Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-C5230 Digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteet

Luento 8: FIR-suodatinten suunnittelu

Luennon aiheet kirjassa

- Mitra, Digital Signal Processing: A Computer Based Approach, 10 FIR Digital Filter Design
  - 10.1 Preliminary Considerations
  - 10.2 FIR Filter Design Based on Windowed Fourier Series
  - 10.5 FIR Digital Filter Design Using MATLAB
- Vaihtoehtoinen materiaali Rawat, Digital signal processing (11.1-11.3 pääasiassa kertausta), 11.4-11.8, 11.13

Oppimistavoitteet

- Gibbsin ilmiö
  - yhteys suodatinsuunnitteluun
- FIR-suodattimen kertoimien laskeminen suodatusvaatimusten mukaan
- FIR-suodattimien ja eri suunnittelumenetelmien edut ja rajoitteet

Suodatinsuunnittelu

- Määritä magnitudi- ja vaihevasteen vaatimukset suodattimen tarkoituksen mukaan
- Valitse suodattimen asteluku ja laske kertoimet
- Tyypillisesti vaihevaste lineaarinen

Suunnitteluspesifikaatio

Magnitudivasteen spesifikaatio (alipäästösuodatin)

Päästökaista: $|\omega| \leq \omega_p$

$1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p$

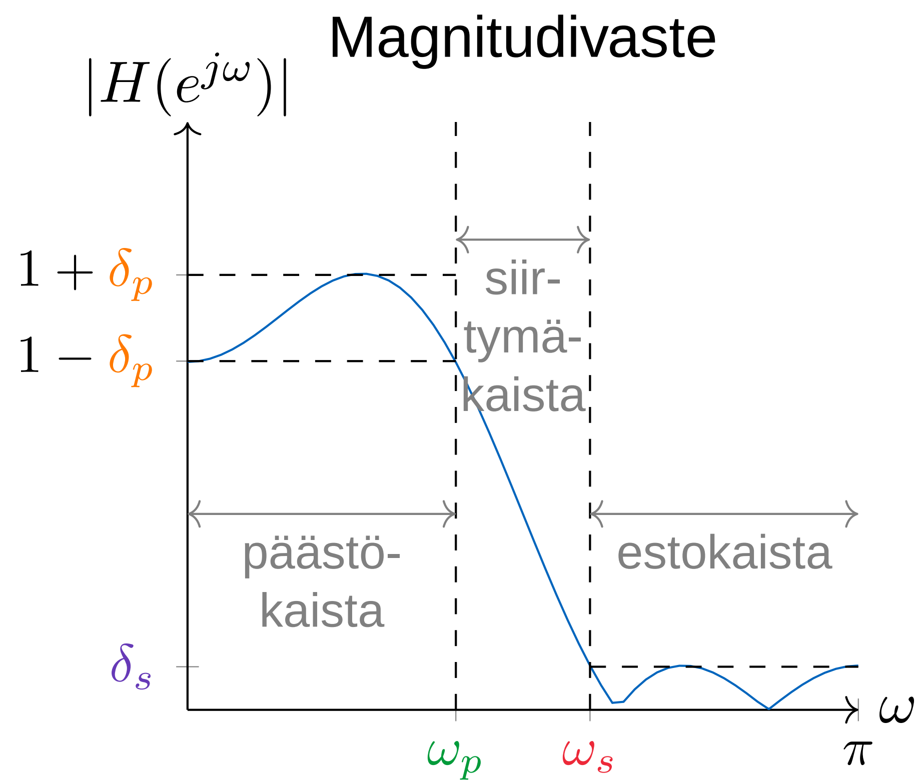
Estokaista: $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$

$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_s$

Vahvistusfunktion kriteerit:

$\alpha_p = -20\log_{10}(1-\delta_p)\mathrm{dB}$

$\alpha_s = -20\log_{10}(\delta_s)\mathrm{dB}$



Normalisoidut taajuudet

- Suodatin toimii aina näytteistetyn signaalin normalisoidun taajuuden mukaan
- Näytteenottotaajuus muuttuu $\Rightarrow$ suodattimen rajataajuuksia pitää muuttaa saman suodatusfunktion aikaansaamiseksi
- Normalisoidut taajuudet

$$f_s = \frac{F_s}{F_{\text{samp}}} \qquad \omega_s = 2\pi \frac{F_s}{F_{\text{samp}}}$$

$$f_p = \frac{F_p}{F_{\text{samp}}} \qquad \omega_p = 2\pi \frac{F_p}{F_{\text{samp}}}$$

Huom! Matlabissa normalisointi välille [0,1]

- 3dB leikkaustaajuus = taajuus, jossa vahvistus on pudonnut puoleen

$$20 \log_{10} |H(e^{j\omega_c})| = -3\text{dB}$$

koska $10^{-0.3} \approx 0.501$, olettaen että päästökaistan vahvistus = 1

Suodatintyypin valinta

- FIR-suodattimet
  - \+ Lineaarinen vaihevaste helppo aikaansaada
  - \+ Aina stabiili
  - \- Suuri tarvittu asteluku IIR-suodattimiin verrattuna (kertaluokkaa suurempi)
- IIR-suodattimet
  - \+ Hyvät vaimennusominaisuudet
  - \+ Olemassaolevia approksimaatiokaavoja
  - \- Vaihevaste aina epälineaarinen
  - \- Stabiiliusongelmat mahdollisia rajatulla laskentatarkkuudella

FIR-suodattimet: kertaus

- Ei-rekursiivisen suodattimen kertoimet vastaavat impulssivastetta.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k x[n-k] \;\Rightarrow\; h[k] = p_k$$

