Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-C5230
Digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteet

Luento 7: Digitaalisten suodattimien rakenne

Luennon aiheet kirjassa

- Mitra, Digital Signal Processing: A Computer Based Approach, 8 Digital Filter Structures
  - 8.1 Block Diagram Representation
  - 8.2 Equivalent Structures
  - 8.3 Basic FIR Digital Filter Structures
  - 8.4 Basic IIR Digital Filter Structures
- Vaihtoehtoinen materiaali Rawat, Digital signal processing
  10 Realization of Digital Filters: 10.1-10.6

Oppimistavoitteet

- Siirtofunktion ja lohkokaavion yhteys
- Ekvivalenssi, kanonisuus, ja transpoosi
- Digitaalisen suodattimen rakennetyypit
- Eri suodatinrakenteiden yhteydet

Johdanto

- Aiemmalla luennolla keskiarvosuodattimelle sekä rekursiivinen että ei-rekursiivinen toteutus
- Myös muunlaisia suodattimien rakennetyyppejä
- Ideaalisessa maailmassa eri rakennetyypeillä sama vaste
- Todellisuudessa laskentatarkkuus (bittimäärä) vaikuttaa tulokseen
- Eri toteutuksissa eri määrä perusoperaatioita (viive, kertolasku)

Sisältö

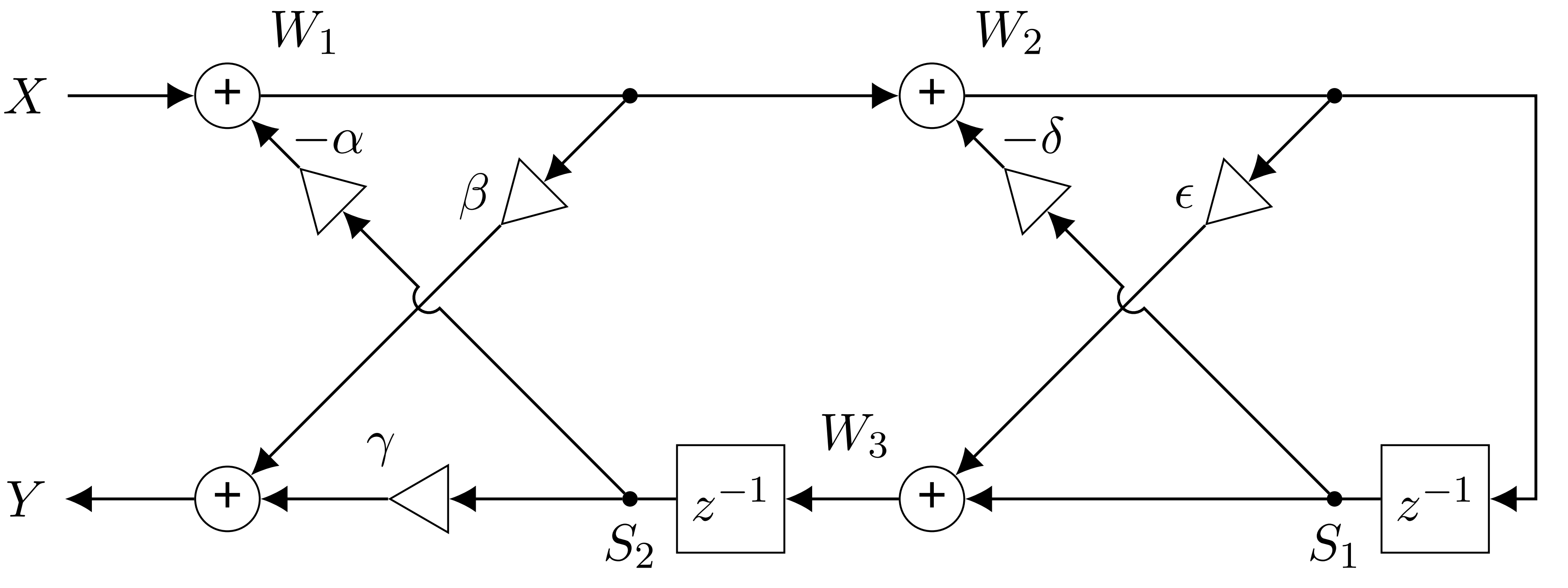
1. Lohkokaavioesitys ja suodatinrakenteet
2. FIR-suodattimen perusrakenteet
3. IIR-suodattimen perusrakenteet

Perusrakenne

- LTI-järjestelmän peruspalikat
  - viive
  - kertolasku
  - summa
  - modulaatio
- Sama suodatin voidaan toteuttaa monella eri tavalla

Suodattimen rakenne: esimerkki

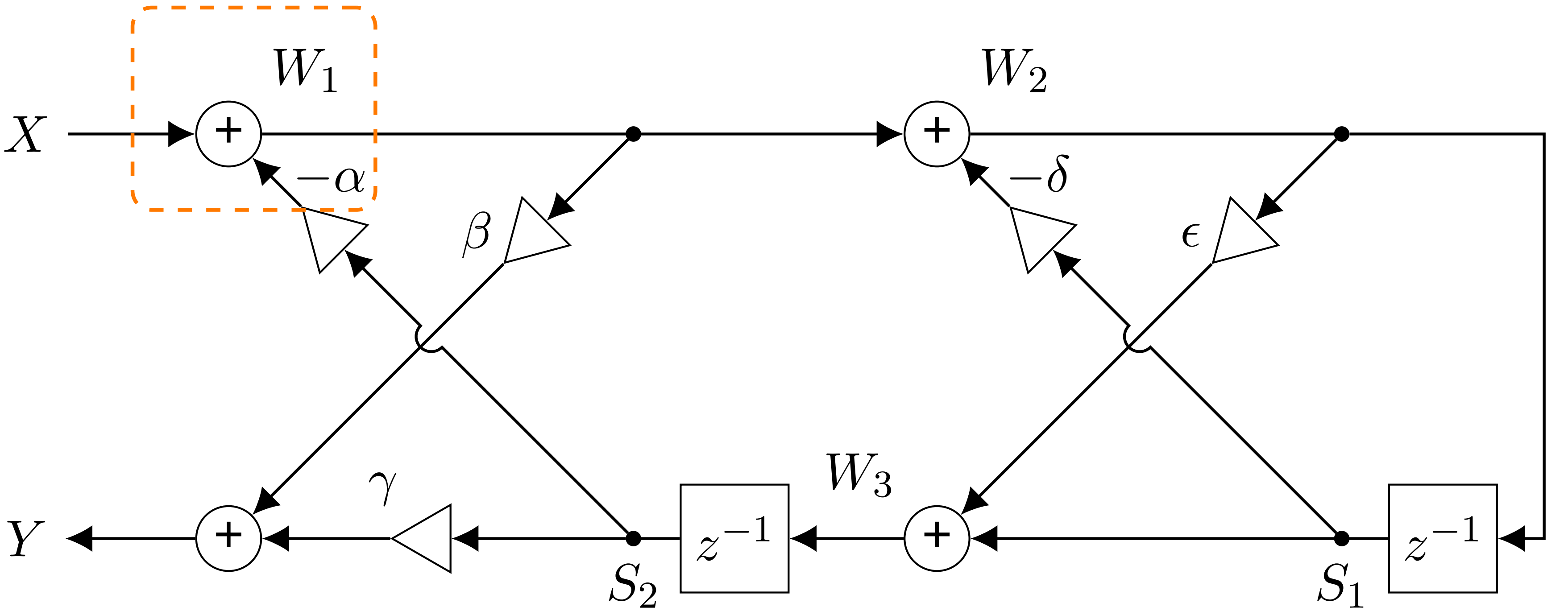
Selvitä seuraavan suodattimen siirtofunktio (z-riippuvuus jätetty merkitsemättä)



Suodattimen rakenne: esimerkki

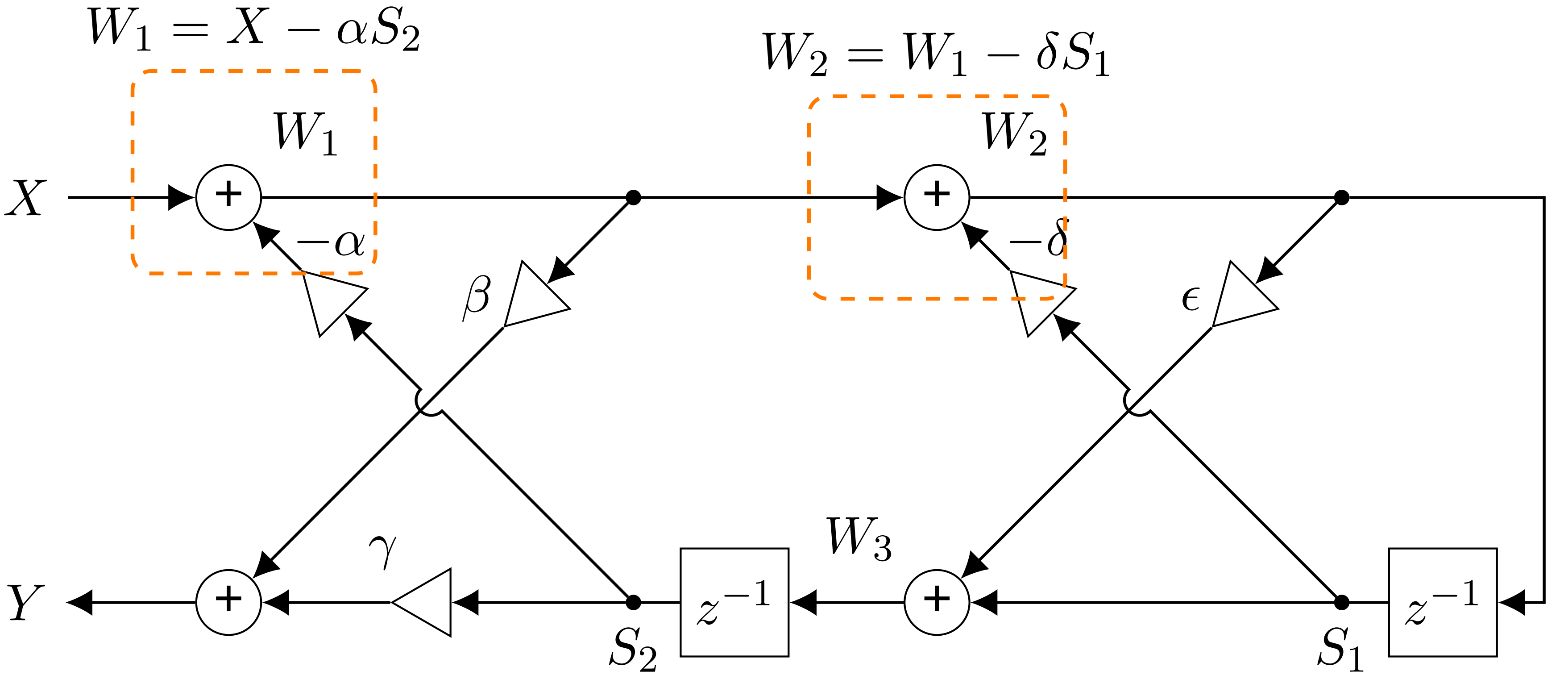
Selvitä seuraavan suodattimen siirtofunktio (z-riippuvuus jätetty merkitsemättä)

$$W_1 = X - \alpha S_2$$



Suodattimen rakenne: esimerkki

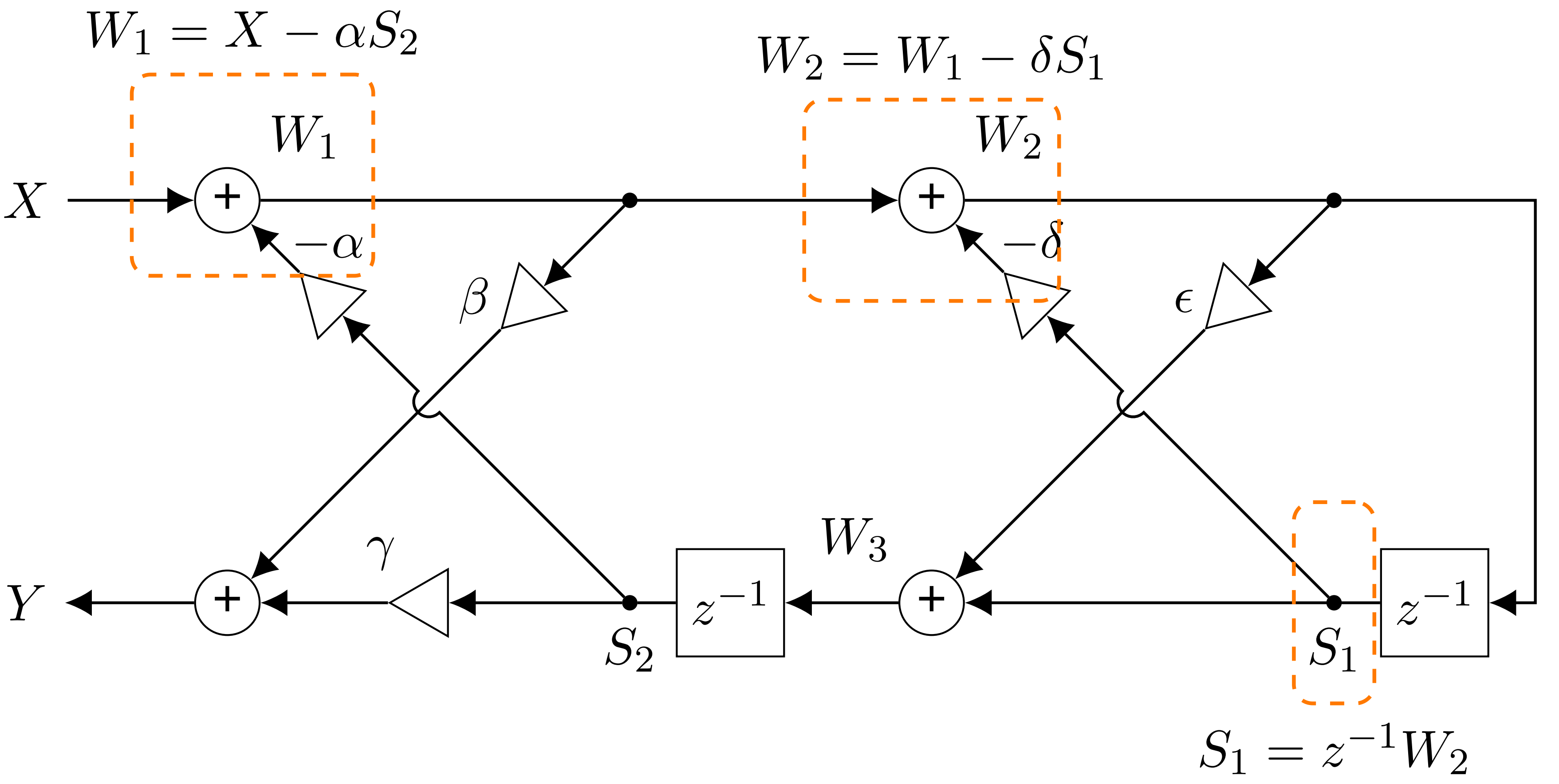
Selvitä seuraavan suodattimen siirtofunktio (z-riippuvuus jätetty merkitsemättä)



