^R(x) = a_n + a_{n-1} x + \ldots + a_1 x + a_0 x^n$, jolla juuret $1/r_i$
  Todistus:
  $p^R(x) = x^n (a_n x^{-n} + a_{n-1} x^{-n+1} + \ldots + a_1 x + a_0) = x^n p(x^{-1})$
  $\Rightarrow p^R(1/r_i) = r_i^{-n} p(r_i) = 0$

# Kaikenpäästösuodatin 3

- Kuinka saadaan sopivat nollat ja navat?
- Resiprookkipolynomi (engl. reciprocal polynomial):
  Polynomi $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, jolla juuret $r_i \neq 0$
  Resiprookkipolynomi $p^R(x) = a_n + a_{n-1} x + \ldots + a_1 x + a_0 x^n$, jolla juuret $1/r_i$
  Todistus:
  $p^R(x) = x^n (a_n x^{-n} + a_{n-1} x^{-n+1} + \ldots + a_1 x + a_0) = x^n p(x^{-1})$
  $\Rightarrow p^R(1/r_i) = r_i^{-n} p(r_i) = 0$
- Lisäksi: kertoimet reaaliarvoisia, kompleksiarvoisilla juurilla $r_i$ vastinpari $r_i^*$

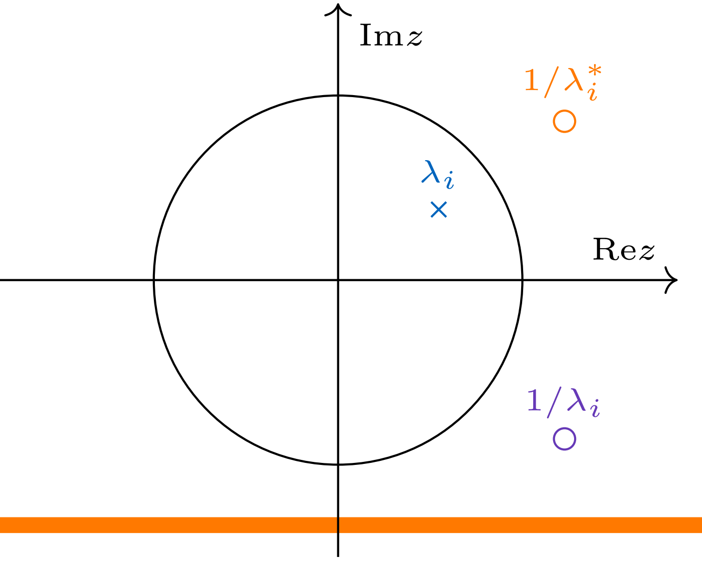
# Kaikenpäästösuodatin 4

- Siirtofunktio muotoa

$$A(z) = \pm \frac{p_N + p_{N-1} z^{-1} + \ldots p_1 z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + p_1 z^{-1} + \ldots p_{N-1} z^{-N+1} + p_M z^{-N}} = \pm \frac{z^{-N} P(z^{-1})}{P(z)}$$

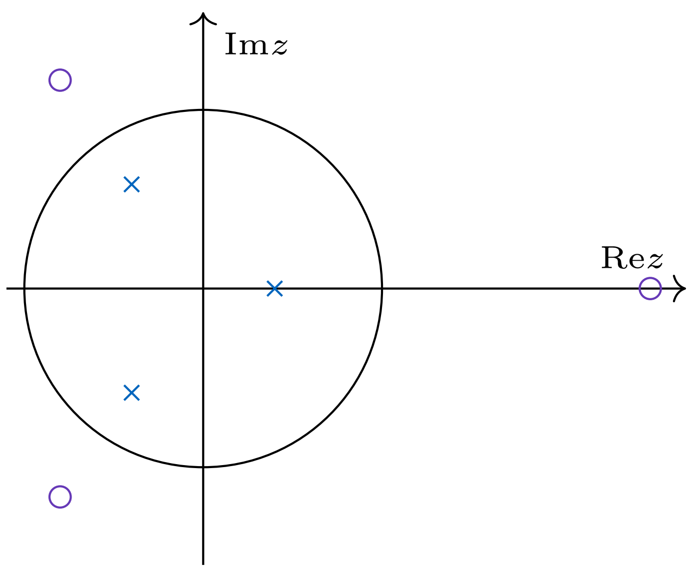
- Myös tätä käyttämällä saadaan

$$A(z)A(z^{-1}) = \frac{z^{-N} P(z^{-1})}{P(z)} \frac{z^{N} P(z)}{P(z^{-1})} = 1 \Rightarrow A(e^{j\omega})A(e^{-j\omega}) = 1$$

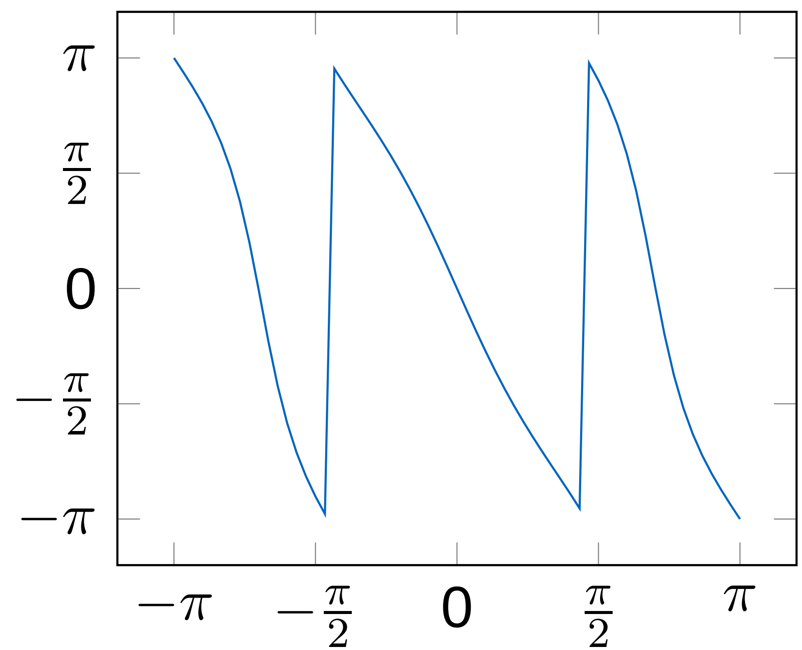


# Kaikenpäästösuodatin: esimerkki

$$A(z) = \frac{-0.2 + 0.18z^{-1} + 0.4z^{-2} + z^{-3}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.18z^{-2} - 0.2z^{-3}}$$

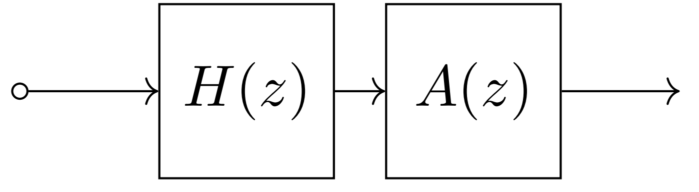



Vaihevaste



# Kaikenpäästösuodattimen käyttö

- Tyypillinen käyttö viiveentasaus (engl. delay equalization)
- Jos ryhmäviive poikkeaa vakiosta, signaaliin tulee vääristymiä
- Kaikenpäästösuodattimella voidaan yrittää vakioida ryhmäviive päästökaistalla, jotta vääristymää on mahd. vähän.