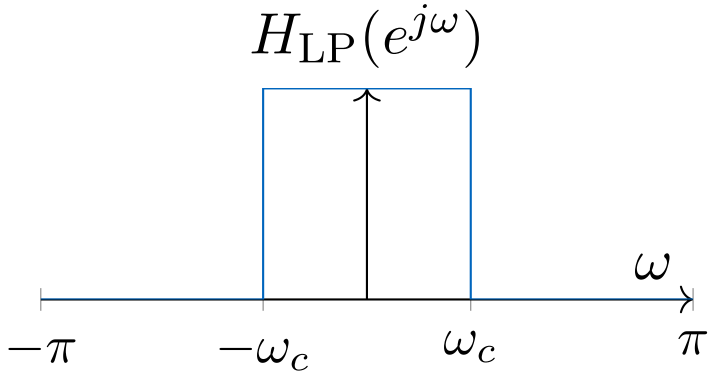
- impulssi- ja taajuusvasteen yhteys Fourier-muunnoksen kautta

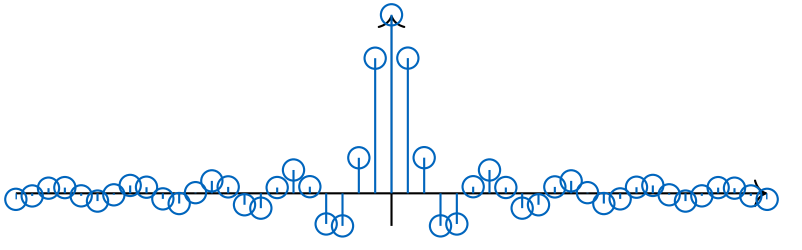
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Ideaalinen alipäästösuodatin

$$h_{LP}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{LP}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$





- Äärettomän kestoinen, ei kausaalinen
- Ei toteutettavissa $\Rightarrow$ etsitään äärelliskestoinen suodatin, jonka amplitudivaste mahdollisimman lähellä ideaalista

Taajuusvasteen neliövirhe

- Ideaalinen haluttu taajuusvaste

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-j\omega n}$$

- Todellinen saavutettu taajuusvaste

$$H_t(e^{j\omega}) = \sum_{n=-K}^{K} h_t[n] e^{-j\omega n}$$

- Määritellään integroidun neliövirheen funktio

$$\epsilon(h_t[-K], \ldots, h_t[K]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| H_t(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

Neliövirheen minimointi

- Fourier-muunnoksen lineaarisuuden perusteella

$$\mathcal{F}\{h_d[n] - h_t[n]\} = H_d(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})$$

- Parsevalin teoreemasta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_d[n] - h_t[n]|^2 \\ &= \sum_{n=-K}^{K} |h_d[n] - h_t[n]|^2 + \sum_{n=K+1}^{\infty} |h_d[n]|^2 + \sum_{n=\infty}^{-K-1} |h_d[n]|^2 \end{aligned}$$