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

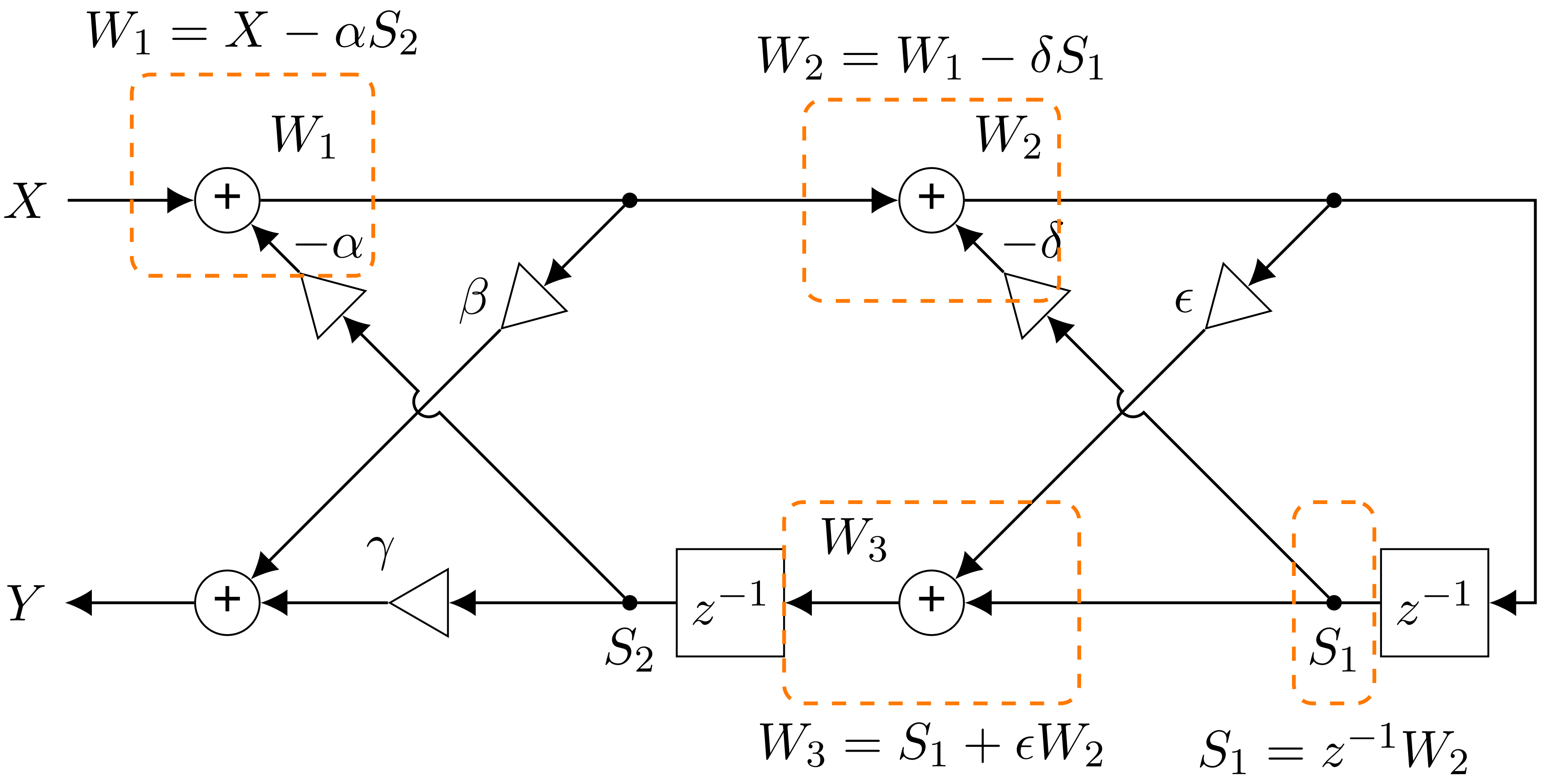
Suodattimen rakenne: esimerkki

Selvitä seuraavan suodattimen siirtofunktio (z-riippuvuus jätetty merkitsemättä)



Suodattimen rakenne: esimerkki

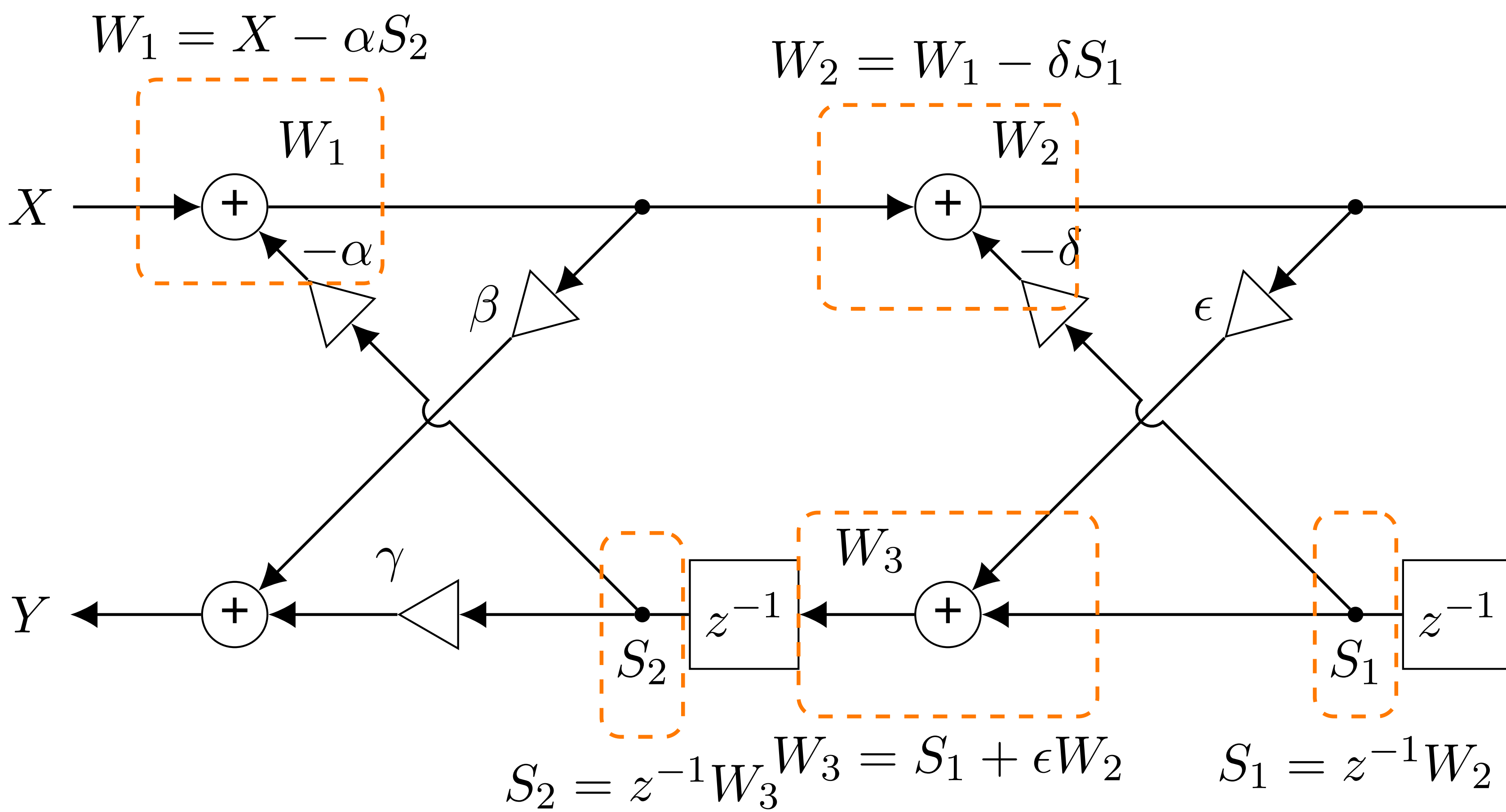
Selvitä seuraavan suodattimen siirtofunktio (z-riippuvuus jätetty merkitsemättä)



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

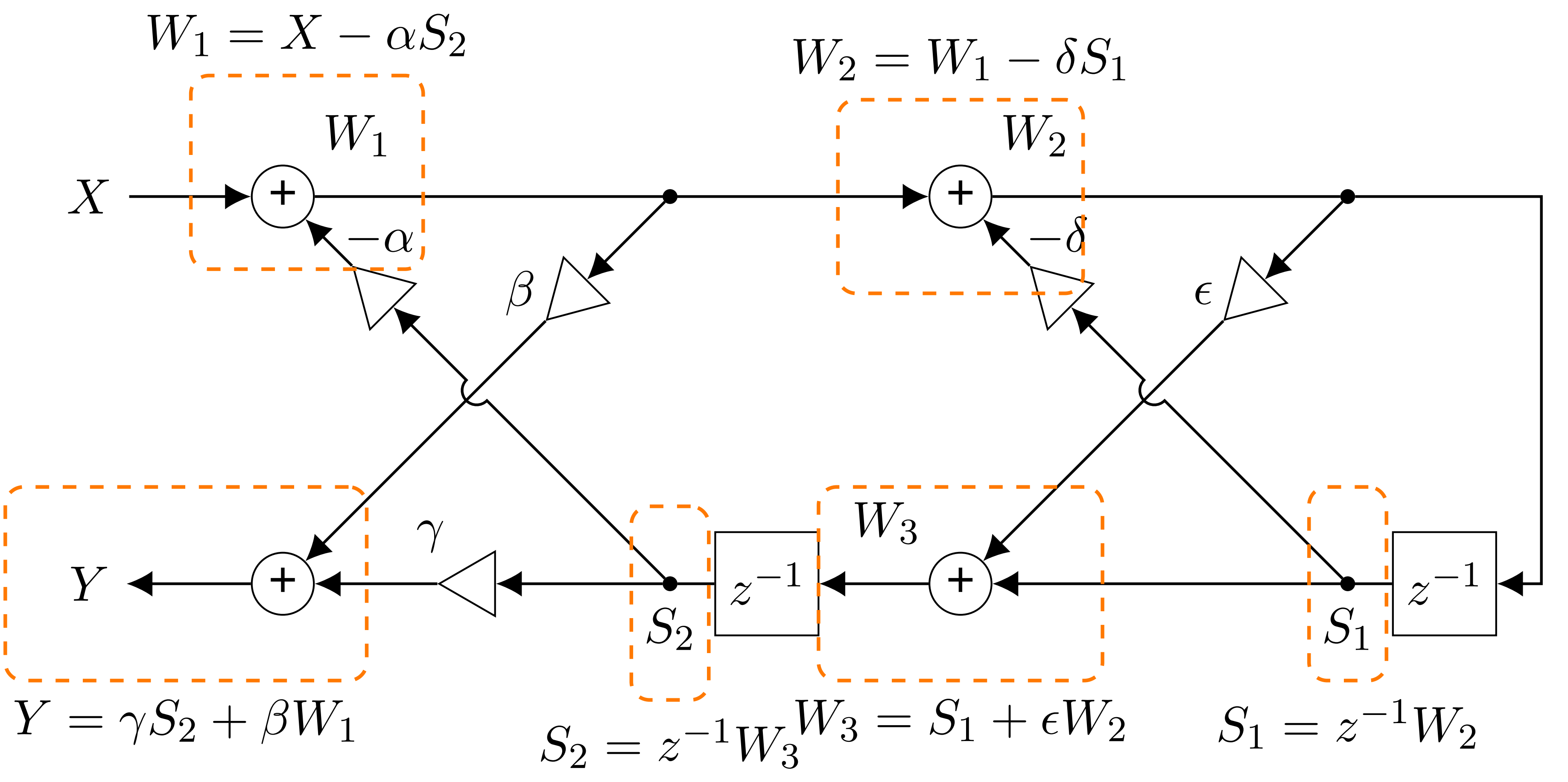
Suodattimen rakenne: esimerkki

Selvitä seuraavan suodattimen siirtofunktio (z-riippuvuus jätetty merkitsemättä)



Suodattimen rakenne: esimerkki

Selvitä seuraavan suodattimen siirtofunktio (z-riippuvuus jätetty merkitsemättä)



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Suodattimen rakenne: esimerkin ratkaisu

$$W_1 = X - \alpha z^{-1} W_3 \quad (1)$$

$$W_2 = W_1 - \delta z^{-1} W_2 \quad (2)$$

$$W_3 = z^{-1} W_2 - \epsilon W_2 \quad (3)$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3 \quad (4)$$

(5)

(6)

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Suodattimen rakenne: esimerkin ratkaisu

$$W_1 = X - \alpha z^{-1} W_3 \qquad (1)$$

$$W_2 = W_1 - \delta z^{-1} W_2 \qquad (2)$$

$$W_3 = z^{-1} W_2 - \epsilon W_2 \qquad (3)$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3 \qquad (4)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} W_1 = (1 + \delta z^{-1}) W_2 \qquad (5)$$

(6)

Suodattimen rakenne: esimerkin ratkaisu

$$W_1 = X - \alpha z^{-1} W_3 \qquad (1)$$

$$W_2 = W_1 - \delta z^{-1} W_2 \qquad (2)$$

$$W_3 = z^{-1} W_2 - \epsilon W_2 \qquad (3)$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3 \qquad (4)$$

$$\xRightarrow{(2)} W_1 = (1 + \delta z^{-1}) W_2 \qquad (5)$$

$$\xRightarrow{(3),(5)} W_3 = (\epsilon + z^{-1}) W_2 = \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}} W_1 \qquad (6)$$

Suodattimen rakenne: esimerkin ratkaisu

$$
\begin{aligned}
W_1 &= X - \alpha z^{-1} W_3 && (1) \quad \xRightarrow{(1),(6)} X = W_1 + \alpha z^{-1} W_3 \\
W_2 &= W_1 - \delta z^{-1} W_2 && (2) \\
W_3 &= z^{-1} W_2 - \epsilon W_2 && (3) \\
Y &= \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3 && (4)
\end{aligned}
$$

$$
\xRightarrow{(2)} W_1 = (1 + \delta z^{-1}) W_2 \qquad (5)
$$

$$
\begin{aligned}
\xRightarrow{(3),(5)} W_3 &= (\epsilon + z^{-1}) W_2 \\
&= \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}} W_1 && (6)
\end{aligned}
$$