# Sisältö

1. Ideaaliset suodattimet
2. Kaikenpäästösuodatin
3. Lineaarinen vaihevaste
4. Yksinkertaiset FIR- ja IIR-suodattimet

# Lineaarinen vaihevaste

- Oletetaan suodatin jolla on yksikkömagnitudivaste ja lineaarinen vaihevaste päästökaistalla

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega D}, & \omega \in \text{päästökaista} \\ 0, & \omega \in \text{estokaista} \end{cases}$$

# Lineaarinen vaihevaste

- Oletetaan suodatin jolla on yksikkömagnitudivaste ja lineaarinen vaihevaste päästökaistalla

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega D}, & \omega \in \text{päästökaista} \\ 0, & \omega \in \text{estokaista} \end{cases}$$

- Oletetaan, että signaali $x[n]$ on päästökaistalla ja suodatetaan se

$$y[n] = h[n] * x[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega D}X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{\text{DTFT}}$$
$$y[n] = x[n-D]$$

# Lineaarinen vaihevaste

- Oletetaan suodatin jolla on yksikkömagnitudivaste ja lineaarinen vaihevaste päästökaistalla

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega D}, & \omega \in \text{päästökaista} \\ 0, & \omega \in \text{estokaista} \end{cases}$$

- Oletetaan, että signaali $x[n]$ on päästökaistalla ja suodatetaan se

  $y[n] = h[n] * x[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega D}X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{\text{DTFT}}$
  $y[n] = x[n - D]$
- Vaiheviive ja ryhmäviive ovat sama vakio $D$

# Lineaarinen vaihevaste

- Oletetaan suodatin jolla on yksikkömagnitudivaste ja lineaarinen vaihevaste päästökaistalla

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega D}, & \omega \in \text{päästökaista} \\ 0, & \omega \in \text{estokaista} \end{cases}$$

- Oletetaan, että signaali $x[n]$ on päästökaistalla ja suodatetaan se
$y[n] = h[n] * x[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega D}X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{\text{DTFT}}$
$y[n] = x[n - D]$
- Vaiheviive ja ryhmäviive ovat sama vakio $D$
- Ei ole mahdollista toteuttaa suodatinta jonka taajuusvaste on $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega D}$ päästökaistalla

# Lineaarinen vaihevaste

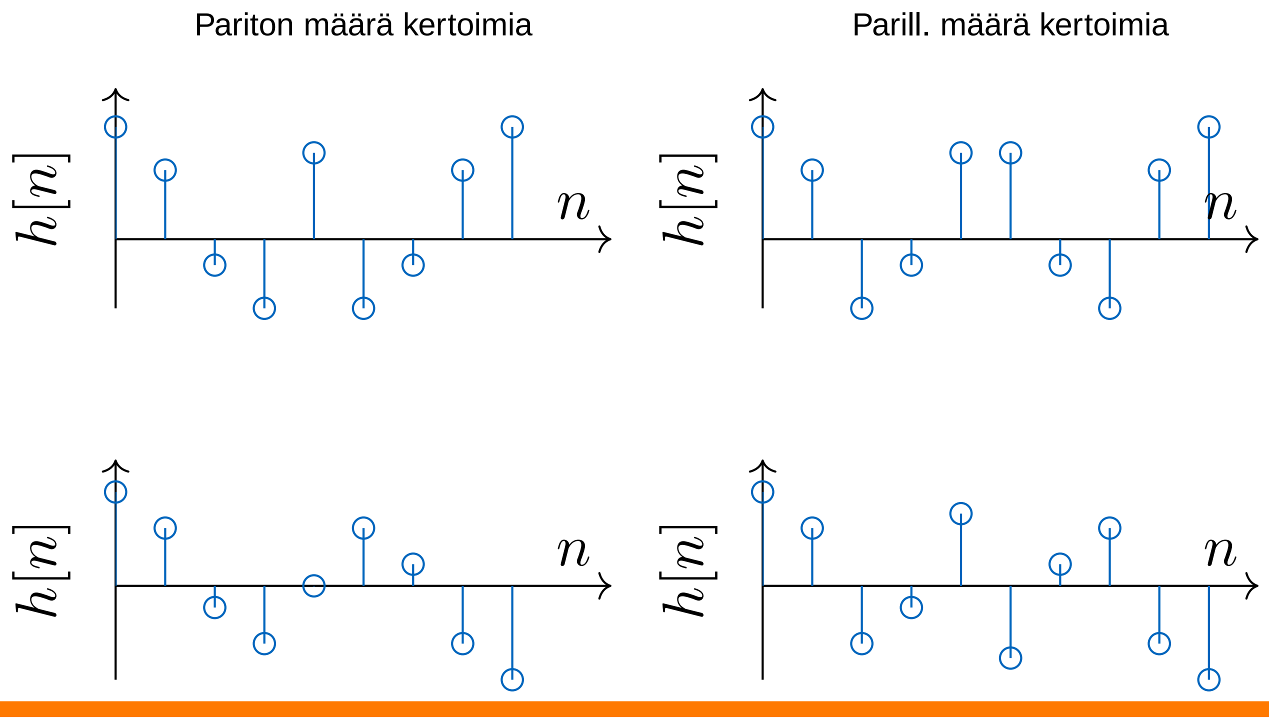
- Oletetaan suodatin jolla on yksikkömagnitudivaste ja lineaarinen vaihevaste päästökaistalla

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega D}, & \omega \in \text{päästökaista} \\ 0, & \omega \in \text{estokaista} \end{cases}$$

- Oletetaan, että signaali $x[n]$ on päästökaistalla ja suodatetaan se $y[n] = h[n] * x[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega D}X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{\text{DTFT}}$ $y[n] = x[n-D]$
- Vaiheviive ja ryhmäviive ovat sama vakio $D$
- Ei ole mahdollista toteuttaa suodatinta jonka taajuusvaste on $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega D}$ päästökaistalla
- Lineaarinen vaihevaste on kuitenkin saavutettavissa, eli $\arg H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega D}$

# Lineaarivaiheiset suodattimet

- Jos FIR-suodattimen kertoimet ovat (anti)symmetriset, sen vaihevaste on lineaarinen
- Eli $h[n] = \pm h[N-n]$, missä $N$ on suodattimen aste



# Lineaarivaiheinen siirtofunktio

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots + h[N-2]z^{-N+2} + h[N-1]z^{-N+1} + h[N]z^{-N}$$

# Lineaarivaiheinen siirtofunktio

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots + h[N-2]z^{-N+2} + h[N-1]z^{-N+1} + h[N]z^{-N} \\
&= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots \pm h[2]z^{-N+2} \pm h[1]z^{-N+1} \pm h[0]z^{-N}
\end{aligned}
$$

# Lineaarivaiheinen siirtofunktio

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots + h[N-2]z^{-N+2} + h[N-1]z^{-N+1} + h[N]z^{-N} \\ &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots \pm h[2]z^{-N+2} \pm h[1]z^{-N+1} \pm h[0]z^{-N} \\ &= h[0](1 \pm z^{-N}) + h[1](z^{-1} \pm z^{-N+1}) + h[2](z^{-2} \pm z^{-N+2}) + \ldots + h[N/2]z^{-N/2} \end{aligned}$$

# Lineaarivaiheinen siirtofunktio

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots + h[N-2]z^{-N+2} + h[N-1]z^{-N+1} + h[N]z^{-N} \\ &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots \pm h[2]z^{-N+2} \pm h[1]z^{-N+1} \pm h[0]z^{-N} \\ &= h[0](1 \pm z^{-N}) + h[1](z^{-1} \pm z^{-N+1}) + h[2](z^{-2} \pm z^{-N+2}) + \ldots + \underbrace{h[N/2]z^{-N/2}}_{\text{jos symm. ja N parill.}} \end{aligned}$$

# Lineaarivaiheinen siirtofunktio

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots + h[N-2]z^{-N+2} + h[N-1]z^{-N+1} + h[N]z^{-N} \\
&= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots \pm h[2]z^{-N+2} \pm h[1]z^{-N+1} \pm h[0]z^{-N} \\
&= h[0](1 \pm z^{-N}) + h[1](z^{-1} \pm z^{-N+1}) + h[2](z^{-2} \pm z^{-N+2}) + \ldots + \underbrace{h[N/2]z^{-N/2}}_{\text{jos symm. ja N parill.}} \\
&= z^{-N/2}\Big(h[0](z^{N/2} \pm z^{-N/2}) + h[1](z^{+N/2-1} \pm z^{-N/2+1}) + h[2](z^{N/2-2} \pm z^{-N/2+2}) \\
&\quad + \ldots + h[N/2]\Big)
\end{aligned}
$$