- Minimi, kun $h_t[n] = h_d[n]$, $n = -K, \ldots, K$

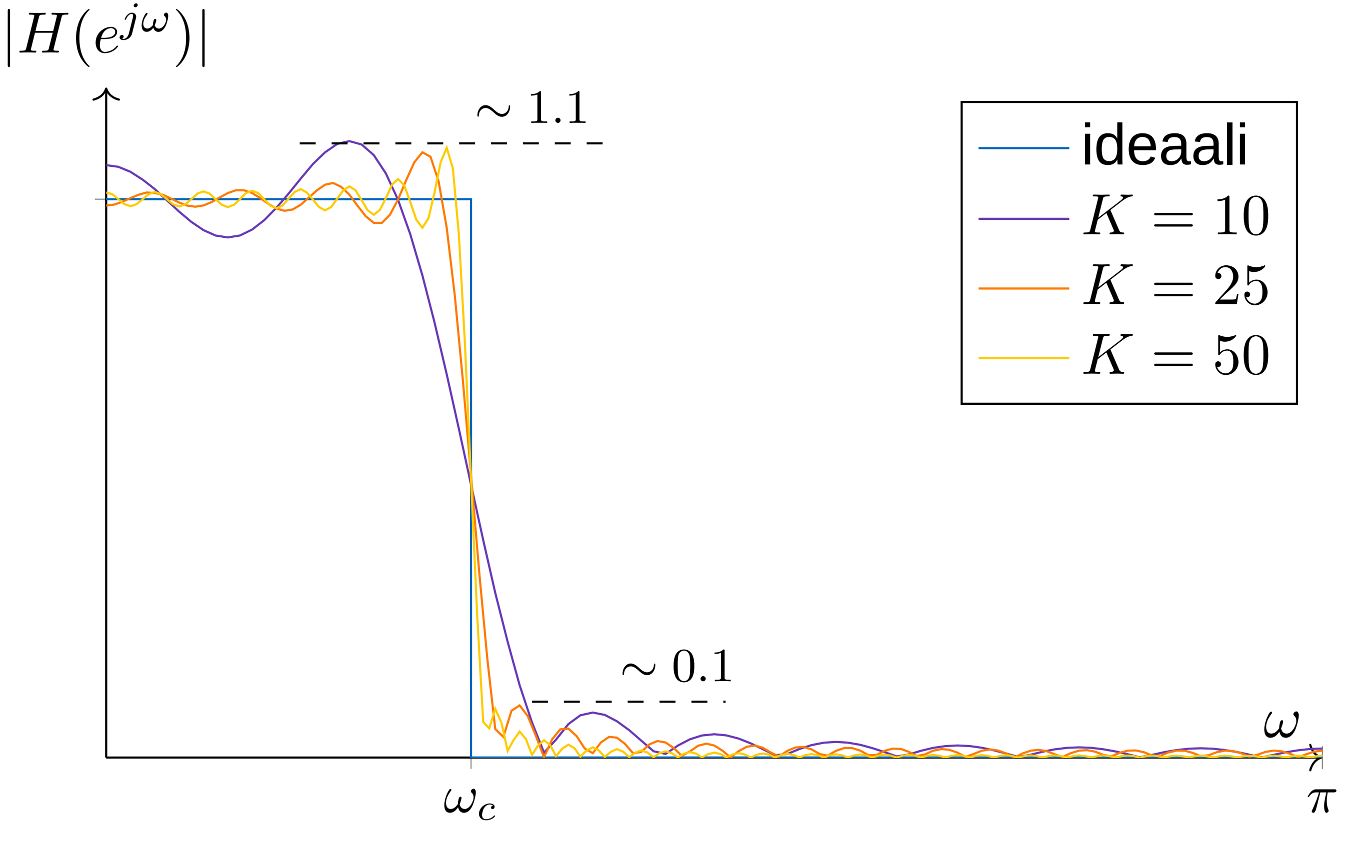
Pienimmän neliövirheen suodatin

- Pienin integroitu neliövirhe ideaaliseen suodattimeen nähden saadaan, kun

$$\boxed{h_t[n] = h_d[n], \quad -K \leq n \leq K}$$

- Saadaan katkaisemalla (engl. truncate) ideaalinen impulssivaste

Esimerkki: alipäästösuodatin



- Suodattimen asteluku ei vaikuta maksimipoikkeaman suuruuteen

Gibbsin ilmiö

- Esiintyy katkaistun Fourier-sarjan epäjatkuvuuskohdissa
- Summa “ampuu yli”
- Termien määrä ei vaikuta suurimman poikkeaman suuruuteen, vain leveyteen
- Johtuu epäjatkuvan funktion approksimoinnista jatkuvilla
- Esiintyy ali-, yli-, kaistanpäästö- jne. suodattimilla

Gibbsin ilmiö

- Sarjan katkaisu voidaan ymmärtää ikkunointioperaationa

$$\boxed{h_t[n] = h_d[n]w[n],}$$

  missä $w[n]$ on haluttu ikkunafunktio
- Tässä tapauksessa ikkuna suorakaide

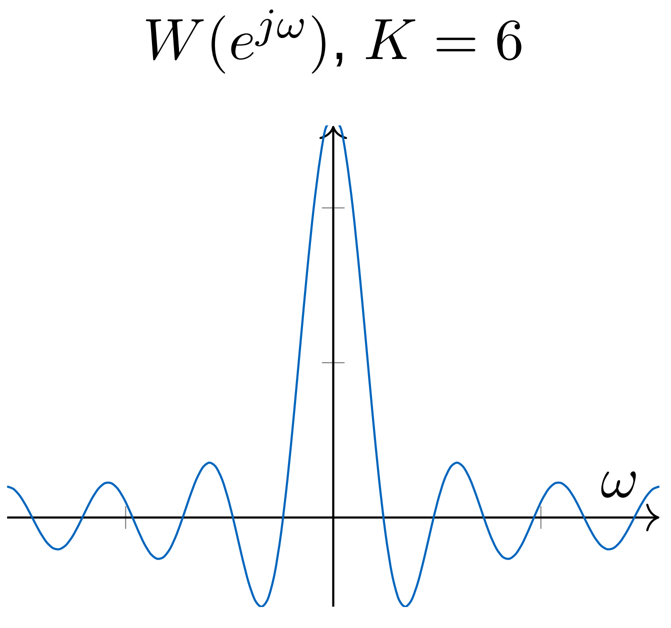
$$w[n] = \begin{cases} 1, & -K \leq n \leq K \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

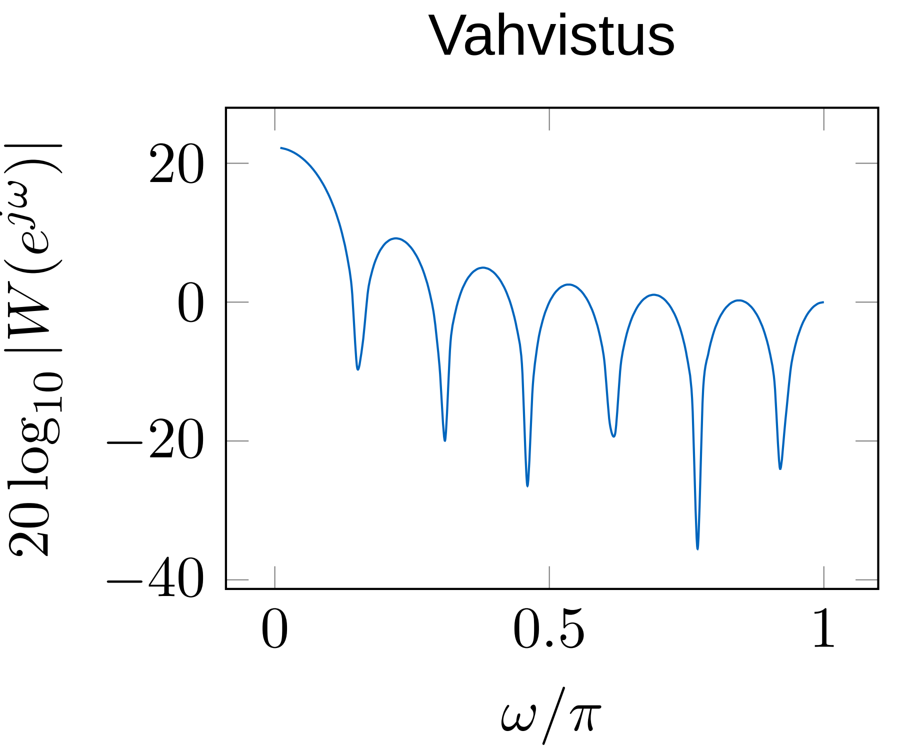
- Spektri $W(e^{j\omega}) = \sin((2K+1)\omega/2)/\sin(\omega/2)$
- Taajuustasossa saadaan Fourier-muunnoksen ominaisuuksien perusteella konvoluutio

$$H_t(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\nu})W(e^{j(\omega-\nu)})d\nu$$