Suodattimen rakenne: esimerkin ratkaisu

$$W_1 = X - \alpha z^{-1} W_3 \qquad (1)$$

$$W_2 = W_1 - \delta z^{-1} W_2 \qquad (2)$$

$$W_3 = z^{-1} W_2 - \epsilon W_2 \qquad (3)$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3 \qquad (4)$$

$$\xrightarrow{(1),(6)} X = W_1 + \alpha z^{-1} W_3$$

$$= W_1 \left(1 + \alpha z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} W_1 = (1 + \delta z^{-1}) W_2 \qquad (5)$$

$$\xrightarrow{(3),(5)} W_3 = (\epsilon + z^{-1}) W_2$$

$$= \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}} W_1 \qquad (6)$$

Suodattimen rakenne: esimerkin ratkaisu

$$W_1 = X - \alpha z^{-1} W_3 \qquad (1) \quad \xRightarrow{(1),(6)} \quad X = W_1 + \alpha z^{-1} W_3$$

$$W_2 = W_1 - \delta z^{-1} W_2 \qquad (2) \qquad\qquad = W_1 \left(1 + \alpha z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)$$

$$W_3 = z^{-1} W_2 - \epsilon W_2 \qquad (3)$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3 \qquad (4) \quad \xRightarrow{(4),(6)} \quad Y = W_1 \left(\beta + \gamma z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)$$

$$\xRightarrow{(2)} W_1 = (1 + \delta z^{-1}) W_2 \qquad (5)$$

$$\xRightarrow{(3),(5)} W_3 = (\epsilon + z^{-1}) W_2$$

$$= \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}} W_1 \qquad (6)$$

Suodattimen rakenne: esimerkin ratkaisu

$$W_1 = X - \alpha z^{-1} W_3 \qquad (1) \quad \xrightarrow{(1),(6)} \quad X = W_1 + \alpha z^{-1} W_3 = W_1 \left(1 + \alpha z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)$$

$$W_2 = W_1 - \delta z^{-1} W_2 \qquad (2)$$

$$W_3 = z^{-1} W_2 - \epsilon W_2 \qquad (3)$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3 \qquad (4) \quad \xrightarrow{(4),(6)} \quad Y = W_1 \left(\beta + \gamma z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} W_1 = (1 + \delta z^{-1}) W_2 \qquad (5)$$

$$\xrightarrow{(3),(5)} W_3 = (\epsilon + z^{-1}) W_2 = \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}} W_1 \qquad (6)$$

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{W_1 \left(\beta + \gamma z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)}{W_1 \left(1 + \alpha z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)}$$

Suodattimen rakenne: esimerkin ratkaisu

$$W_1 = X - \alpha z^{-1} W_3 \qquad (1) \quad \xRightarrow{(1),(6)} \quad X = W_1 + \alpha z^{-1} W_3$$

$$W_2 = W_1 - \delta z^{-1} W_2 \qquad (2) \qquad\qquad = W_1 \left(1 + \alpha z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)$$

$$W_3 = z^{-1} W_2 - \epsilon W_2 \qquad (3)$$

$$Y = \beta W_1 + \gamma z^{-1} W_3 \qquad (4) \quad \xRightarrow{(4),(6)} \quad Y = W_1 \left(\beta + \gamma z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)$$

$$\xRightarrow{(2)} \quad W_1 = (1 + \delta z^{-1}) W_2 \qquad (5)$$

$$\xRightarrow{(3),(5)} \quad W_3 = (\epsilon + z^{-1}) W_2$$

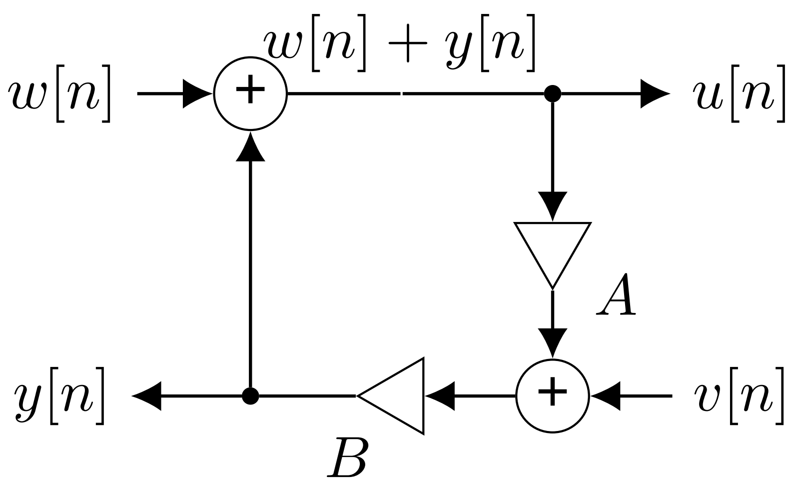
$$= \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}} W_1 \qquad (6)$$

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{W_1 \left(\beta + \gamma z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)}{W_1 \left(1 + \alpha z^{-1} \frac{\epsilon + z^{-1}}{1 + \delta z^{-1}}\right)}$$

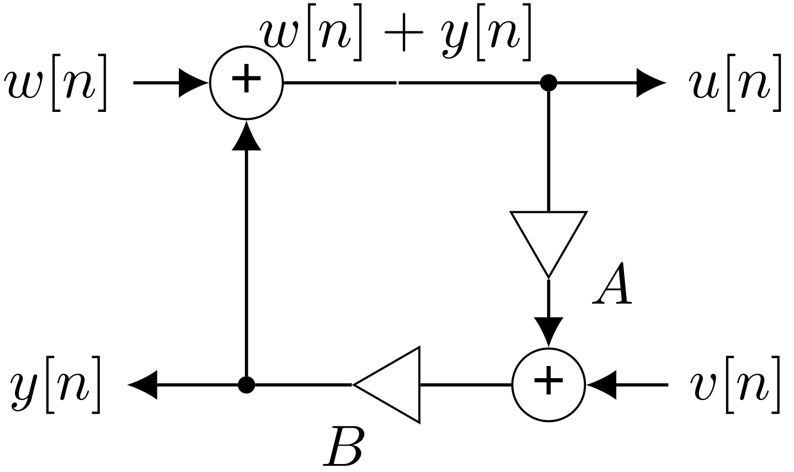
$$= \frac{\beta + (\beta\delta + \gamma\epsilon) z^{-1} + \gamma z^{-2}}{1 + (\delta + \alpha\epsilon) z^{-1} + \alpha z^{-2}}$$

Nollaviivesilmukka

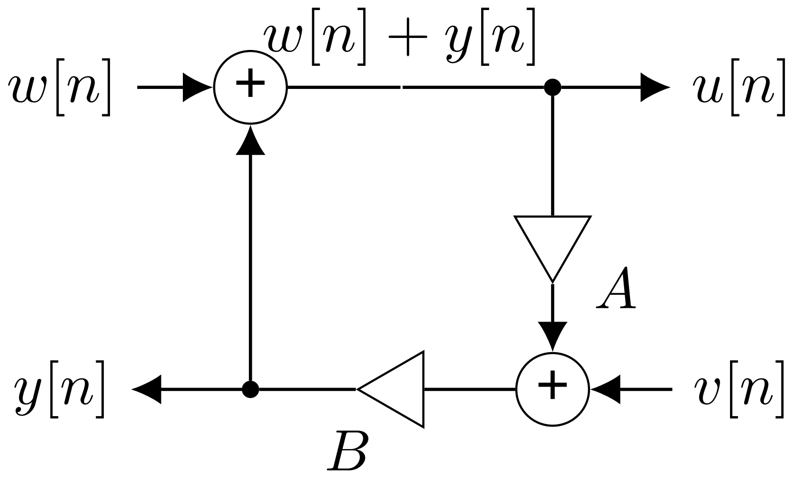
- Lohkokaavio saattaa sisältää silmukan, jossa ei ole viivettä (engl. delay-free loop, zero-delay feedback)
- Ei toteutettavissa digitaalisesti (analogisissa piireissä ok)
- Voidaan korvata vastaavalla rakenteella
- Etsimiseen ja poistamiseen olemassa algoritmeja



Nollaviivesilmukka: esimerkki

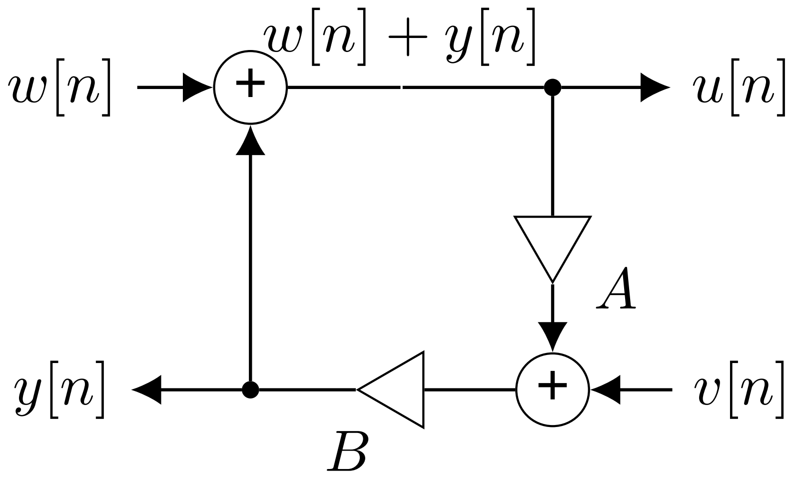


Nollaviivesilmukka: esimerkki



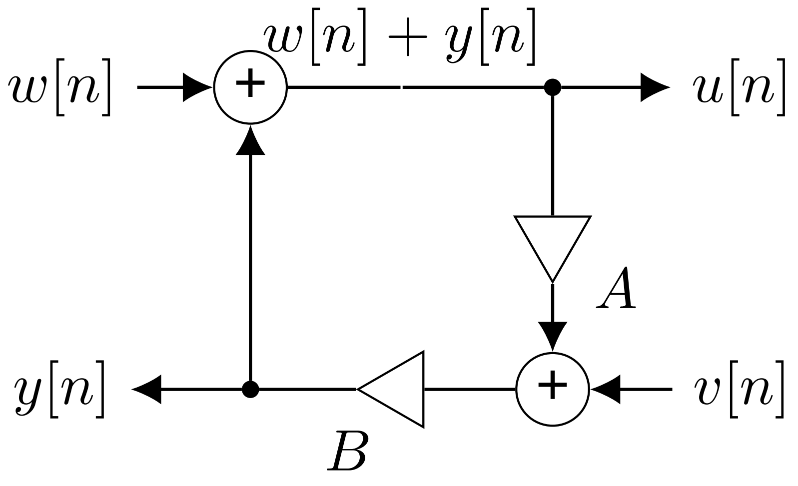
$$y[n] = B(Au[n] + v[n])$$

Nollaviivesilmukka: esimerkki



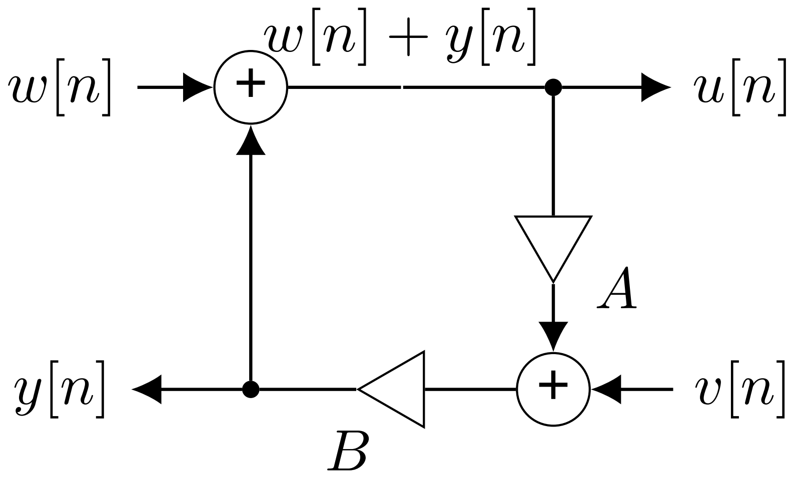
$$
\begin{aligned}
y[n] &= B(Au[n] + v[n]) \\
&= B(A(w[n] + y[n]) + v[n])
\end{aligned}
$$

Nollaviivesilmukka: esimerkki



$$
\begin{aligned}
y[n] &= B(Au[n] + v[n]) \\
&= B(A(w[n] + y[n]) + v[n]) \\
&= ABy[n] + ABw[n] + Bv[n])
\end{aligned}
$$

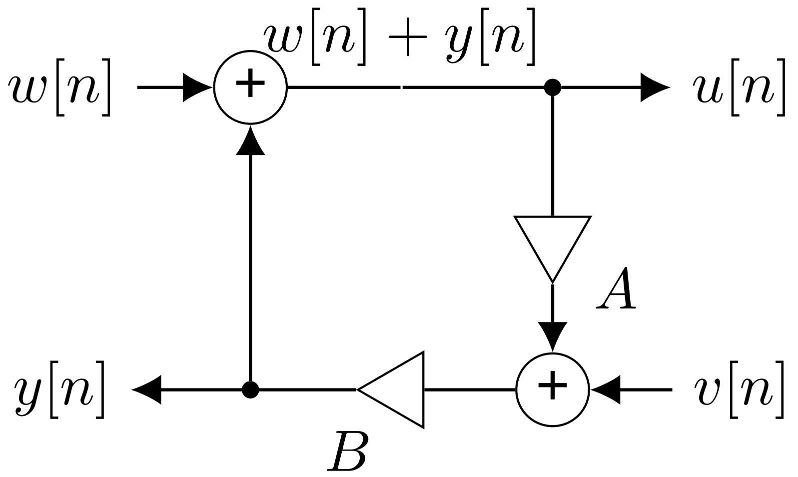
Nollaviivesilmukka: esimerkki



$$
\begin{aligned}
y[n] &= B(Au[n] + v[n]) \\
&= B(A(w[n] + y[n]) + v[n]) \\
&= ABy[n] + ABw[n] + Bv[n])
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow y[n] = \frac{1}{1 - AB}(ABw[n] + Bv[n])
$$

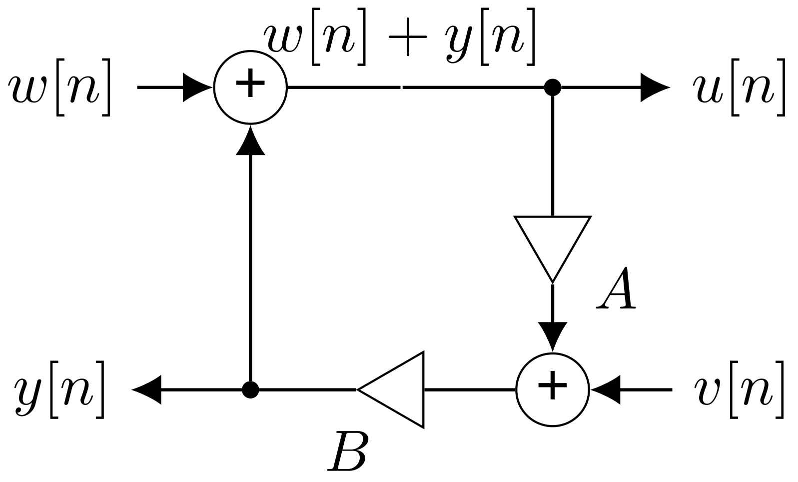
Nollaviivesilmukka: esimerkki



$$u[n] = w[n] + y[n]$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= B(Au[n] + v[n]) \\
&= B(A(w[n] + y[n]) + v[n]) \\
&= ABy[n] + ABw[n] + Bv[n]) \\
\Rightarrow y[n] &= \frac{1}{1 - AB}(ABw[n] + Bv[n])
\end{aligned}$$