# Lineaarivaiheinen siirtofunktio

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots + h[N-2]z^{-N+2} + h[N-1]z^{-N+1} + h[N]z^{-N} \\
&= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots \pm h[2]z^{-N+2} \pm h[1]z^{-N+1} \pm h[0]z^{-N} \\
&= h[0](1 \pm z^{-N}) + h[1](z^{-1} \pm z^{-N+1}) + h[2](z^{-2} \pm z^{-N+2}) + \ldots + \underbrace{h[N/2]z^{-N/2}}_{\text{jos symm. ja N parill.}} \\
&= z^{-N/2}\big(h[0](z^{N/2} \pm z^{-N/2}) + h[1](z^{+N/2-1} \pm z^{-N/2+1}) + h[2](z^{N/2-2} \pm z^{-N/2+2}) \\
&\quad + \ldots + h[N/2]\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow H(e^{j\omega}) \\
&= e^{-j\omega N/2}\big(h[0](e^{j\omega N/2} \pm e^{-j\omega N/2}) + h[1](e^{j\omega(N/2-1)} \pm e^{-j\omega(N/2-1)}) + \ldots + h[N/2]\big)
\end{aligned}
$$

# Lineaarivaiheinen siirtofunktio

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots + h[N-2]z^{-N+2} + h[N-1]z^{-N+1} + h[N]z^{-N} \\
&= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots \pm h[2]z^{-N+2} \pm h[1]z^{-N+1} \pm h[0]z^{-N} \\
&= h[0](1 \pm z^{-N}) + h[1](z^{-1} \pm z^{-N+1}) + h[2](z^{-2} \pm z^{-N+2}) + \ldots + \underbrace{h[N/2]z^{-N/2}}_{\text{jos symm. ja N parill.}} \\
&= z^{-N/2}\big(h[0](z^{N/2} \pm z^{-N/2}) + h[1](z^{+N/2-1} \pm z^{-N/2+1}) + h[2](z^{N/2-2} \pm z^{-N/2+2}) \\
&\quad + \ldots + h[N/2]\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow H(e^{j\omega}) \\
&= e^{-j\omega N/2}\big(h[0](e^{j\omega N/2} \pm e^{-j\omega N/2}) + h[1](e^{j\omega(N/2-1)} \pm e^{-j\omega(N/2-1)}) + \ldots + h[N/2]\big) \\
&= \begin{cases} e^{-j\omega N/2}\big(h[0]2\cos(\omega N/2) + h[1]2\cos(\omega(N/2-1)) + \ldots + h[N/2]\big), & \text{jos } + \\ e^{-j\omega N/2}\big(h[0]2j\sin(\omega N/2) + h[1]2j\sin(\omega(N/2-1)) + \ldots + h[N/2]\big), & \text{jos } - \end{cases}
\end{aligned}
$$

# Lineaarivaiheinen siirtofunktio

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots + h[N-2]z^{-N+2} + h[N-1]z^{-N+1} + h[N]z^{-N} \\
&= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots \pm h[2]z^{-N+2} \pm h[1]z^{-N+1} \pm h[0]z^{-N} \\
&= h[0](1 \pm z^{-N}) + h[1](z^{-1} \pm z^{-N+1}) + h[2](z^{-2} \pm z^{-N+2}) + \ldots + \underbrace{h[N/2]z^{-N/2}}_{\text{jos symm. ja N parill.}} \\
&= z^{-N/2}\Big(h[0](z^{N/2} \pm z^{-N/2}) + h[1](z^{+N/2-1} \pm z^{-N/2+1}) + h[2](z^{N/2-2} \pm z^{-N/2+2}) \\
&\quad + \ldots + h[N/2]\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow H(e^{j\omega}) \\
&= e^{-j\omega N/2}\Big(h[0](e^{j\omega N/2} \pm e^{-j\omega N/2}) + h[1](e^{j\omega(N/2-1)} \pm e^{-j\omega(N/2-1)}) + \ldots + h[N/2]\Big) \\
&= \begin{cases} e^{-j\omega N/2}\Big(h[0]2\cos(\omega N/2) + h[1]2\cos(\omega(N/2-1)) + \ldots + h[N/2]\Big), & \text{jos } + \\ e^{-j\omega N/2 + j\pi/2}\Big(h[0]2\sin(\omega N/2) + h[1]2\sin(\omega(N/2-1)) + \ldots + h[N/2]\Big), & \text{jos } - \end{cases}
\end{aligned}
$$

# Lineaarivaiheinen siirtofunktio

$$\begin{aligned}
H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots + h[N-2]z^{-N+2} + h[N-1]z^{-N+1} + h[N]z^{-N} \\
&= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots \pm h[2]z^{-N+2} \pm h[1]z^{-N+1} \pm h[0]z^{-N} \\
&= h[0](1 \pm z^{-N}) + h[1](z^{-1} \pm z^{-N+1}) + h[2](z^{-2} \pm z^{-N+2}) + \ldots + \underbrace{h[N/2]z^{-N/2}}_{\text{jos symm. ja N parill.}} \\
&= z^{-N/2}\big(h[0](z^{N/2} \pm z^{-N/2}) + h[1](z^{+N/2-1} \pm z^{-N/2+1}) + h[2](z^{N/2-2} \pm z^{-N/2+2}) \\
&\quad + \ldots + h[N/2]\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow H(e^{j\omega}) \\
&= e^{-j\omega N/2}\big(h[0](e^{j\omega N/2} \pm e^{-j\omega N/2}) + h[1](e^{j\omega(N/2-1)} \pm e^{-j\omega(N/2-1)}) + \ldots + h[N/2]\big) \\
&= \begin{cases} e^{-j\omega N/2}\big(h[0]2\cos(\omega N/2) + h[1]2\cos(\omega(N/2-1)) + \ldots + h[N/2]\big), & \text{jos } + \\ \underbrace{e^{-j\omega N/2 + j\pi/2}}_{e^{j\theta(\omega)}} \underbrace{\big(h[0]2\sin(\omega N/2) + h[1]2\sin(\omega(N/2-1)) + \ldots + h[N/2]\big)}_{|H(e^{j\omega})|}, & \text{jos } - \end{cases}
\end{aligned}$$

# Lineaarivaiheinen siirtofunktio

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots + h[N-2]z^{-N+2} + h[N-1]z^{-N+1} + h[N]z^{-N} \\
&= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \ldots \pm h[2]z^{-N+2} \pm h[1]z^{-N+1} \pm h[0]z^{-N} \\
&= h[0](1 \pm z^{-N}) + h[1](z^{-1} \pm z^{-N+1}) + h[2](z^{-2} \pm z^{-N+2}) + \ldots + \underbrace{h[N/2]z^{-N/2}}_{\text{jos symm. ja N parill.}} \\
&= z^{-N/2}\Big(h[0](z^{N/2} \pm z^{-N/2}) + h[1](z^{+N/2-1} \pm z^{-N/2+1}) + h[2](z^{N/2-2} \pm z^{-N/2+2}) \\
&\quad + \ldots + h[N/2]\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow H(e^{j\omega}) \\
&= e^{-j\omega N/2}\Big(h[0](e^{j\omega N/2} \pm e^{-j\omega N/2}) + h[1](e^{j\omega(N/2-1)} \pm e^{-j\omega(N/2-1)}) + \ldots + h[N/2]\Big) \\
&= \begin{cases} e^{-j\omega N/2}\Big(h[0]2\cos(\omega N/2) + h[1]2\cos(\omega(N/2-1)) + \ldots + h[N/2]\Big), & \text{jos } + \\ \underbrace{e^{-j\omega N/2 + j\pi/2}}_{e^{j\theta(\omega)}} \underbrace{\Big(h[0]2\sin(\omega N/2) + h[1]2\sin(\omega(N/2-1)) + \ldots + h[N/2]\Big)}_{|H(e^{j\omega})|}, & \text{jos } - \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Vaihe- ja ryhmäviiveet $\tau_p(\omega) = \tau_g(\omega) = N/2$