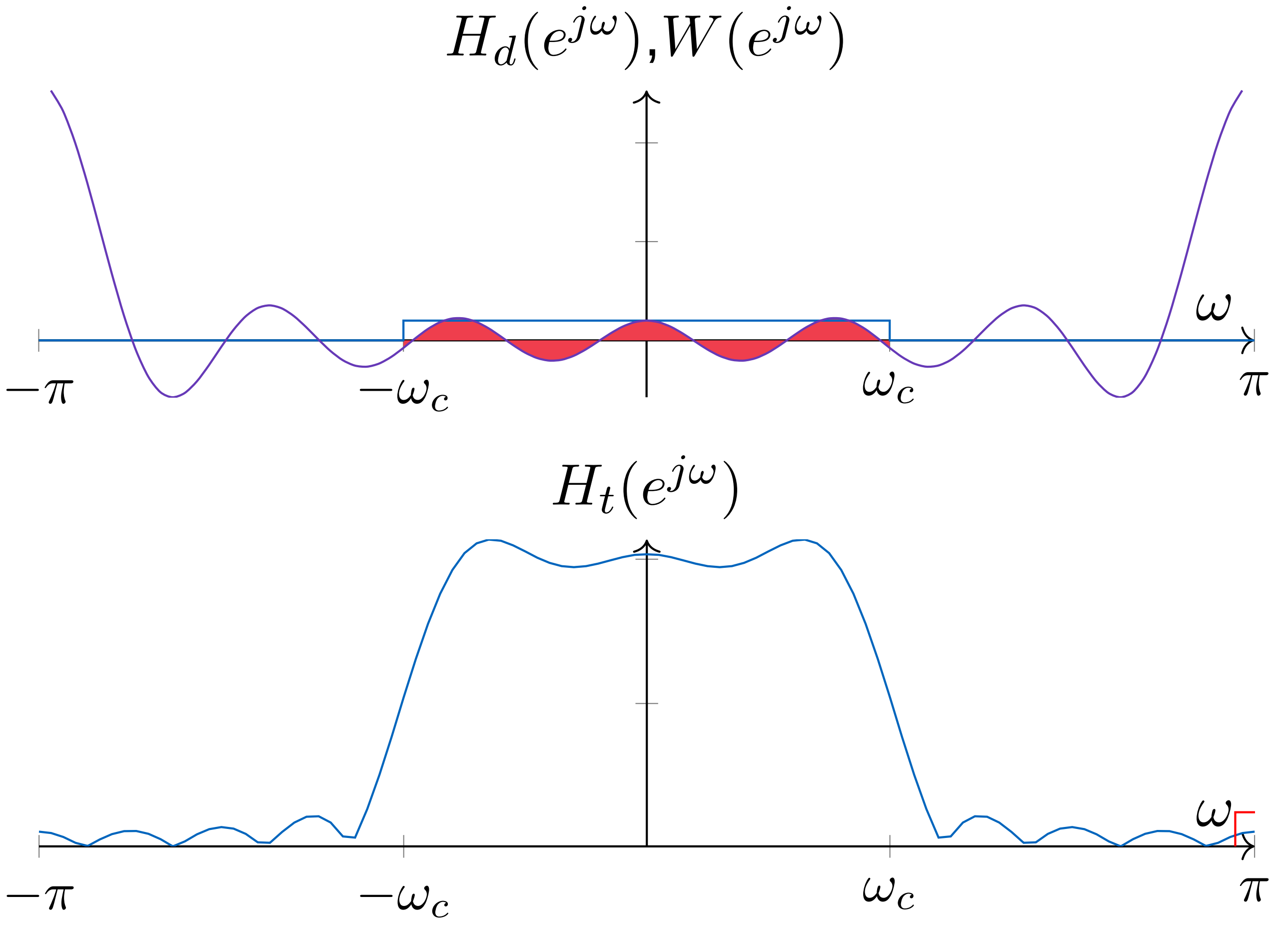
Suorakaideikkunan spektri

- Ikkunan spektrin korkein piikki pääkeila (engl. main lobe)
- Muut piikit sivukeiloja (engl. side lobe)
- Suorakaideikkunan pääkeilan leveys $4\pi/(2K+1)$
- Ikkunan pituuden kasvaessa pääkeila kapenee ja pitenee