Nollaviivesilmukka: esimerkki

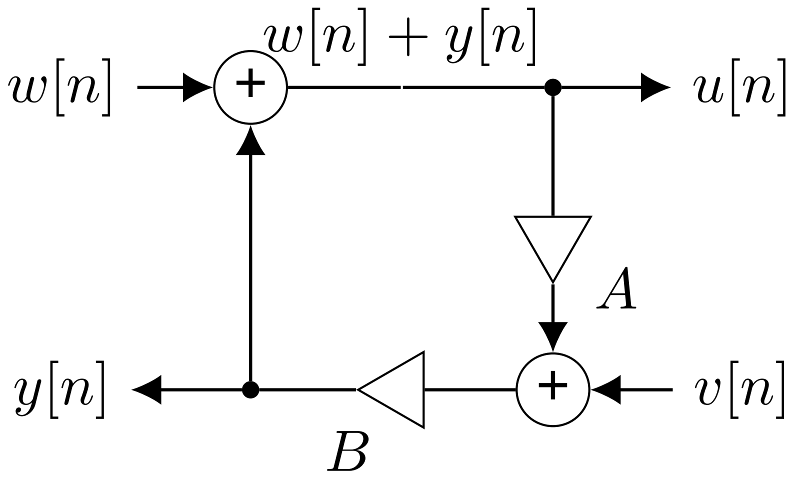


$$
\begin{aligned}
u[n] &= w[n] + y[n] \\
&= w[n] + \frac{1}{1 - AB}(ABw[n] + Bv[n])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y[n] &= B(Au[n] + v[n]) \\
&= B(A(w[n] + y[n]) + v[n]) \\
&= ABy[n] + ABw[n] + Bv[n])
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow y[n] = \frac{1}{1 - AB}(ABw[n] + Bv[n])
$$

Nollaviivesilmukka: esimerkki

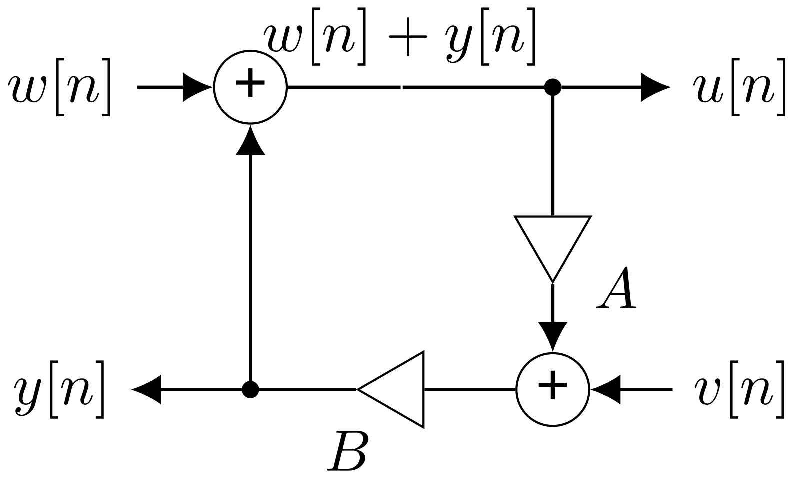


$$
\begin{aligned}
u[n] &= w[n] + y[n] \\
&= w[n] + \frac{1}{1 - AB}(ABw[n] + Bv[n]) \\
&= \frac{1}{1 - AB}(w[n] + Bv[n])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y[n] &= B(Au[n] + v[n]) \\
&= B(A(w[n] + y[n]) + v[n]) \\
&= ABy[n] + ABw[n] + Bv[n])
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow y[n] = \frac{1}{1 - AB}(ABw[n] + Bv[n])
$$

Nollaviivesilmukka: esimerkki

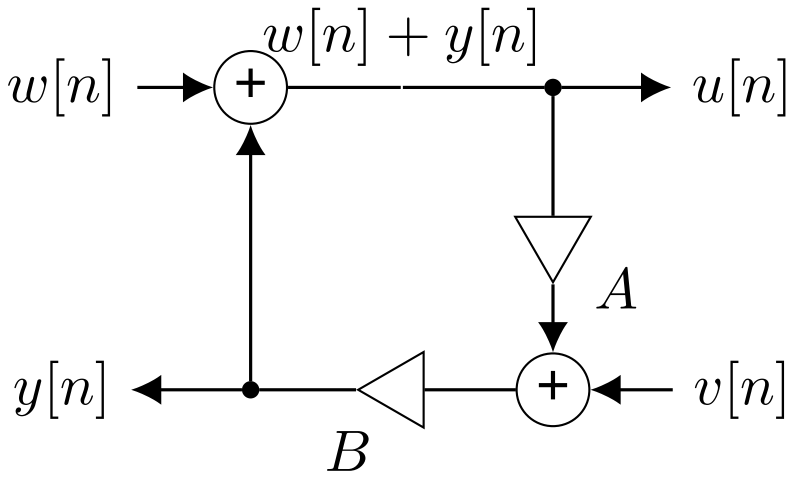


$$
\begin{aligned}
u[n] &= w[n] + y[n] \\
&= w[n] + \frac{1}{1-AB}(ABw[n] + Bv[n]) \\
&= \frac{1}{1-AB}(w[n] + Bv[n]) \\
y[n] &= u[n] - w[n]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y[n] &= B(Au[n] + v[n]) \\
&= B(A(w[n] + y[n]) + v[n]) \\
&= ABy[n] + ABw[n] + Bv[n])
\end{aligned}
$$

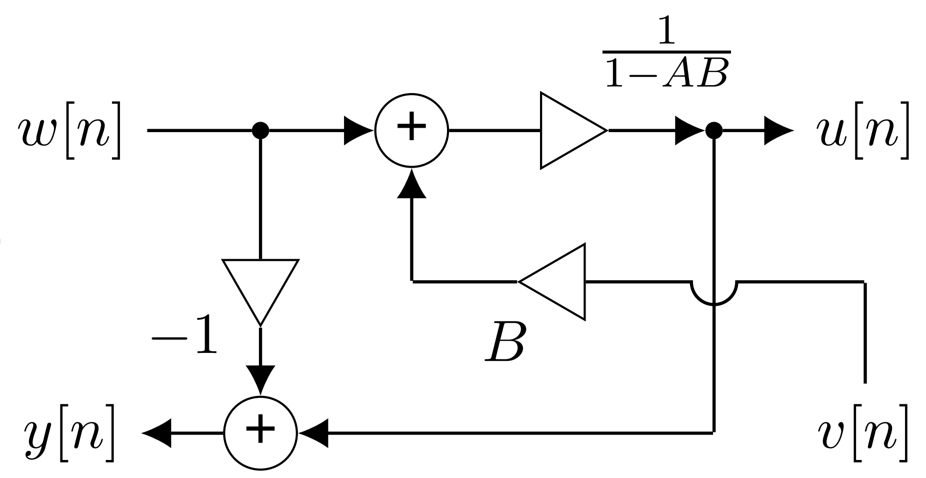
$$
\Rightarrow y[n] = \frac{1}{1-AB}(ABw[n] + Bv[n])
$$

Nollaviivesilmukka: esimerkki



$$
\begin{aligned}
u[n] &= w[n] + y[n] \\
&= w[n] + \frac{1}{1 - AB}(ABw[n] + Bv[n]) \\
&= \frac{1}{1 - AB}(w[n] + Bv[n]) \\
y[n] &= u[n] - w[n]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y[n] &= B(Au[n] + v[n]) \\
&= B(A(w[n] + y[n]) + v[n]) \\
&= ABy[n] + ABw[n] + Bv[n]) \\
\Rightarrow y[n] &= \frac{1}{1 - AB}(ABw[n] + Bv[n])
\end{aligned}
$$



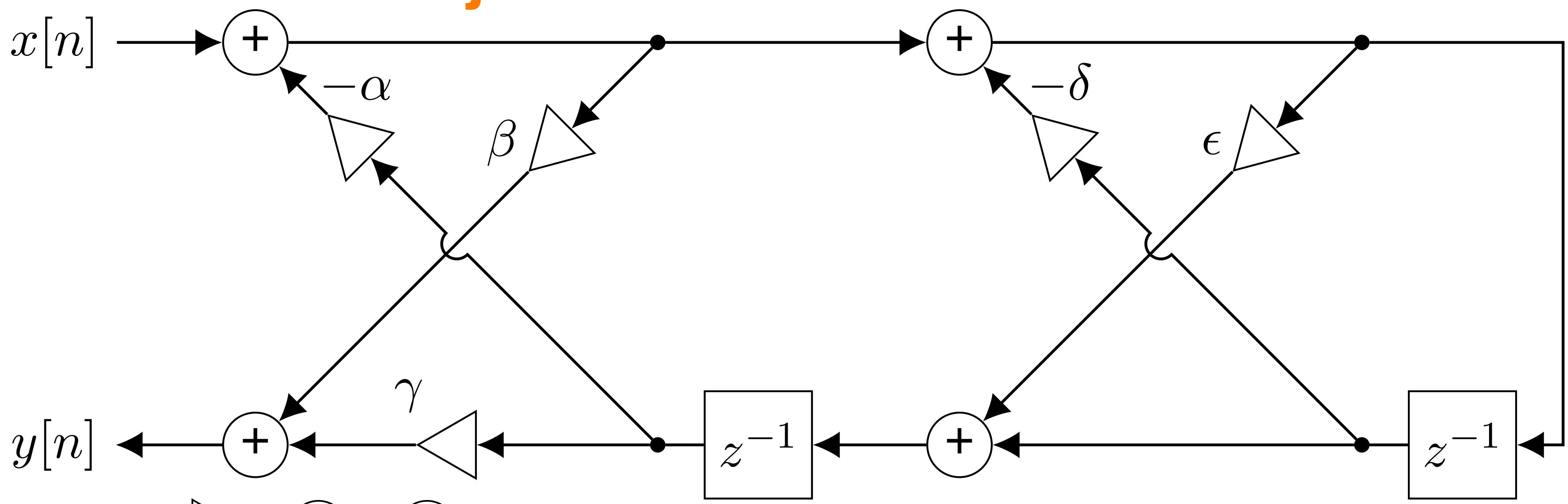
Ekvivalentti rakenne

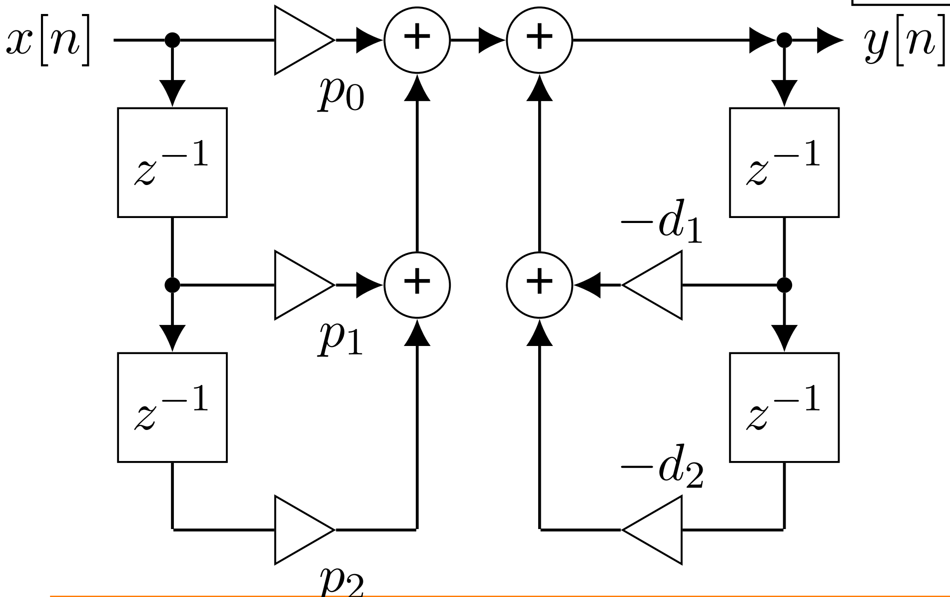
- kaksi suodatinrakennetta ovat ekvivalentteja (engl. equivalent), jos niillä on sama siirtofunktio

Kanoninen rakenne

- Suodatinrakenne on kanoninen (engl. canonic), jos viiveyksikköjen määrä on yhtäsuuri kuin suodattimen asteluku
- Jos viiveyksikköjä on enemmän, suodatin on ei-kanoninen (engl. noncanonic)

Ekvivalenttius ja kanonisuus: esimerkki





- Ekvivalentit, kun
  - $H(z) = \frac{\beta+(\beta\delta+\gamma\epsilon)z^{-1}+\gamma z^{-2}}{1+(\delta+\alpha\epsilon)z^{-1}+\alpha z^{-2}}$
  - $p_0 = \beta,\ p_1 = \beta\delta + \gamma\epsilon,\ p_2 = \gamma$
  - $d_1 = \delta + \alpha\epsilon,\ d_2 = \alpha$
- ylempi kanoninen, alempi ei

Sisältö

1. Lohkokaavioesitys ja suodatinrakenteet
2. FIR-suodattimen perusrakenteet
3. IIR-suodattimen perusrakenteet

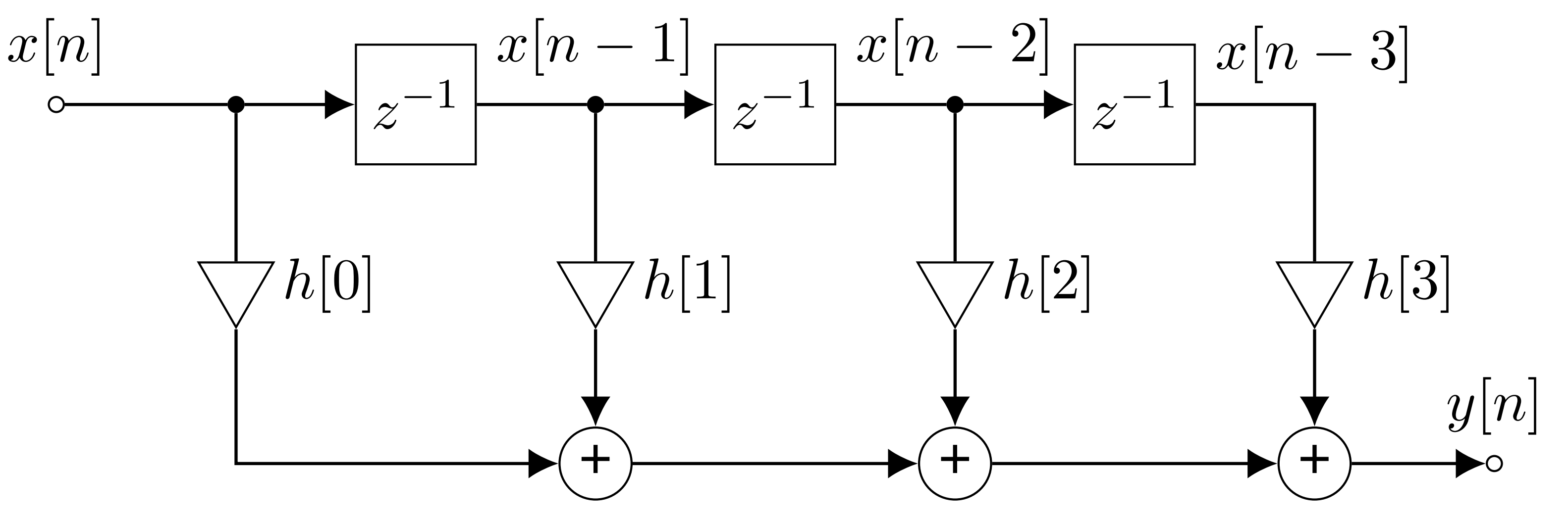
FIR-suodatin

- Kausaalilla asteen M FIR-suodattimella
  - vaste $y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$
  - siirtofunktio $H(z) = \sum_{k=0}^{M} h[k]z^{-k}$
- Vaste on painotettu summa syötteestä
- Siirtofunktio on z^{-1}:n polynomi