# Itseisresiprookkisuus

- Lineaarivaiheisen suodattimen siirtofunktio on itseisresiprookkinen tai anti-itseisresiprookkinenpolynomi $H(z) = \pm H^R(z)$ (Mitra: symmetrinen)
- itseisresiprookkista polynomia kutsutaan palindromiseksi (engl. palindromic)
- anti-itseisresiprookkista polynomia kutsutaan antipalindromiseksi
- Astetta $n$ olevalle polynomille pätee
  - ▷ $p(x) = x^n p(\frac{1}{x})$ jos se on palindrominen
  - ▷ $p(x) = -x^n p(\frac{1}{x})$ jos se on antipalindrominen

(suoraan määritelmästä)

# Palindromisen polynomin juuret

- Jos $r$ on (anti)palindromisen polynomin juuri, myös $1/r$ on juuri (todistus kuten resiprookkisten polynomien tapauksessa)

# Palindromisen polynomin juuret

- Jos $r$ on (anti)palindromisen polynomin juuri, myös $1/r$ on juuri (todistus kuten resiprookkisten polynomien tapauksessa)
- Kaavaan $p(x) = \pm x^n p(\frac{1}{x})$ sijoittamalla saadaan
  - palindrominen $n$ pariton: $p(-1) = (-1)^n p(-1) = -p(-1) = 0$ $\Rightarrow x = -1$ on nollakohta

# Palindromisen polynomin juuret

- Jos $r$ on (anti)palindromisen polynomin juuri, myös $1/r$ on juuri (todistus kuten resiprookkisten polynomien tapauksessa)
- Kaavaan $p(x) = \pm x^n p(\frac{1}{x})$ sijoittamalla saadaan
  - palindrominen $n$ pariton: $p(-1) = (-1)^n p(-1) = -p(-1) = 0$ $\Rightarrow x = -1$ on nollakohta
  - antipalindrominen $n$ pariton: $p(1) = -p(1) = 0$ $\Rightarrow x = 1$ on nollakohta

# Palindromisen polynomin juuret

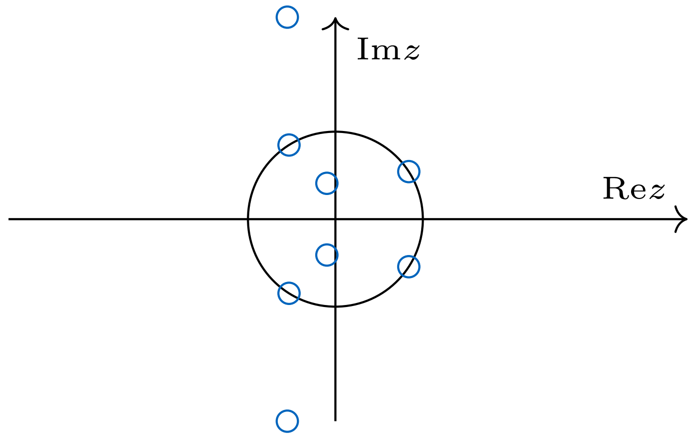
- Jos $r$ on (anti)palindromisen polynomin juuri, myös $1/r$ on juuri (todistus kuten resiprookkisten polynomien tapauksessa)
- Kaavaan $p(x) = \pm x^n p(\frac{1}{x})$ sijoittamalla saadaan
  - palindrominen $n$ pariton: $p(-1) = (-1)^n p(-1) = -p(-1) = 0$ $\Rightarrow x = -1$ on nollakohta
  - antipalindrominen $n$ pariton: $p(1) = -p(1) = 0$ $\Rightarrow x = 1$ on nollakohta
  - antipalindrominen $n$ parillinen: $p(\pm 1) = -(\pm 1)^n p(\pm 1) = 0$ $\Rightarrow$ nollakohdat $x = -1$ ja $x = 1$

# Palindromisen polynomin juuret

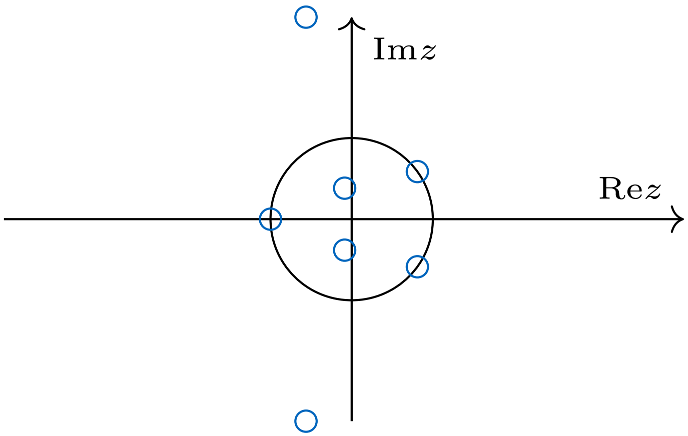
- Jos $r$ on (anti)palindromisen polynomin juuri, myös $1/r$ on juuri (todistus kuten resiprookkisten polynomien tapauksessa)
- Kaavaan $p(x) = \pm x^n p(\frac{1}{x})$ sijoittamalla saadaan
  - palindrominen $n$ pariton: $p(-1) = (-1)^n p(-1) = -p(-1) = 0$ $\Rightarrow x = -1$ on nollakohta
  - antipalindrominen $n$ pariton: $p(1) = -p(1) = 0$ $\Rightarrow x = 1$ on nollakohta
  - antipalindrominen $n$ parillinen: $p(\pm 1) = -(\pm 1)^n p(\pm 1) = 0$ $\Rightarrow$ nollakohdat $x = -1$ ja $x = 1$
- Huom! riippumatta tyypistä tai asteesta $x = \pm 1$ voi olla juuri

# Palindromisen polynomin juuret: esimerkki

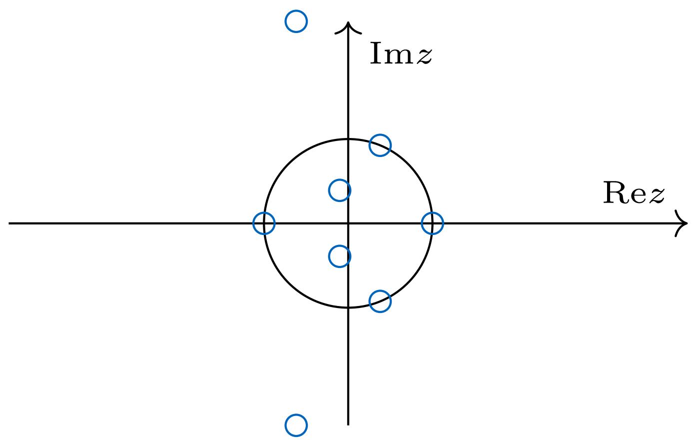
Tyyppi 1: $n$ parill., sym.



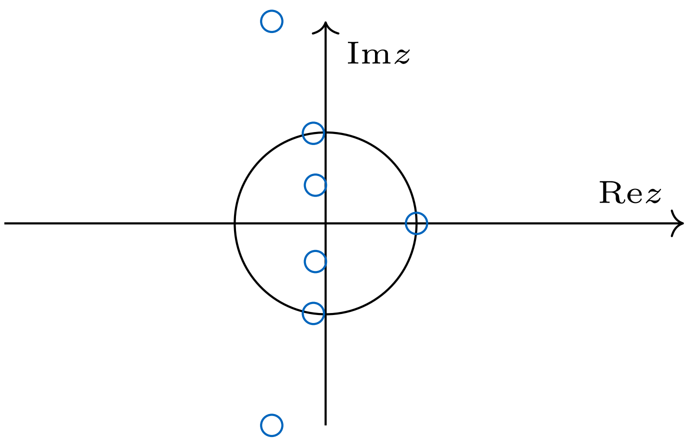

Tyyppi 2: $n$ pariton, sym.