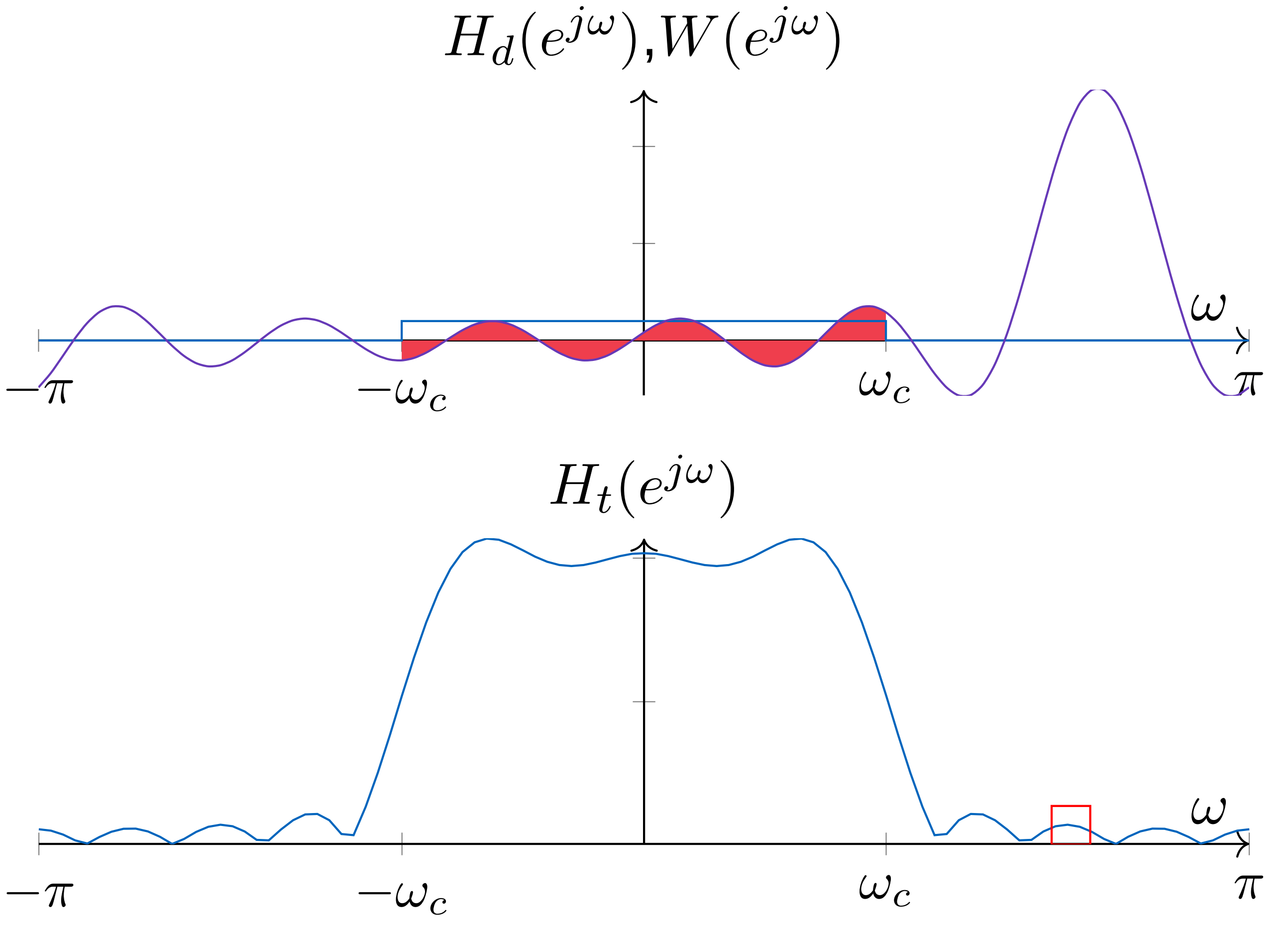




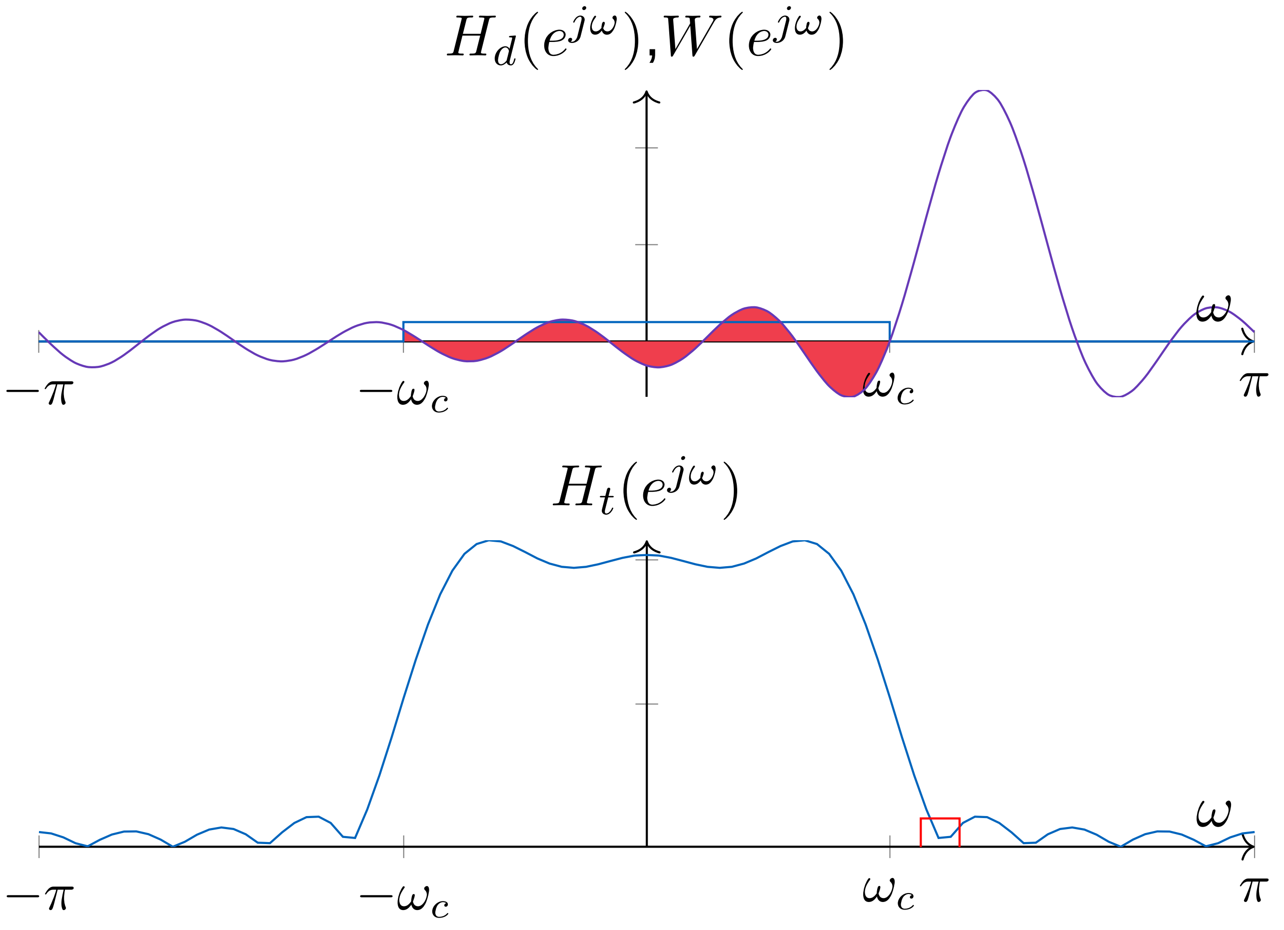
Spektrien konvoluutio



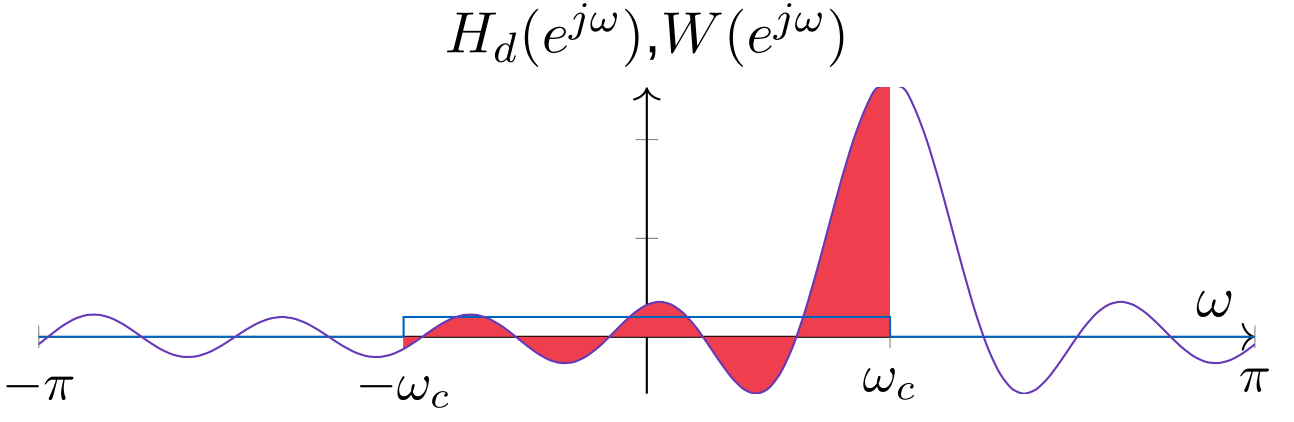
Spektrien konvoluutio

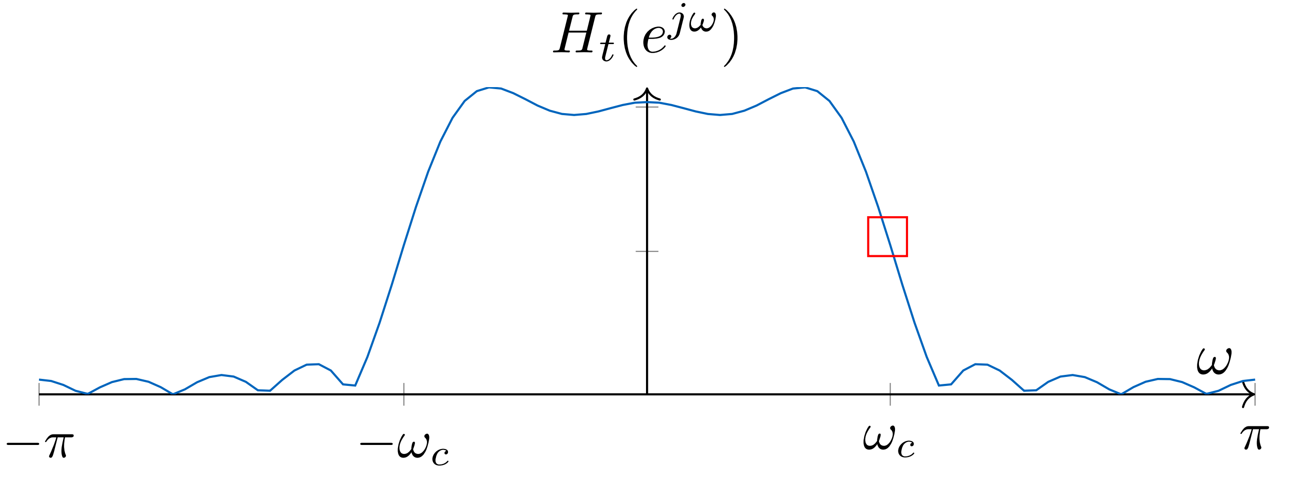


Spektrien konvoluutio

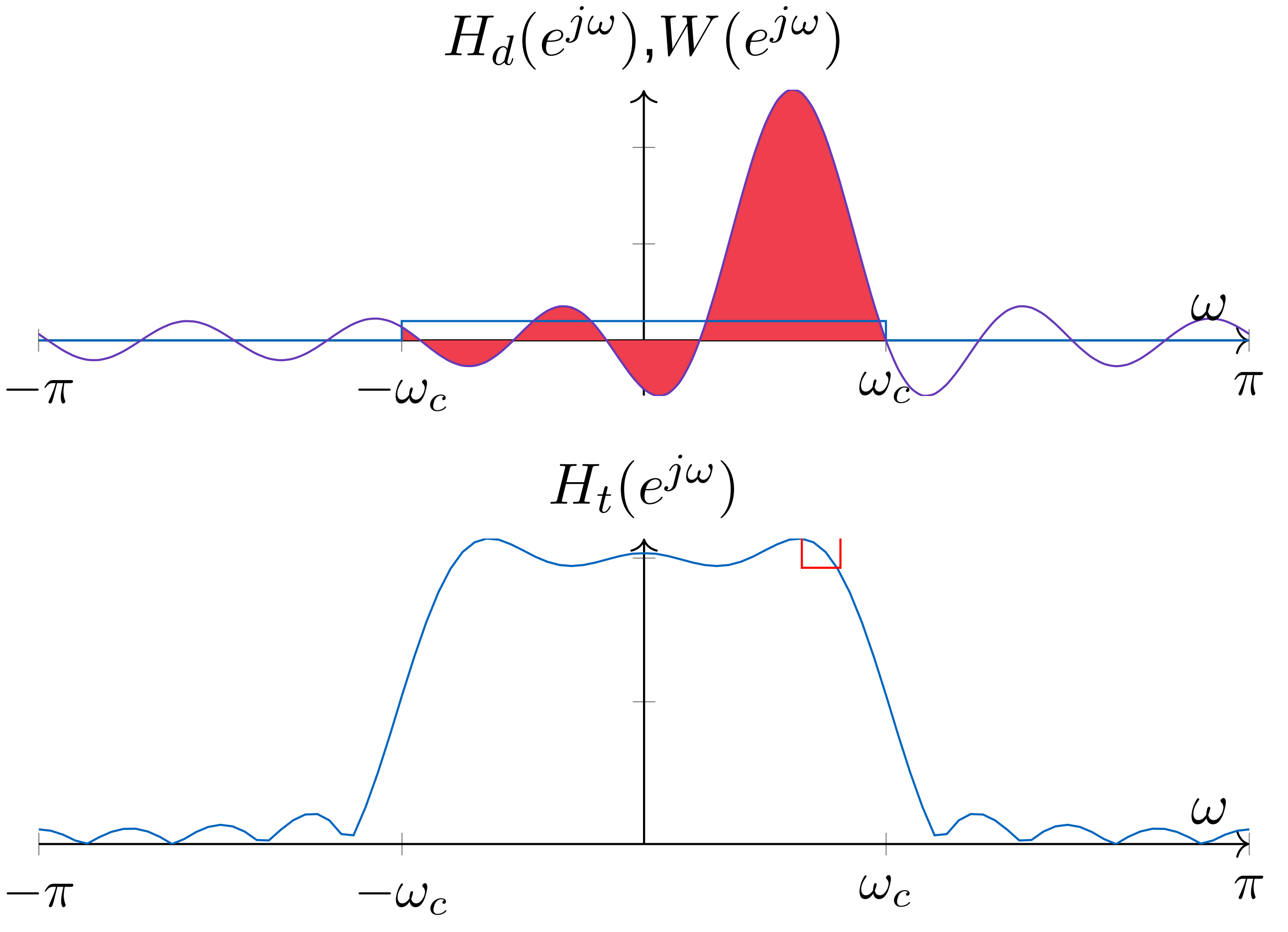