FIR-suodattimen suora muoto

- Suora muoto (engl. direct form) toteutus kuten konvoluutiosummassa
- Muita nimiä transversal filter, tapped delay line
- Aina kanoninen rakenne

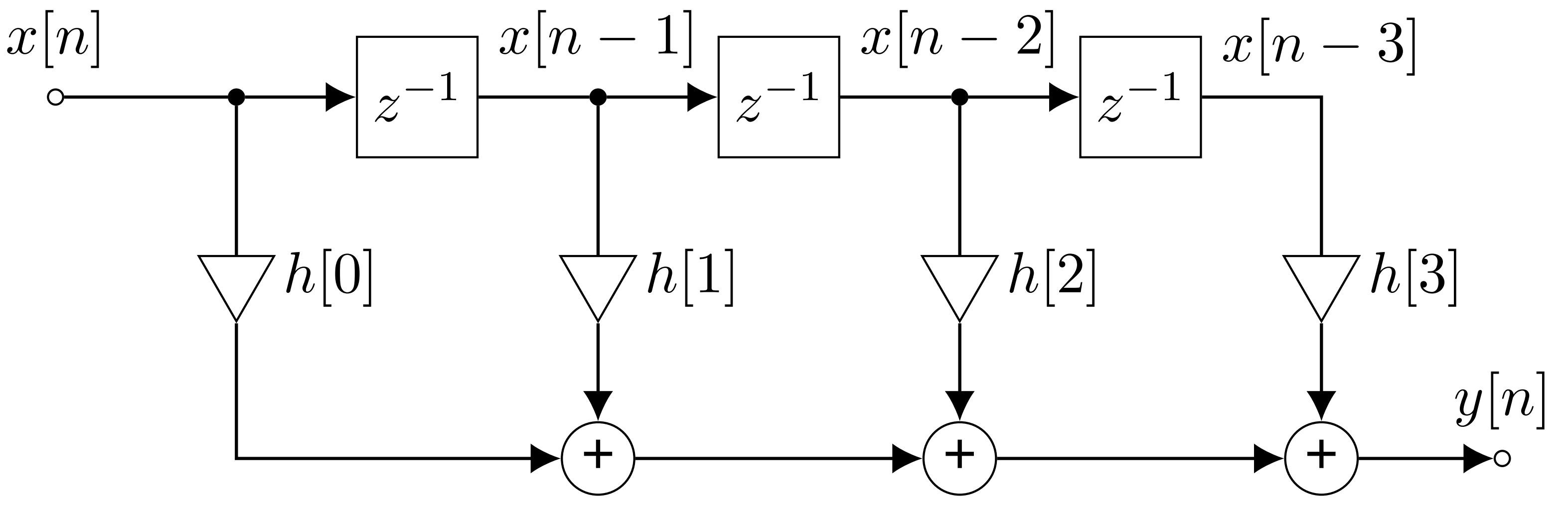
$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + h[3]x[n-3]$$



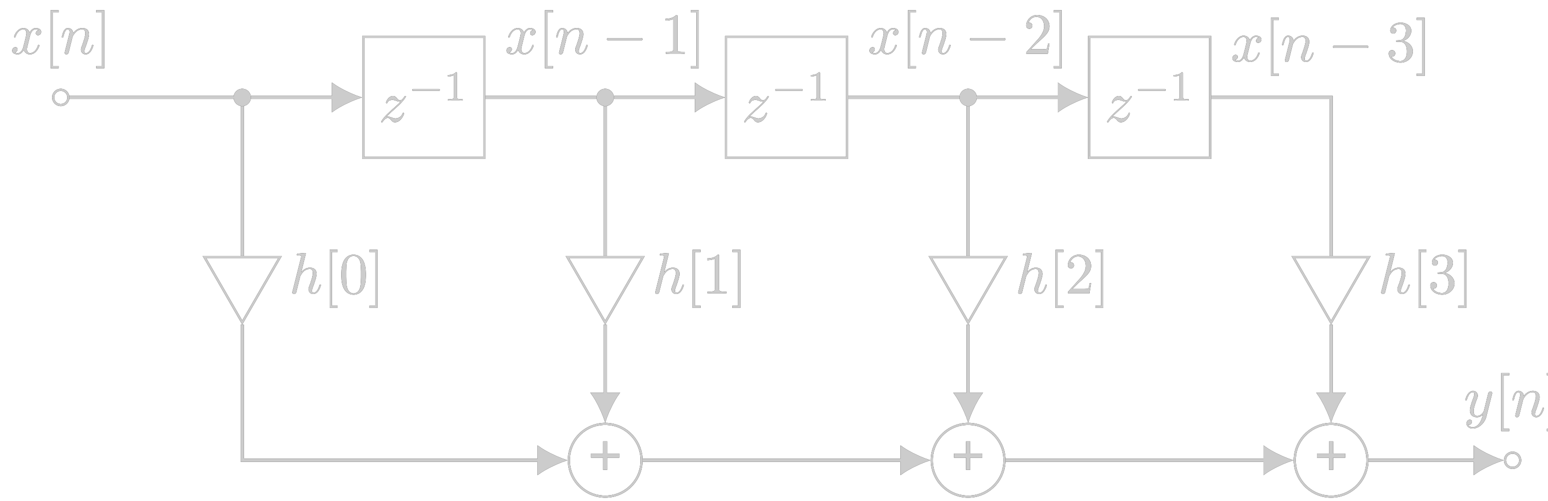
Transpoosi

- Kaikkien suodattimien operaatioiden järjestys voidaan vaihtaa transpoosilla
  1. vaihda kaikkien yhteyksien ja kertojien suunta
  2. vaihda haarautumiset summaajiin ja toisin päin
  3. vaihda syötteen ja vasteen paikka
- Transponoitu rakenne on ekvivalentti alkuperäisen kanssa