Tyyppi 3: $n$ parill., antisym.




Tyyppi 4: $n$ pariton, antisym.



# Nollavaiheinen suodatin

- Voidaanko suodatuksen aiheuttama vaihemuutos kumota vastakkaisella vaihemuutoksella?
- Eli: onko suodatinta, jonka vaihevaste on $e^{-j\theta(\omega)}$?

# Nollavaiheinen suodatin

- Voidaanko suodatuksen aiheuttama vaihemuutos kumota vastakkaisella vaihemuutoksella?
- Eli: onko suodatinta, jonka vaihevaste on $e^{-j\theta(\omega)}$?
- Kyllä, $H(\frac{1}{z})$ eli ensin suodatin $H(z)$ ja sitten $H(\frac{1}{z})$
- Lopputulokselle $Y(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|X(e^{j\omega})$

# Nollavaiheinen suodatin

- Voidaanko suodatuksen aiheuttama vaihemuutos kumota vastakkaisella vaihemuutoksella?
- Eli: onko suodatinta, jonka vaihevaste on $e^{-j\theta(\omega)}$?
- Kyllä, $H(\frac{1}{z})$ eli ensin suodatin $H(z)$ ja sitten $H(\frac{1}{z})$
- Lopputulokselle $Y(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|X(e^{j\omega})$
- $H(\frac{1}{z})$ kuitenkin antikausaalinen!
- Käytännön toteutus
  - ▷ suodatus $H(z)$:lla
  - ▷ tehdään ajankääntö
  - ▷ suodatus uudestaan $H(z)$:lla
  - ▷ tehdään taas ajankääntö

# Nollavaiheinen suodatin

- Voidaanko suodatuksen aiheuttama vaihemuutos kumota vastakkaisella vaihemuutoksella?
- Eli: onko suodatinta, jonka vaihevaste on $e^{-j\theta(\omega)}$?
- Kyllä, $H(\frac{1}{z})$ eli ensin suodatin $H(z)$ ja sitten $H(\frac{1}{z})$
- Lopputulokselle $Y(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|X(e^{j\omega})$
- $H(\frac{1}{z})$ kuitenkin antikausaalinen!
- Käytännön toteutus
  - suodatus $H(z)$:lla
  - tehdään ajankääntö
  - suodatus uudestaan $H(z)$:lla
  - tehdään taas ajankääntö
- nimitys “eteenpäin–taaksepäin -suodatus” (engl. forward–backward filtering)

# Minimi- ja maksimivaiheinen suodatin 1

- Esitetään siirtofunktio

$$H(z) = \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{p_0}{d_0} \frac{(z-\xi_0)\cdots(z-\xi_M)}{(z-\lambda_0)\cdots(z-\lambda_N)}$$

- Yksinkertaisin mahdollinen kaikenpäästösuodatin

$$A(z) = \frac{(\xi_M z - 1)}{(z-\xi_M)}$$

- Kytkemällä nämä peräkkäin $|H(z)A(z)| = |H(z)|$, mutta vaihevaste muuttuu

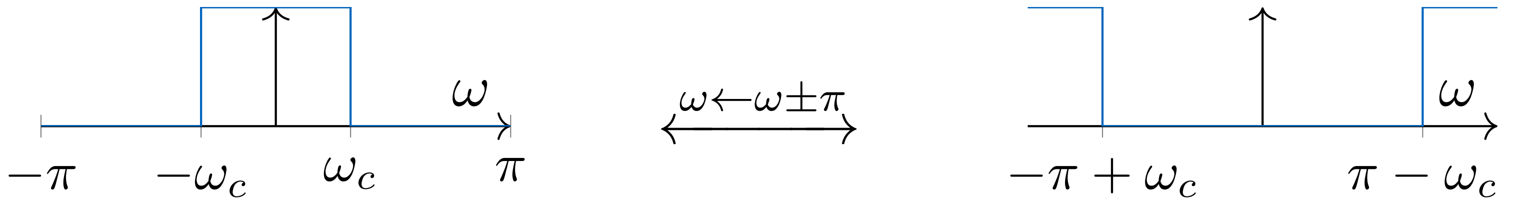
$$H(z)A(z) = \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{p_0}{d_0} \frac{(z-\xi_0)\cdots(z-\xi_{M-1})}{(z-\lambda_0)\cdots(z-\lambda_{N-1})} \frac{(\xi_M z - 1)}{(z-\lambda_N)}$$

# Minimi- ja maksimivaiheinen suodatin 2

- Sama voidaan toistaa mille tahansa nollalle $\xi_k$ (tai navalle, mutta suodatin halutaan tyypillisesti pitää stabiilina)
- Voidaan osoittaa, että kausasalinen suodatin on
  - minimivaiheinen (engl. minimum phase),kun kaikki nollat ovat yksikköympyrän sisäpuolella $\Rightarrow$ pienin ryhmäviive
  - maksimivaiheinen (engl. maximum phase),kun kaikki nollat ovat yksikköympyrän ulkopuolella $\Rightarrow$ suurin ryhmäviive
- jos suodatin ei ole minimi- ja maksimivaiheinen, se on sekavaiheinen (engl. mixed phase)

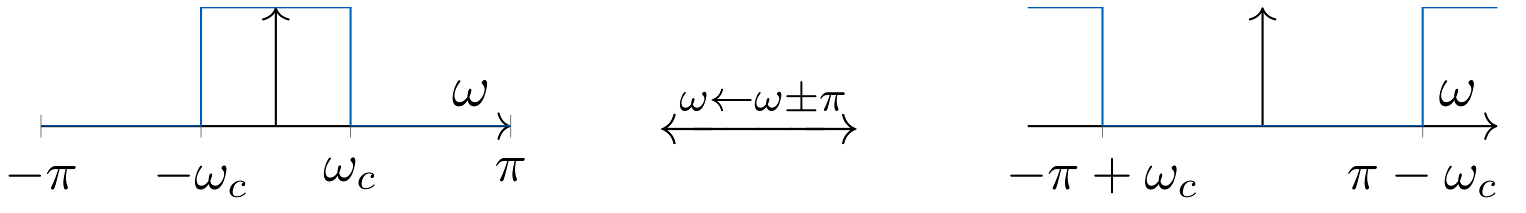
# Ali- ja ylipäästösuodattimien yhteys

- Jos magnitudivastetta siirretään $\pm\pi$, huomataan että alipäästösuodatin muuttuu ylipäästösuodattimeksi tai päinvastoin



# Ali- ja ylipäästösuodattimien yhteys

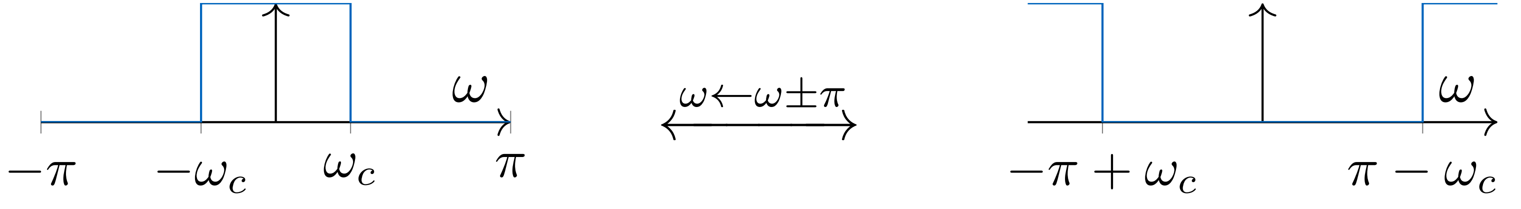
- Jos magnitudivastetta siirretään $\pm\pi$, huomataan että alipäästösuodatin muuttuu ylipäästösuodattimeksi tai päinvastoin