Spektrien konvoluutio

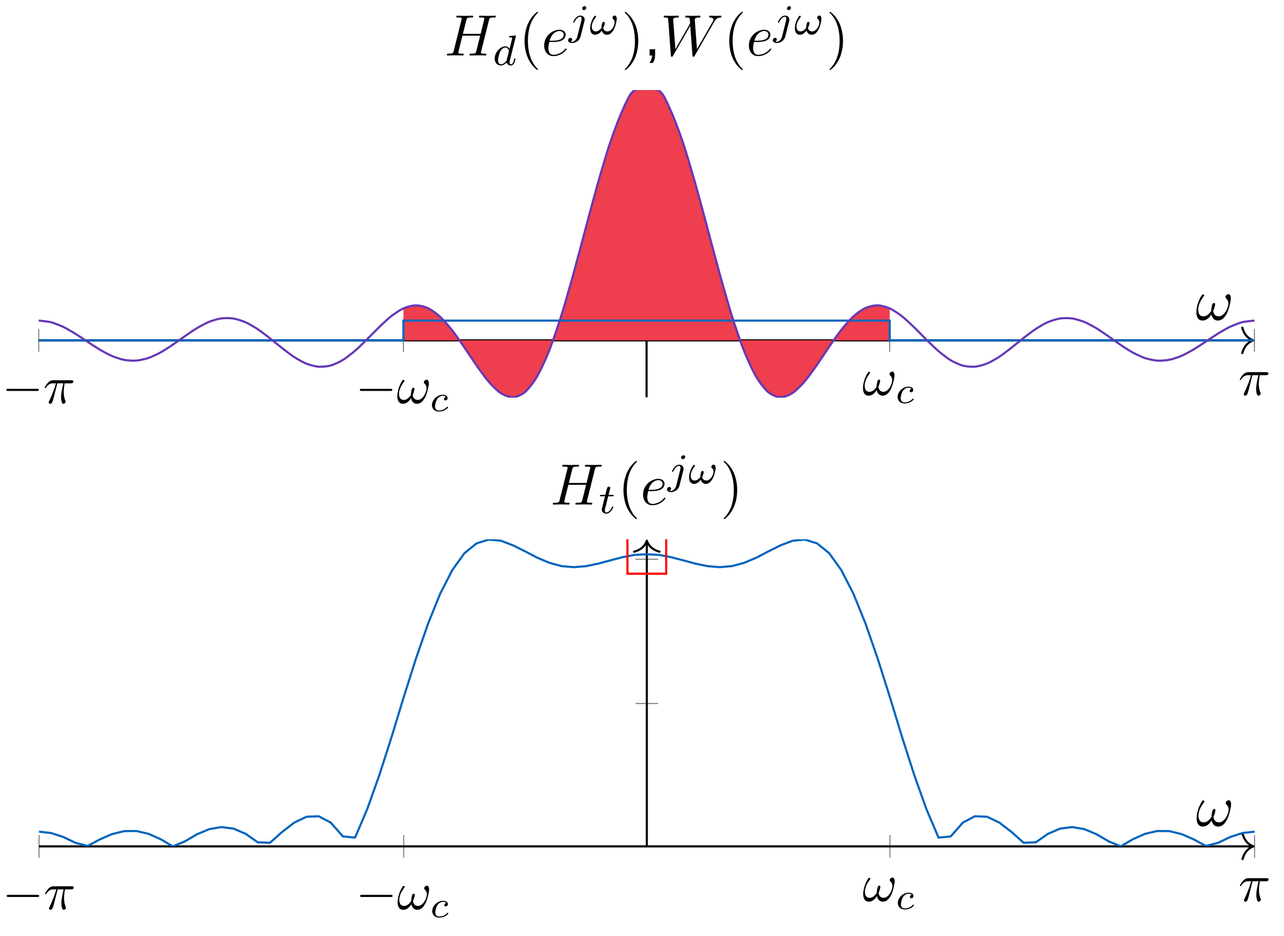




Spektrien konvoluutio



Spektrien konvoluutio



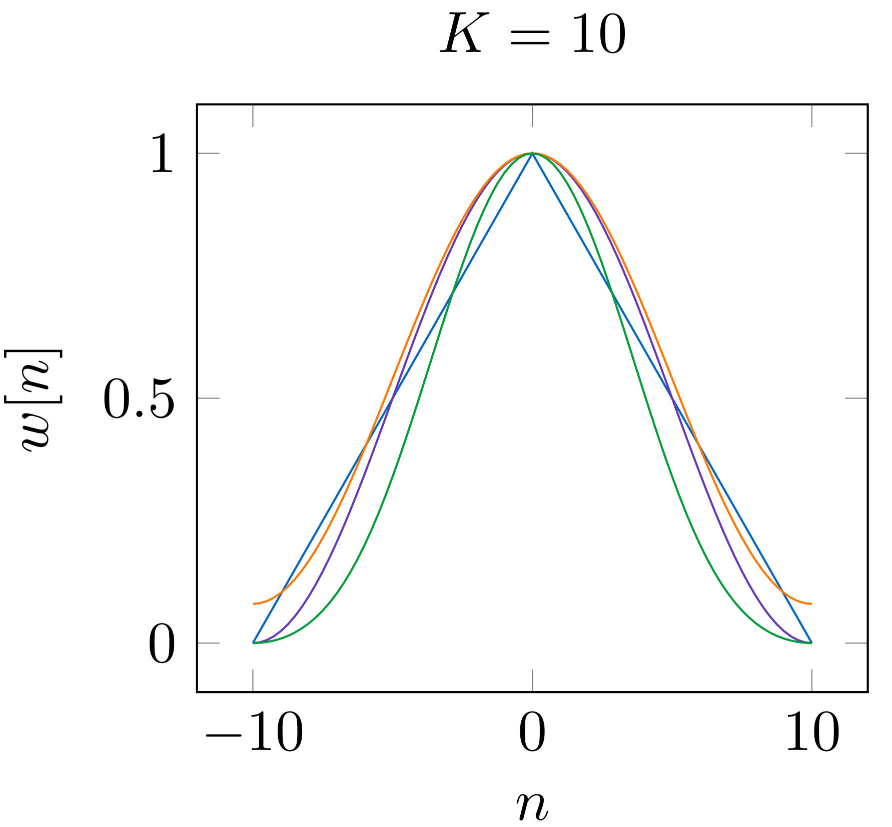
Gibbsin ilmiön välttäminen

- Gibbsin ilmiön aiheuttavat
  - Epäjatkuvuuskohta ideaalisessa taajuusvasteessa
  - Suorakaideikkunan spektrin ominaisuudet