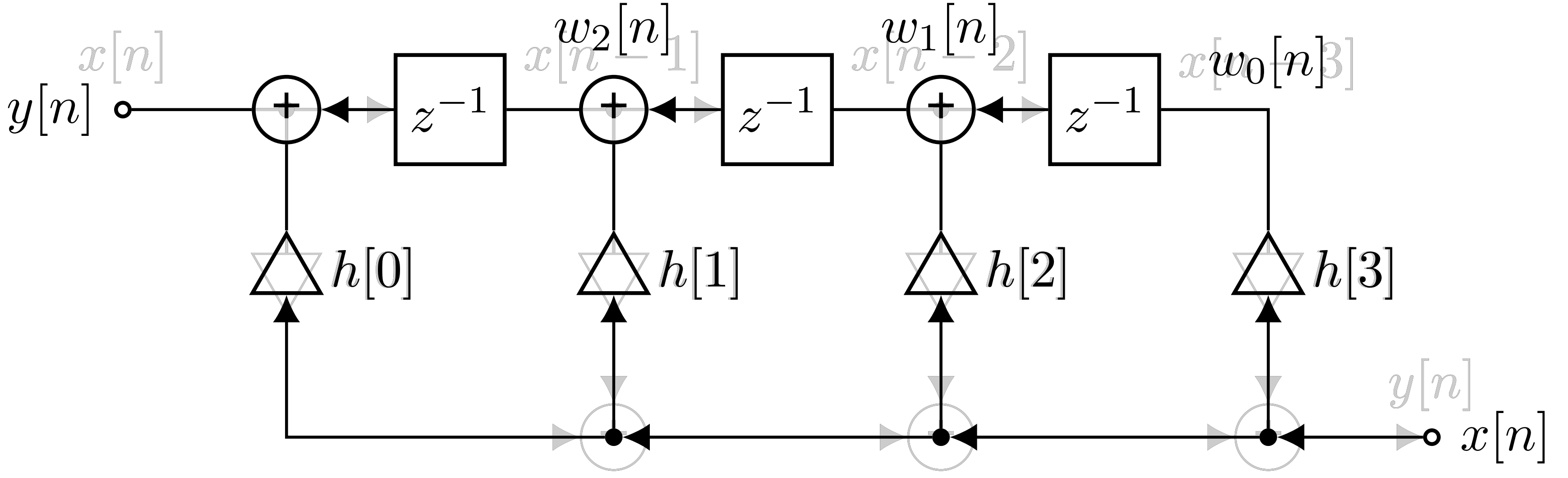
Transpoosi: esimerkki



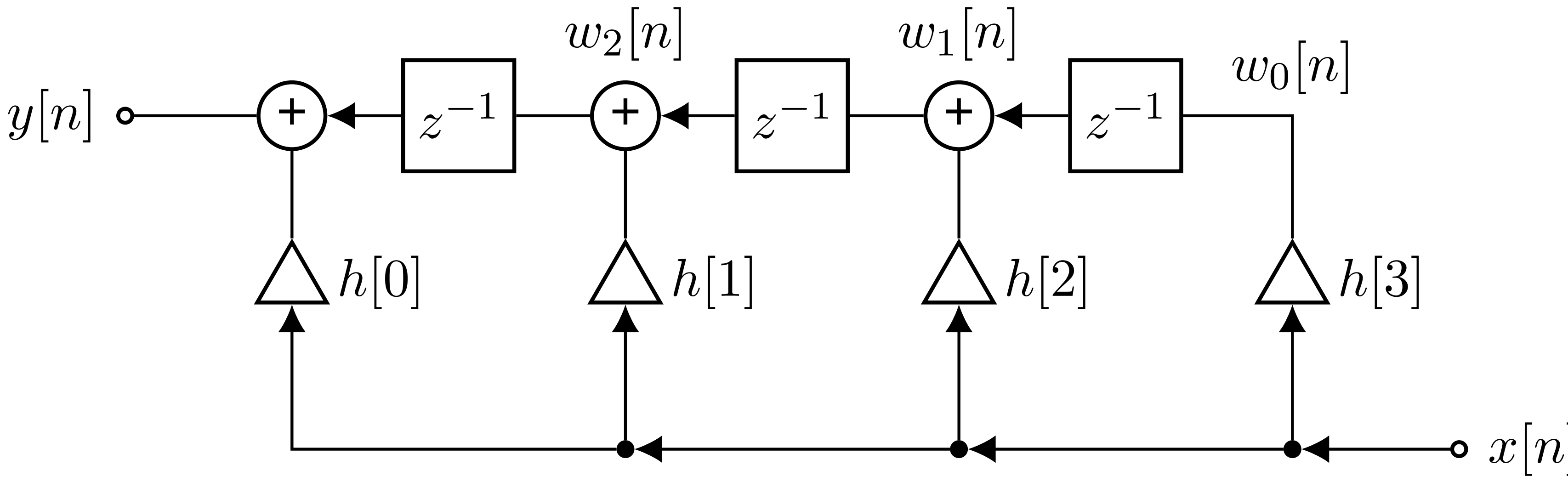
Transpoosi: esimerkki



Transpoosi: esimerkki

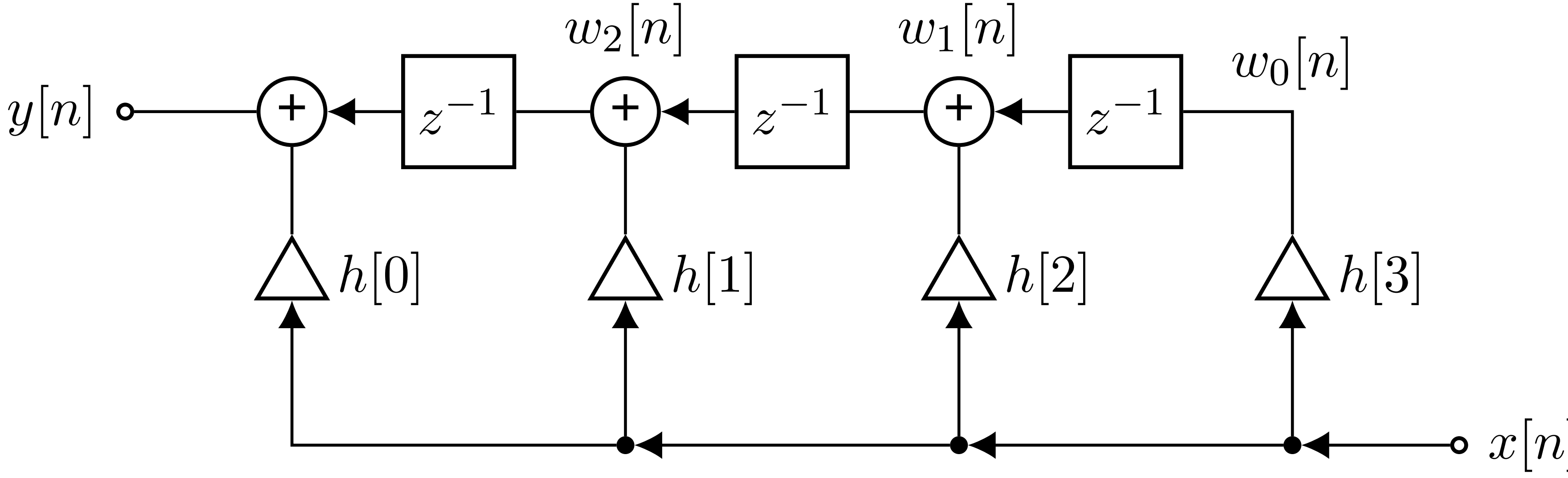


Transpoosi: esimerkki



$$w_0[n] = h[3]x[n]$$

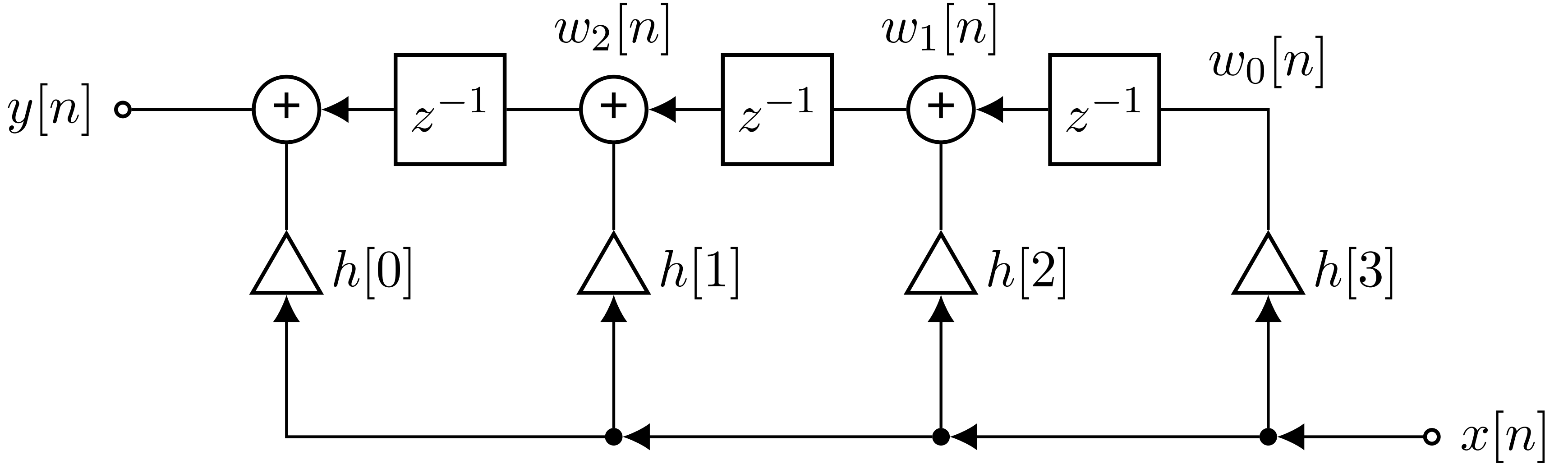
Transpoosi: esimerkki



$$w_0[n] = h[3]x[n]$$

$$w_1[n] = w_0[n-1] + h[2]x[n] = h[2]x[n] + h[3]x[n-1]$$

Transpoosi: esimerkki



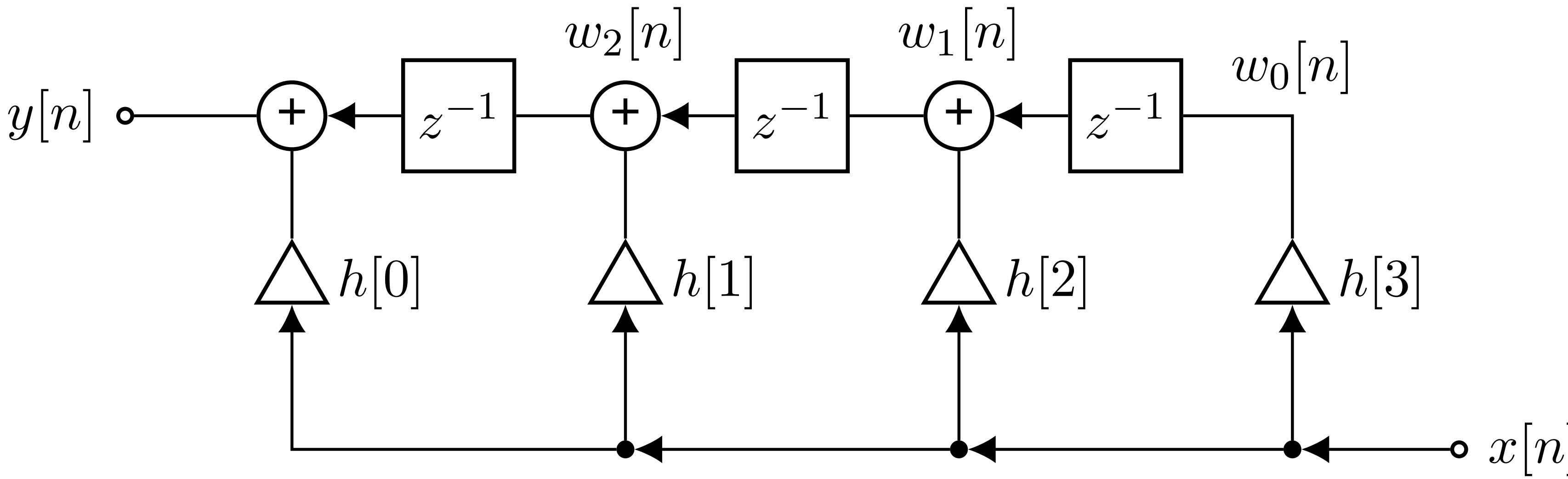
$$w_0[n] = h[3]x[n]$$

$$w_1[n] = w_0[n-1] + h[2]x[n] = h[2]x[n] + h[3]x[n-1]$$

$$w_2[n] = w_1[n-1] + h[1]x[n] = h[1]x[n] + h[2]x[n-1] + h[3]x[n-2]$$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Transpoosi: esimerkki

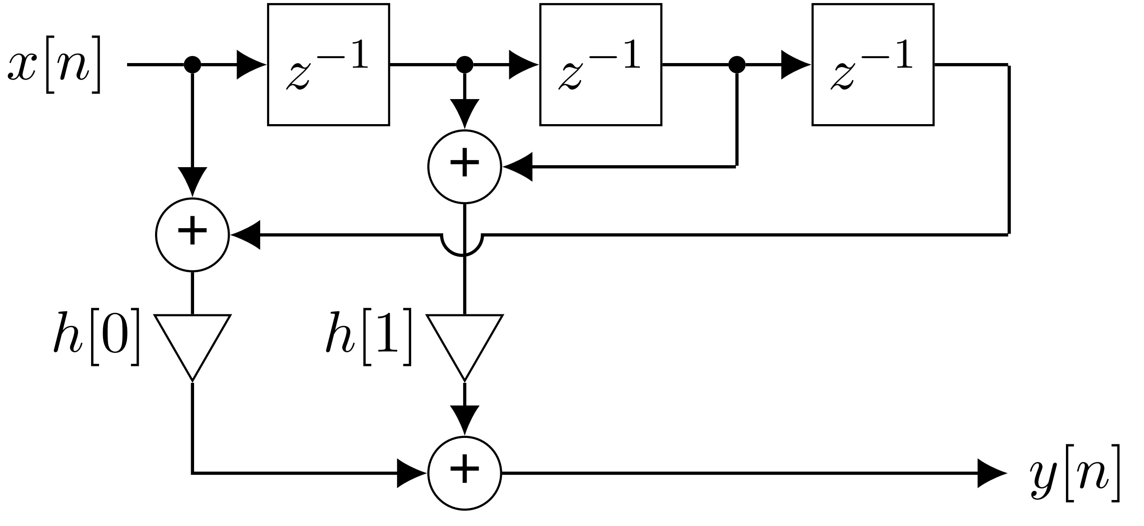


$$
\begin{aligned}
w_0[n] &= h[3]x[n] \\
w_1[n] &= w_0[n-1] + h[2]x[n] = h[2]x[n] + h[3]x[n-1] \\
w_2[n] &= w_1[n-1] + h[1]x[n] = h[1]x[n] + h[2]x[n-1] + h[3]x[n-2] \\
y[n] &= w_2[n-1] + h[0]x[n] \\
&= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + h[3]x[n-3]
\end{aligned}
$$

Lineaarivaiheinen suodatin

- impulssivasteen symmetriaa voidaan käyttää vähentämään kertolaskujen määrää (etumerkin vaihto normaalia kertolaskua huomattavasti yksinkertaisempi)

$$
\begin{aligned}
y[n] &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + h[3]x[n-3] \\
&= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[1]x[n-2] + h[0]x[n-3] \\
&= h[0](x[n] + x[n-3]) + h[1](x[n-1] + x[n-2])
\end{aligned}
$$



Monivaihesuodatin 1

Kirjoitetaan siirtofunktio muotoon

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6}$$

Monivaihesuodatin 1

Kirjoitetaan siirtofunktio muotoon

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} \\
&= (h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6}) + (h[1]z^{-1} + h[3]z^{-3} + h[5]z^{-5})
\end{aligned}
$$

Monivaihesuodatin 1

Kirjoitetaan siirtofunktio muotoon

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} \\
&= (h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6}) + (h[1]z^{-1} + h[3]z^{-3} + h[5]z^{-5}) \\
&= (h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6}) + z^{-1}(h[1] + h[3]z^{-2} + h[5]z^{-4})
\end{aligned}
$$

Monivaihesuodatin 1

Kirjoitetaan siirtofunktio muotoon

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} \\ &= (h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6}) + (h[1]z^{-1} + h[3]z^{-3} + h[5]z^{-5}) \\ &= (h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6}) + z^{-1}(h[1] + h[3]z^{-2} + h[5]z^{-4}) \end{aligned}$$

Merkitään

$$\begin{aligned} E_0(z) &= h[0] + h[2]z^{-1} + h[4]z^{-2} + h[6]z^{-4} \\ E_1(z) &= h[1] + h[3]z^{-1} + h[5]z^{-2} \\ \Rightarrow H(z) &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \end{aligned}$$

Monivaihesuodatin 1

Kirjoitetaan siirtofunktio muotoon

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} \\ &= (h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6}) + (h[1]z^{-1} + h[3]z^{-3} + h[5]z^{-5}) \\ &= (h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + h[6]z^{-6}) + z^{-1}(h[1] + h[3]z^{-2} + h[5]z^{-4}) \end{aligned}$$

Merkitään

$$\begin{aligned} E_0(z) &= h[0] + h[2]z^{-1} + h[4]z^{-2} + h[6]z^{-4} \\ E_1(z) &= h[1] + h[3]z^{-1} + h[5]z^{-2} \\ \Rightarrow H(z) &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \end{aligned}$$

Edelleen voidaan kirjoittaa

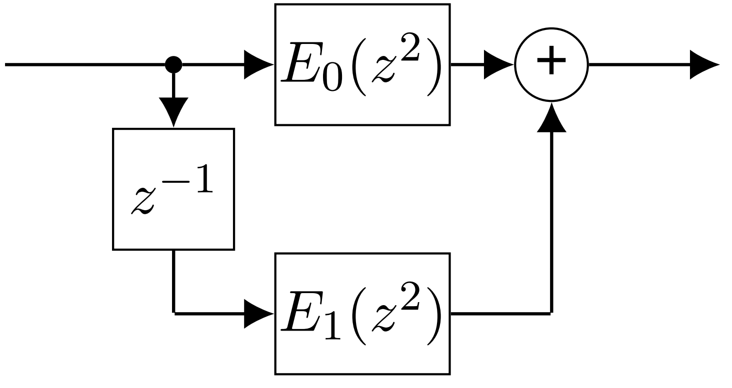
$$\begin{aligned} H(z) &= (h[0] + h[3]z^{-3} + h[6]z^{-6}) + z^{-1}(h[1] + h[4]z^{-3}) + z^{-2}(h[2] + h[5]z^{-3}) \\ &= \tilde{E}_0(z^3) + z^{-1}\tilde{E}_1(z^3) + z^{-2}\tilde{E}_2(z^3) \end{aligned}$$

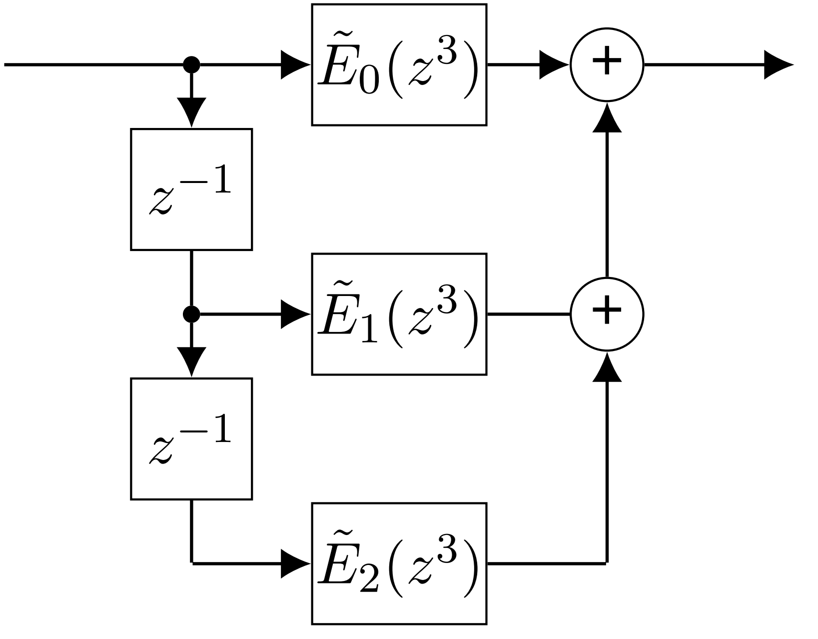
Monivaihesuodatin 2

- Yleisesti saadaan monivaihesuodatin (engl. polyphase filter)

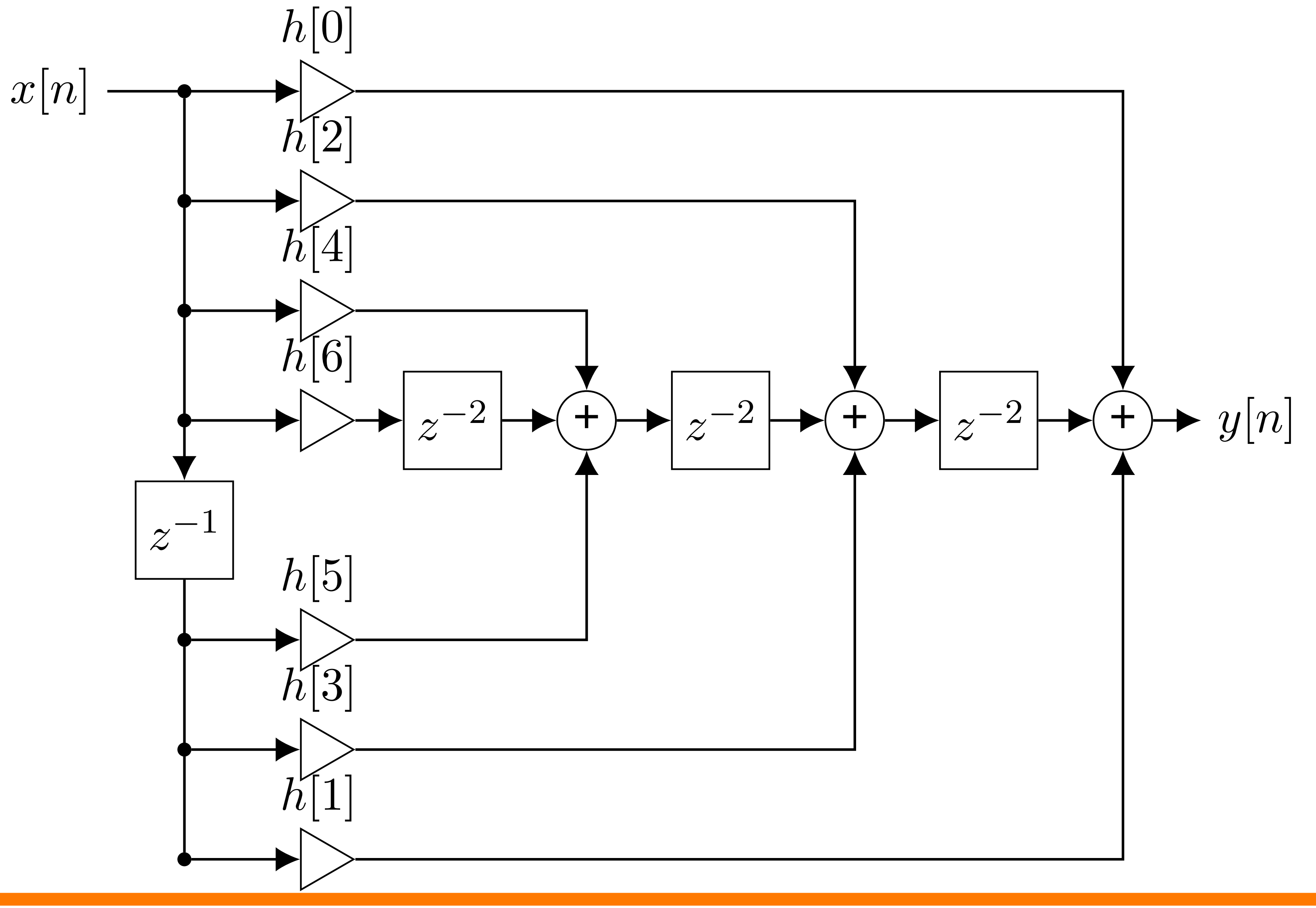
$$H(z) = \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m} \tilde{E}_m(z^L)$$