- Siirtofunktiolle $H(e^{j(\omega\pm\pi)}) = H(-e^{j\omega}) \Rightarrow H(-z)$

# Ali- ja ylipäästösuodattimien yhteys

- Jos magnitudivastetta siirretään $\pm\pi$, huomataan että alipäästösuodatin muuttuu ylipäästösuodattimeksi tai päinvastoin




- Siirtofunktiolle $H(e^{j(\omega\pm\pi)}) = H(-e^{j\omega}) \Rightarrow H(-z)$
- Tekemällä vaihto $z \leftarrow -z$ saadaan muuttettua suodatintyyppi

# Sisältö

1. Ideaaliset suodattimet
2. Kaikenpäästösuodatin
3. Lineaarinen vaihevaste
4. Yksinkertaiset FIR- ja IIR-suodattimet

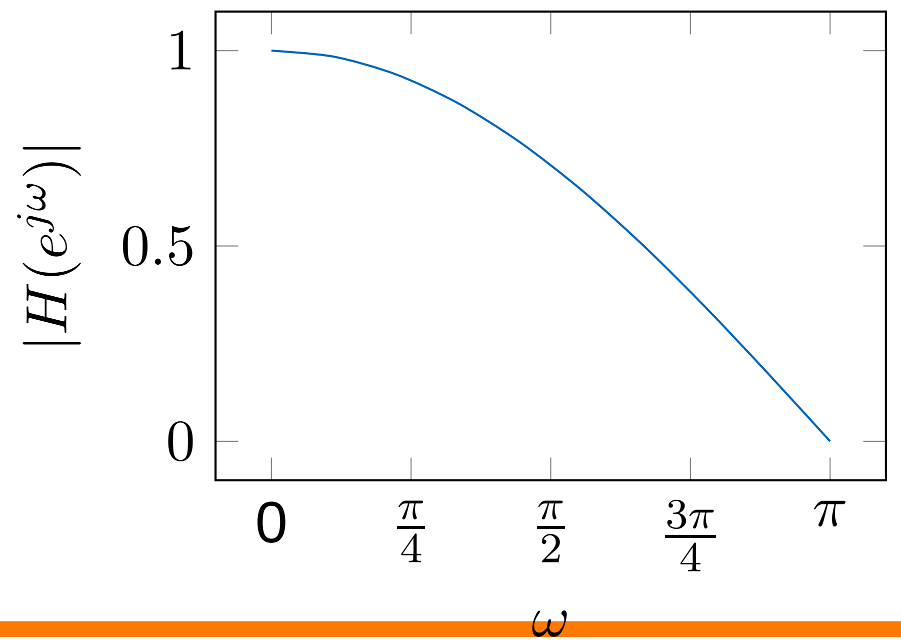
# Yksinkertainen FIR alipäästösuodatin

- Yksinkertaisin mahdollinen: kahden näytteen keskiarvo

$$H(z) = \mathcal{Z}\{\frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1])\} = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})$$

- Taajuusvaste $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega/2}}{2}(e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}) = \frac{e^{j\omega/2}}{2}\cos(\omega/2)$

magnitudiv. $|H(e^{j\omega})| = |\cos(\omega/2)|$
vaihevaste $\arg H(e^{j\omega}) = \omega/2$



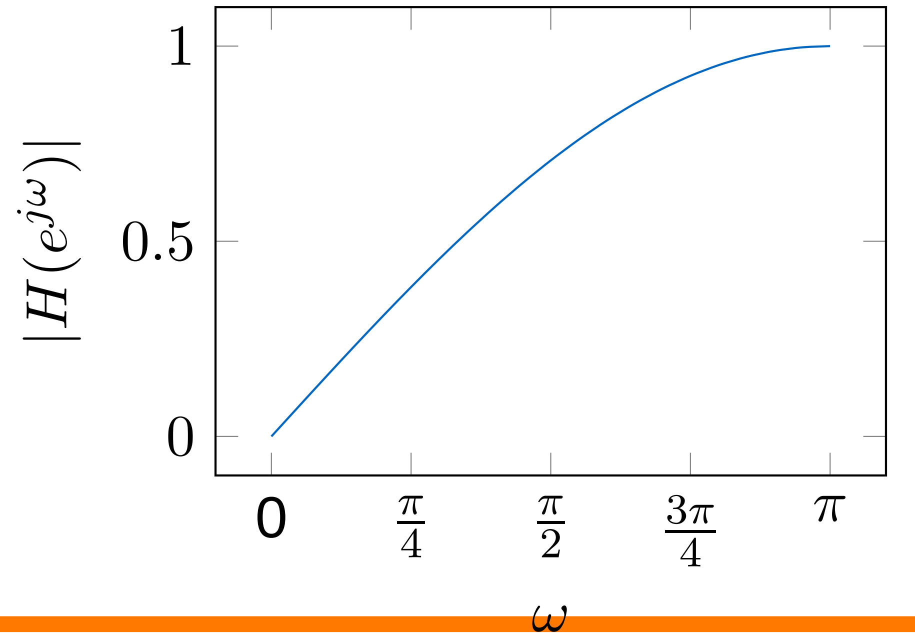
# Yksinkertainen FIR ylipäästösuodatin

- Yksinkertaisin mahdollinen: kahden näytteen erotus

$$H(z) = \mathcal{Z}\{\frac{1}{2}(\delta[n] - \delta[n-1])\} = \frac{1}{2}(1 - z^{-1})$$

- Taajuusvaste $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega/2}}{2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) = \frac{e^{j\omega/2}}{2} j \sin(\omega/2)$

magnitudiv. $|H(e^{j\omega})| = |\sin(\omega/2)|$
vaihevaste $\arg H(e^{j\omega}) = (\omega + \pi)/2$

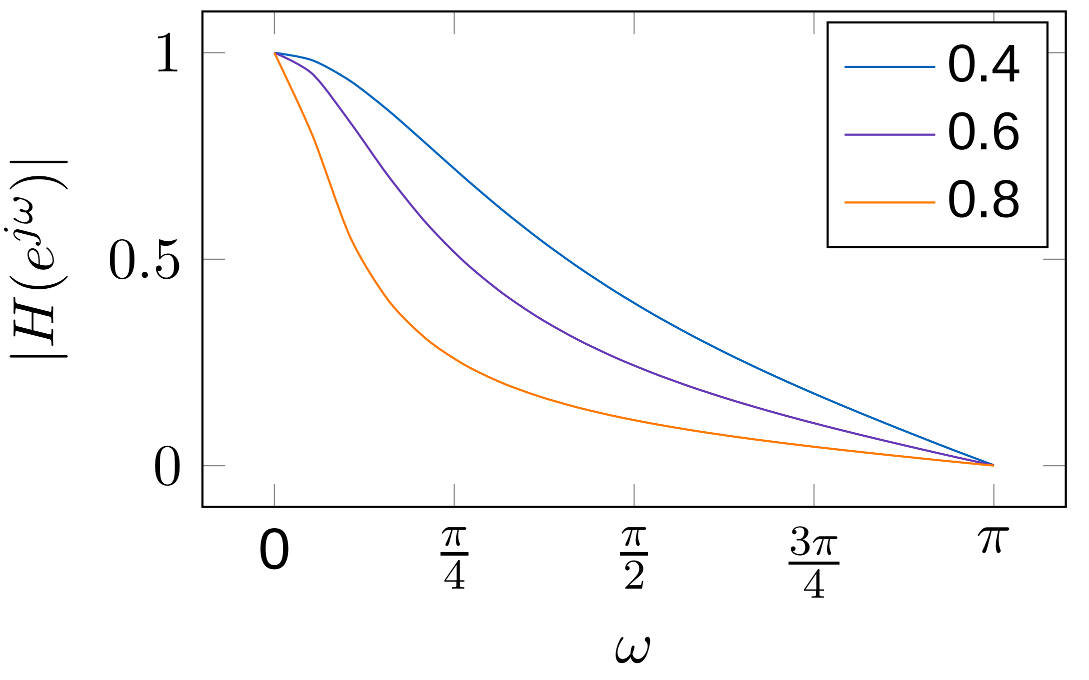


# Yksinkertainen IIR alipäästösuodatin

- 1. asteen IIR suodatin

$$H(z) = \frac{1-\alpha}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{(1-\alpha)^2(1+\cos\omega)}{2(1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega)}$$