- Rinnakkainen toteutus, voi olla kanoninen tai ei





Monivaihesuodatin: esimerkki



Sisältö

1. Lohkokaavioesitys ja suodatinrakenteet
2. FIR-suodattimen perusrakenteet
3. IIR-suodattimen perusrakenteet

IIR-suodatin

- IIR suodattimessa takaisinkytkentöjä
- Siirtofunktio

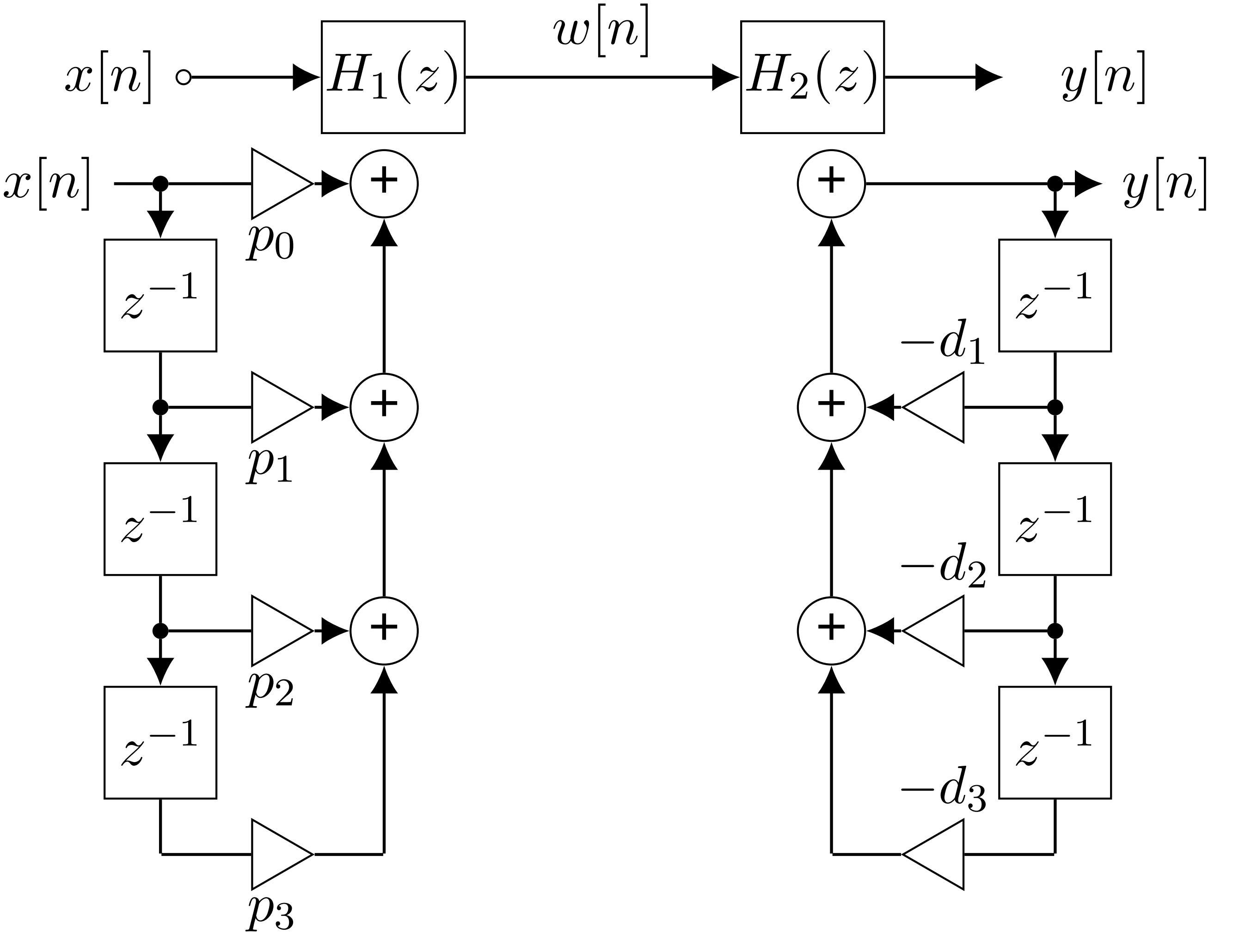
$$H(z) = \frac{P(z)}{D(z)} = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_M z^{-M}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \ldots + d_N z^{-N}}$$