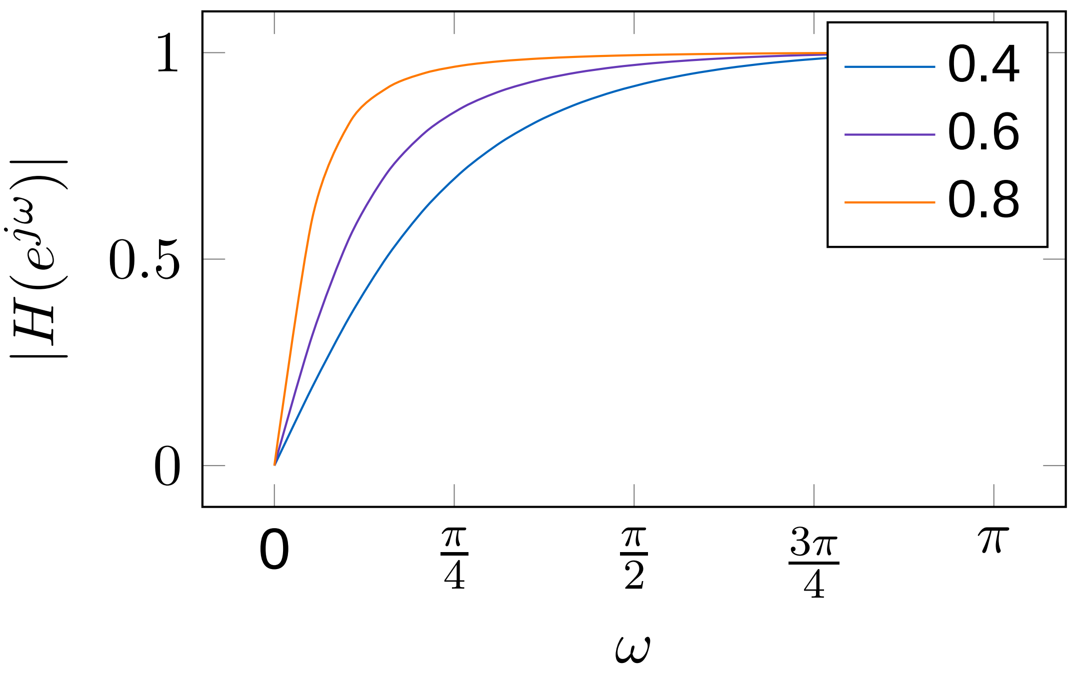

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

# Yksinkertainen IIR ylipäästösuodatin

- 1. asteen IIR suodatin

$$H(z) = \frac{1+\alpha}{2}\frac{1-z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{(1+\alpha)^2(1-\cos\omega)}{2(1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega)}$$

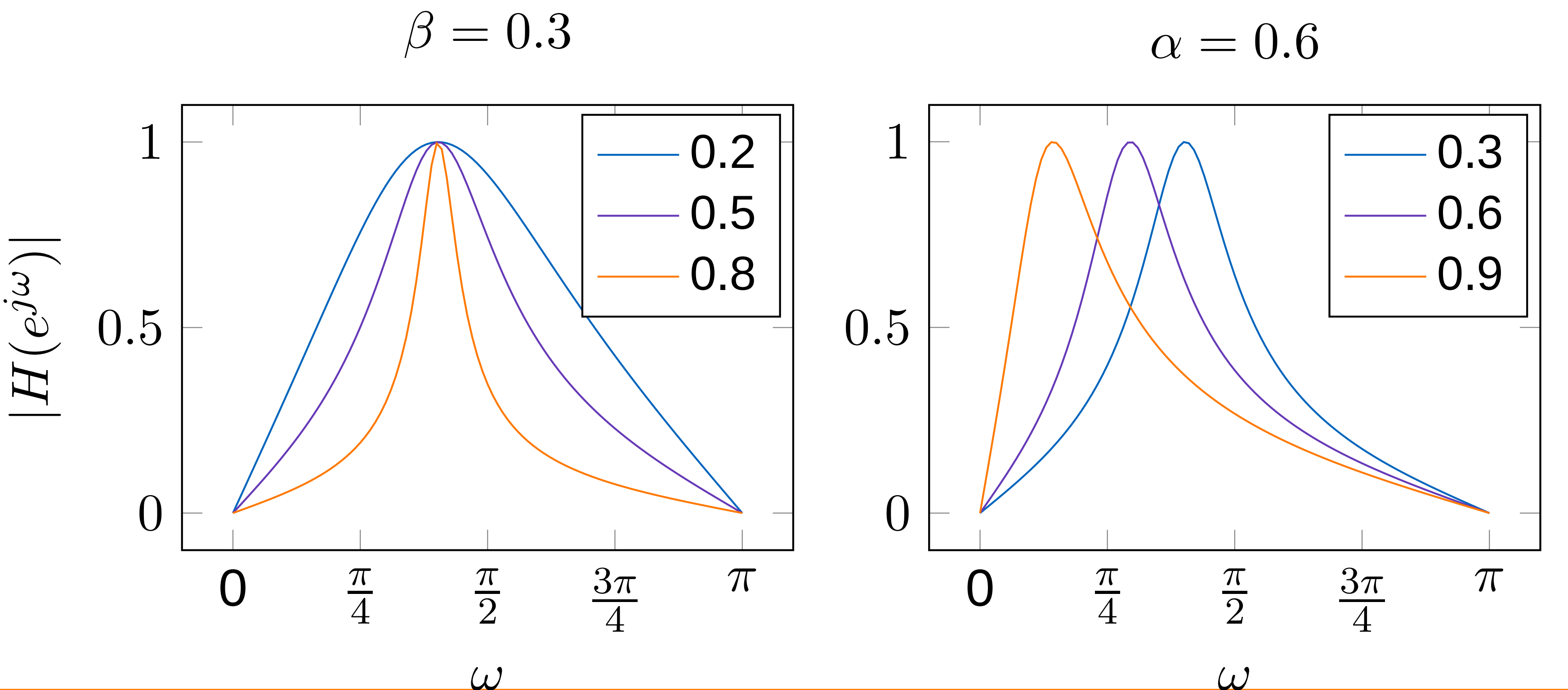


# Yksinkertainen IIR kaistanpäästösuodatin

- 2. asteen IIR suodatin

$$H(z) = \frac{1-\alpha}{2}\frac{1-z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)+\alpha z^{-2}}$$