- Voidaan toteuttaa kahtena peräkkäisenä suodattimena

$$H(z) = \frac{P(z)}{D(z)} = P(z)\frac{1}{D(z)}$$

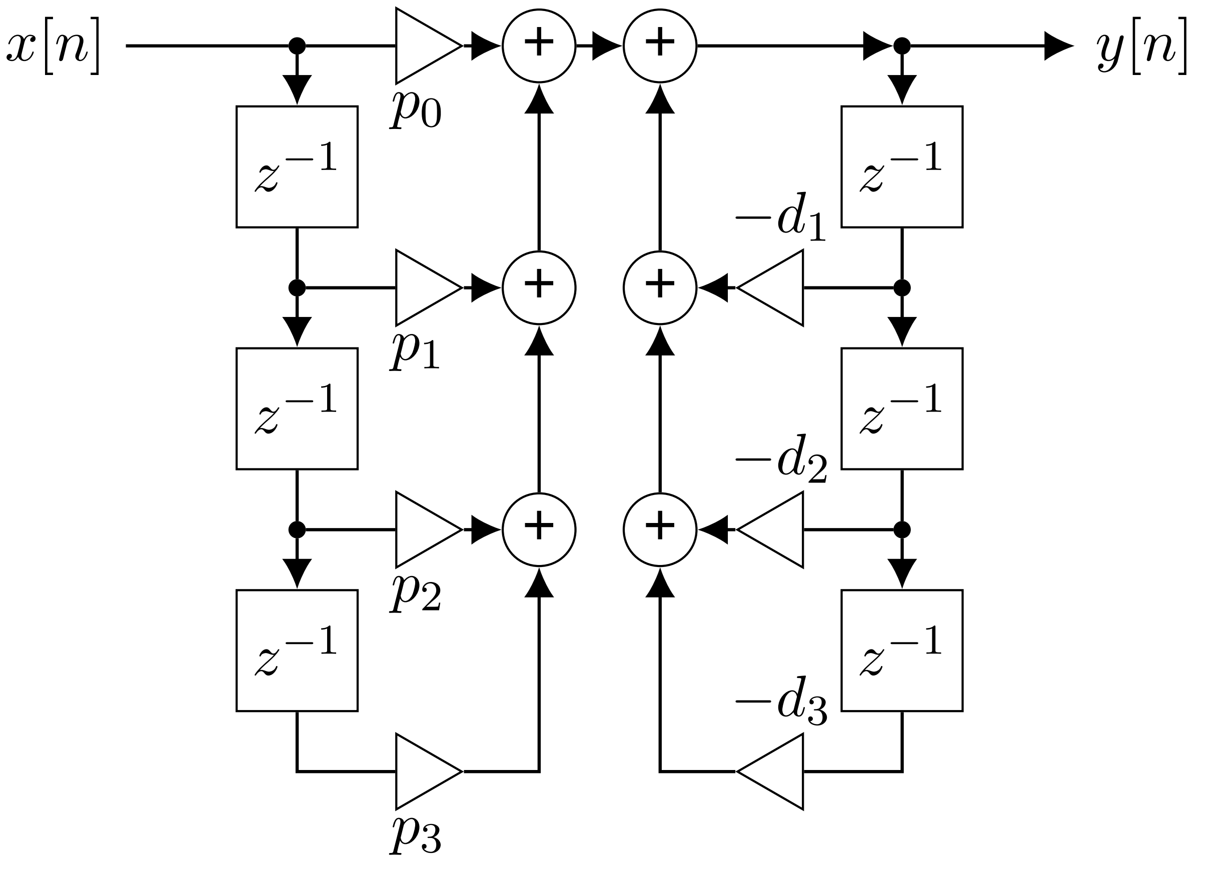
IIR-suodattimen suorat muodot

Useita mahdollisia toteutuksia

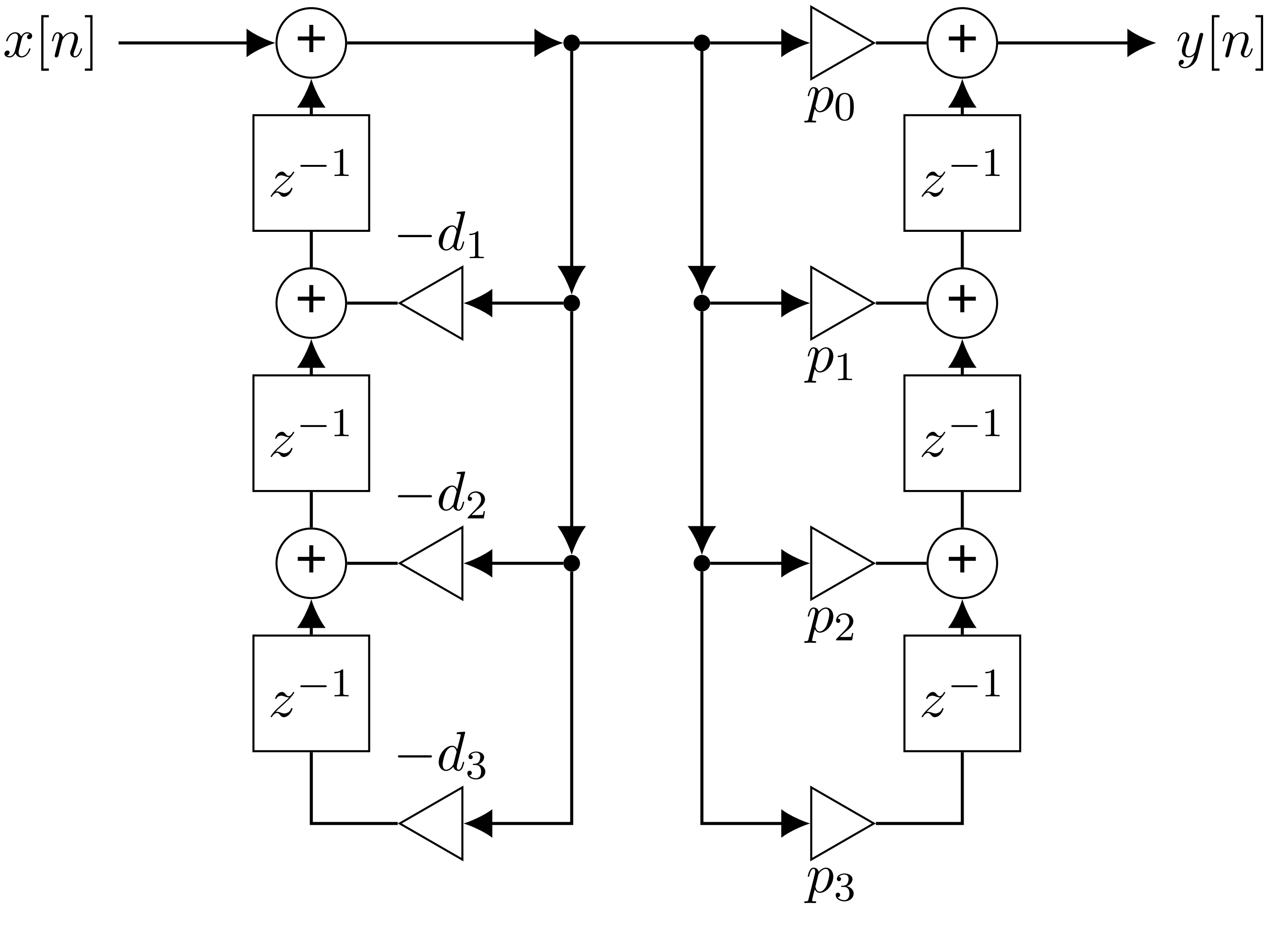


IIR suora muoto I

- Yhdistetään FIR ja sen jälkeen takaisinkytkentäosa peräkkäin
- Ei kanoninen

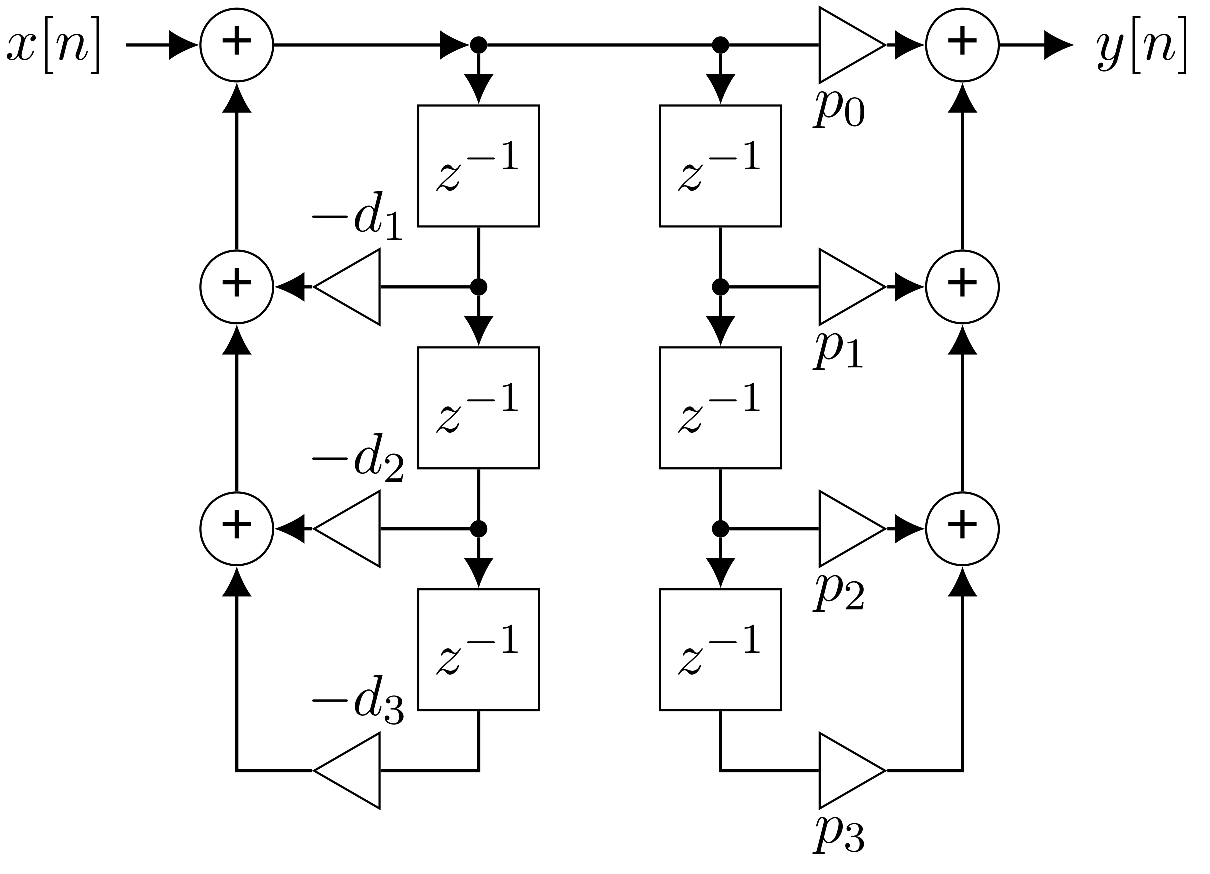


IIR suora muoto I transponoitu



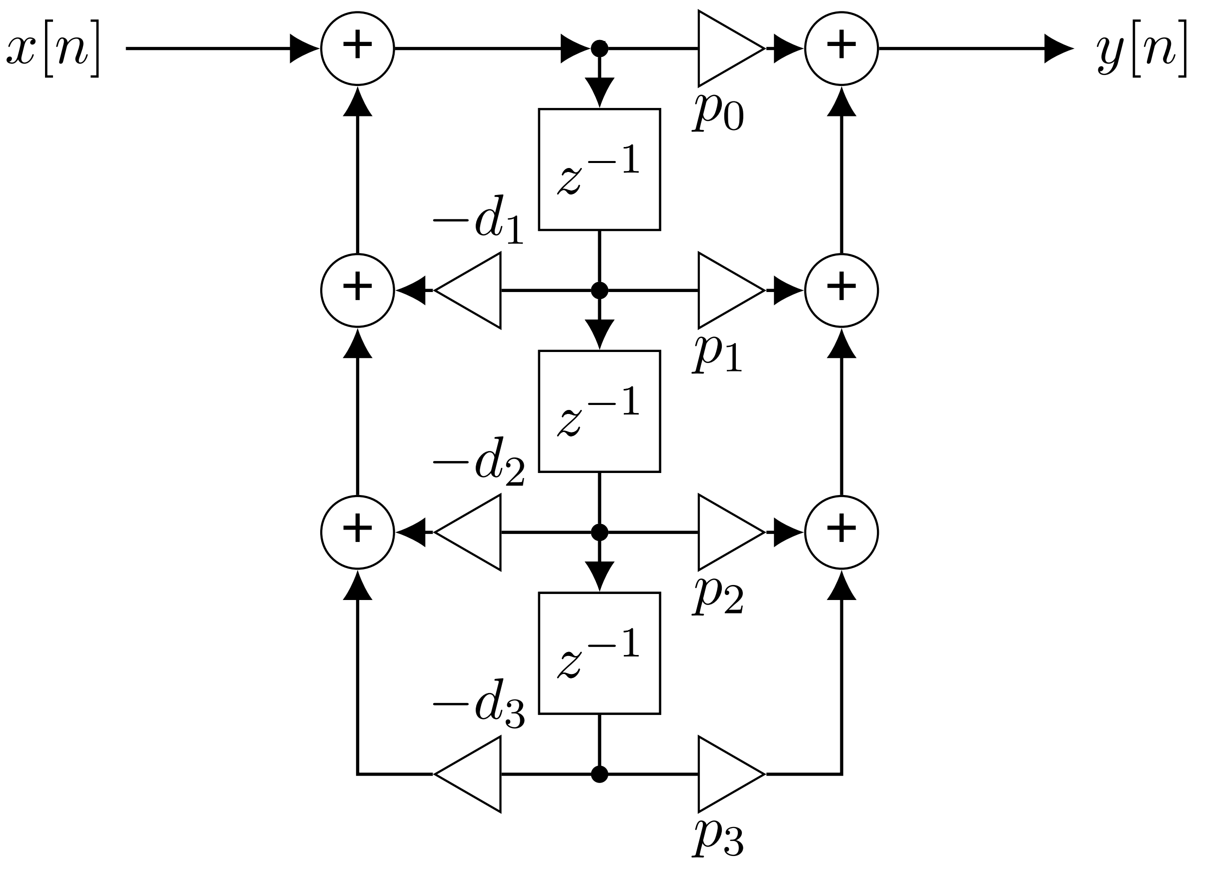
IIR suora muoto II

- Vaihdetaan osien paikkaa alkup. suorassa muodossa



IIR suora muoto II

- Vaihdetaan osien paikkaa alkup. suorassa muodossa
- Viivelinjoissa sama signaali, voidaan yhdistää $\Rightarrow$ kanoninen



Kaskaditoteutus

- Faktoroidaan siirtofunktio

$$H(z) = \frac{P(z)}{D(z)} = \frac{P_1(z)P_2(z)P_3(z)}{D_1(z)D_2(z)D_3(z)}$$

- Esim. toteutukset

$$x[n] \circ\!\longrightarrow \boxed{\frac{P_1(z)}{D_1(z)}} \rightarrow \boxed{\frac{P_2(z)}{D_2(z)}} \rightarrow \boxed{\frac{P_3(z)}{D_3(z)}} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] \circ\!\longrightarrow \boxed{\frac{P_1(z)}{D_3(z)}} \rightarrow \boxed{\frac{P_2(z)}{D_1(z)}} \rightarrow \boxed{\frac{P_3(z)}{D_2(z)}} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] \circ\!\longrightarrow \boxed{\frac{P_1(z)}{D_3(z)}} \rightarrow \boxed{\frac{P_3(z)}{D_1(z)}} \rightarrow \boxed{\frac{P_2(z)}{D_2(z)}} \longrightarrow y[n]$$

- Yleisesti $H(z) = \prod_{k=1}^{K} \frac{P_k(z)}{D_k(z)}$
- Eri permutaatioita $(K!)^2$

Toisen asteen kaskaditoteutus 1

- Siirtofunktion faktorointi juuriin

$$H(z) = p_0 \frac{\prod_{k=0}^{M}(1 - \xi_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - \lambda_k z^{-1})}$$

- Ei kuitenkaan mielekäs toteuttaa, koska osa juurista kompleksiarvoisia
- Käytetään juurien konjugaattisymmetrisyyttä

$$\begin{aligned}&(1 - rz^{-1})(1 - r^* z^{-1}) \\ &= 1 - rz^{-1} - r^* z^{-1} + rr^* z^{-2} \\ &= 1 - \mathrm{Re}(r) z^{-1} + |r|^2 z^{-2}\end{aligned}$$

- Reaalinen faktorointi toisen asteen tekijöihin

Toisen asteen kaskaditoteutus 2

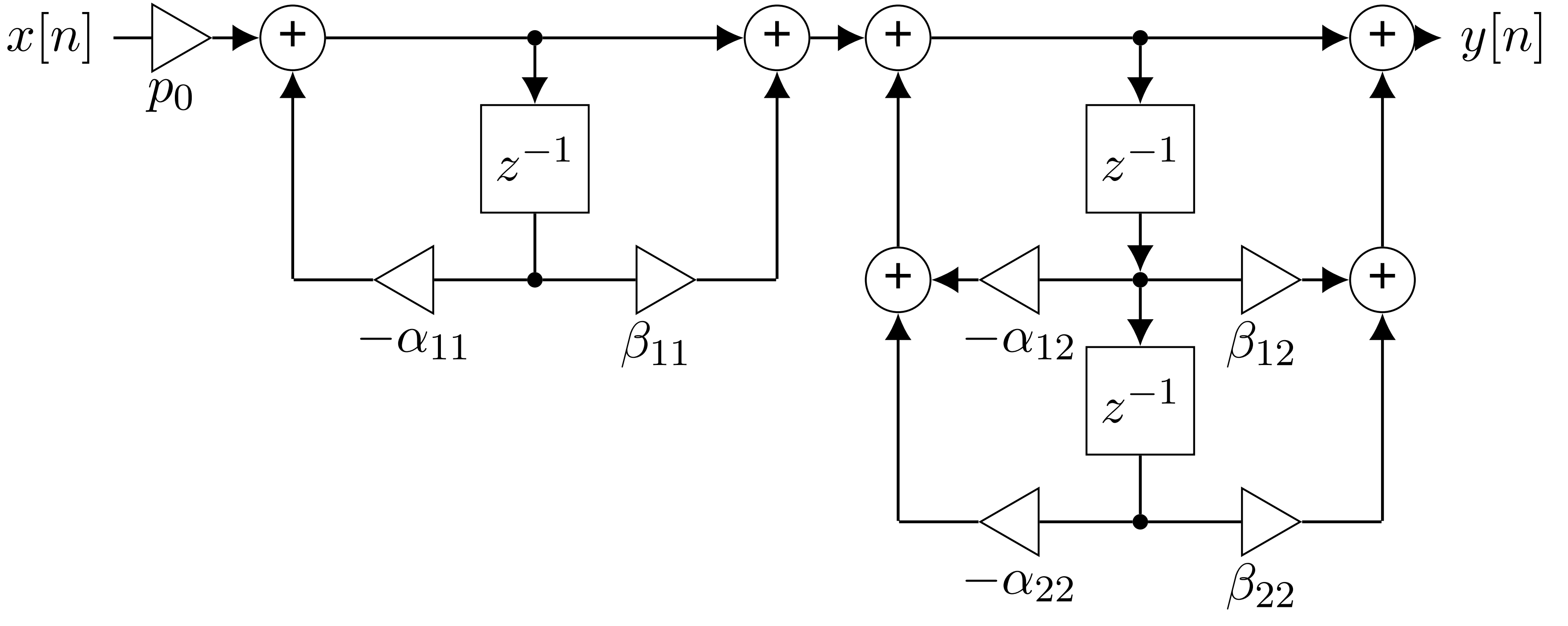
- Siirtofunktion faktorointi juuriin

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} \frac{P_k(z)}{D_k(z)} = p_0 \prod_{k} \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}}$$

- Jos asteluku pariton, $\alpha_{2K} = \beta_{2K} = 0$
- Kaskadi 2. asteen suodattimista (engl. second order sections, SOS)
- Voidaan tehdä myös FIR-suodattimille ($D_k(z) = 1$)

Toisen asteen kaskaditoteutus: esimerkki

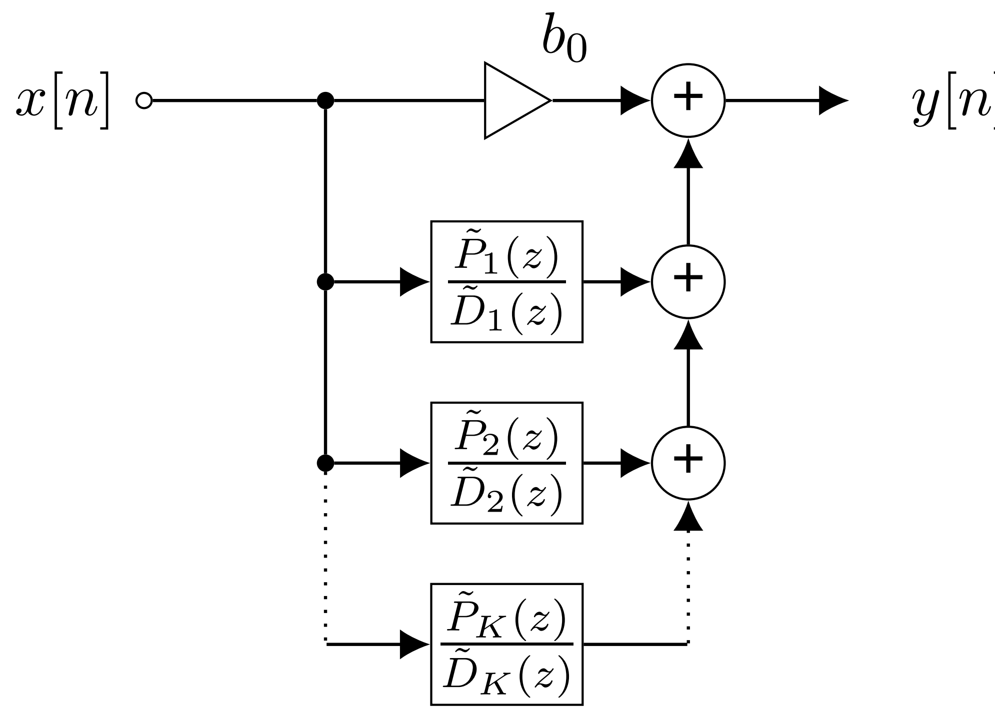
$$H(z) = p_0 \, \frac{1 + \beta_{11} z^{-1}}{1 + \alpha_{11} z^{-1}} \, \frac{1 + \beta_{12} z^{-1} + \beta_{22} z^{-2}}{1 + \alpha_{12} z^{-1} + \alpha_{22} z^{-2}}$$



Rinnakkaisrakenne

- Siirtofunktiolle voidaan kirjoittaa osamurtokehitelmä

$$
\begin{aligned}
H(z) &= b_0 + \sum_{k=1}^{K} \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}} \\
&= b_0 + \sum_{k=1}^{K} \frac{\tilde{P}_k(z)}{\tilde{D}_k(z)}
\end{aligned}
$$



- Osamurtokehitelmä voidaan tehdä eri tavoin (kts. Mitran kirja)
- Alisuodattimet voidaan toteuttaa eri tavoin (suora I tai II, kanoninen tai ei-kanoninen, . . .)

Muita rakenteita

- Erilaiset hilarakenteet (myös ensimmäinen esimerkki)
- IIR-monivaihesuodatin (kts. Rawatin kirja)
- Tilayhtälöesitys (engl. state-space representation)
- . . .

Seuraava luento

- FIR-suodattimien suunnittelu