vasteen maksimi taajuudella $w_0 = \arctan(\beta)$

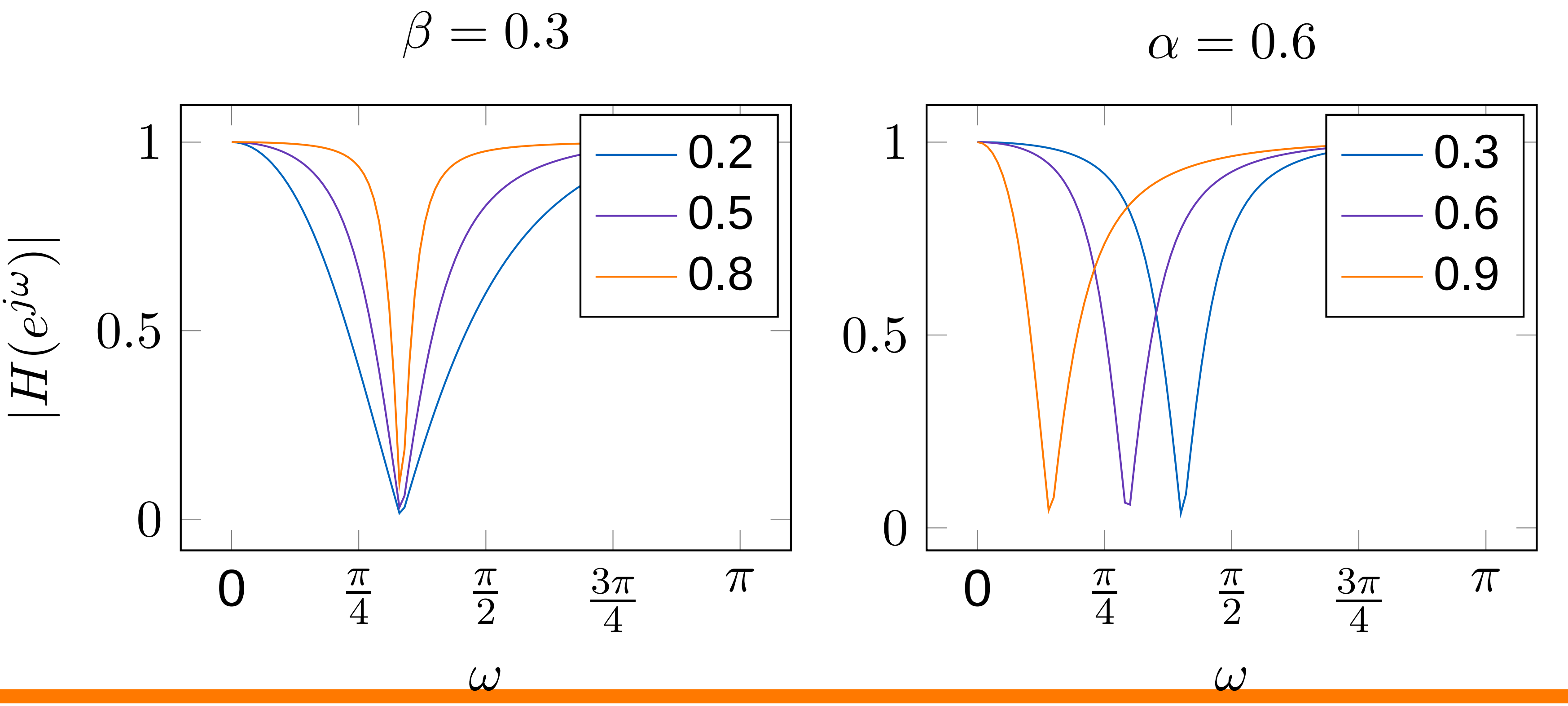


# Yksinkertainen IIR kaistanestosuodatin

- 2. asteen IIR suodatin

$$H(z) = \frac{1+\alpha}{2} \frac{1 - 2\beta z^{-1} + z^{-2}}{1 - \beta(1+\alpha) + \alpha z^{-2}}$$

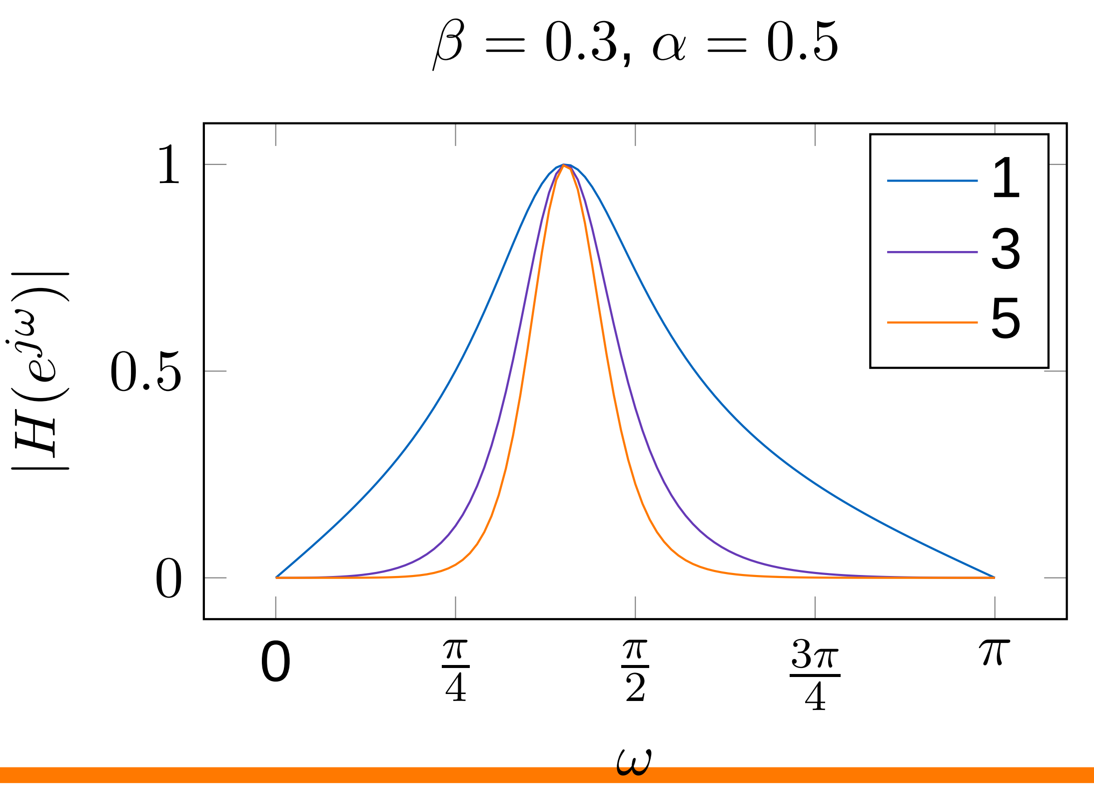
vasteen minimi taajuudella $w_0 = \arctan(\beta)$




Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

# Korkeamman asteen suodattimet

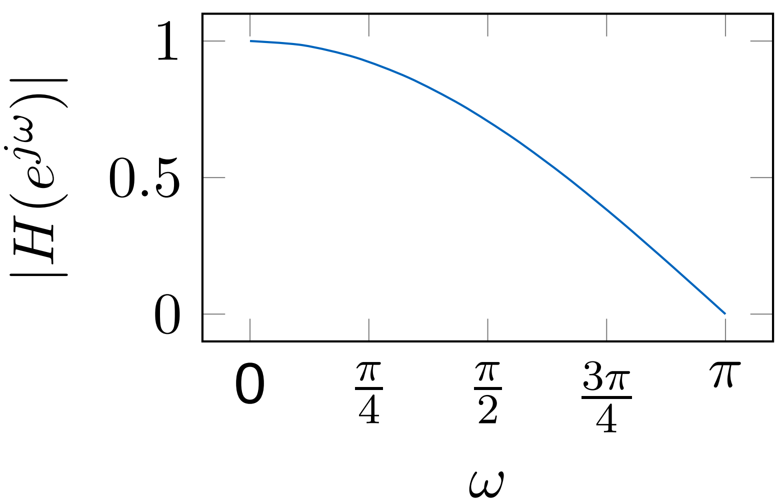
- Yksinkertainen keino toteuttaa korkeamman asteen suodattimia on kytkeä useampi yksinkertainen peräkkäin $H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z)$
- Yksityiskohtaisempia menetelmiä korkeamman asteen suodattimille seuraavilla luennoilla



# Yksinkertainen kampasuodatin

- Lyhentämällä taajuusvasteen jaksoa saadaan ali- tai ylipäästösuodattimesta kampasuodatin
- Operaatiota $\omega \leftarrow L\omega$ vastaa $z \leftarrow z^L$
- Esim. FIR-alipäästö: $H_{\text{LP}}(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})$, $H_{\text{comb}}(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-L})$

$$H(z) = \tfrac{1}{2}(1 + z^{-1})$$




$$H(z) = \tfrac{1}{2}(1 + z^{-6})$$