- Keinot välttämiseksi
  - Poistetaan epäjatkuvuudet ideaalisesta taajuusvasteesta
  - Käytetään muunlaista ikkunafunktiota

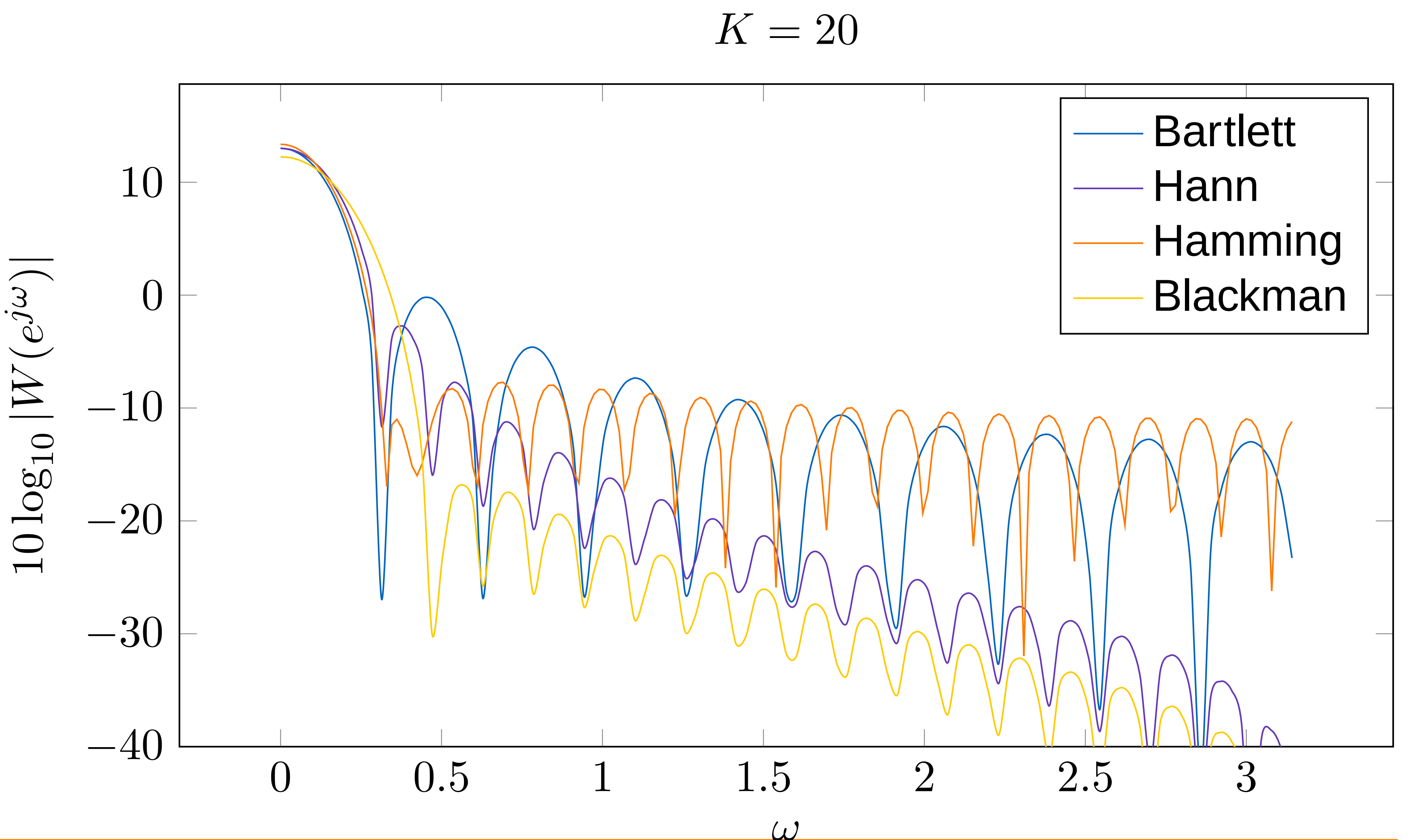
Parametrittomat ikkunat

- Tyypillisiä ikkunafunktioita

Bartlett:
$w[n] = 1 - |n|/K$
Hann:
$w[n] = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi n}{K}\right)\right)$
Hamming:
$w[n] = 0.54 + 0.64 \cos\left(\frac{\pi n}{K}\right)$
Blackman:
$w[n] = 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi n}{K}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{2\pi n}{K}\right)$



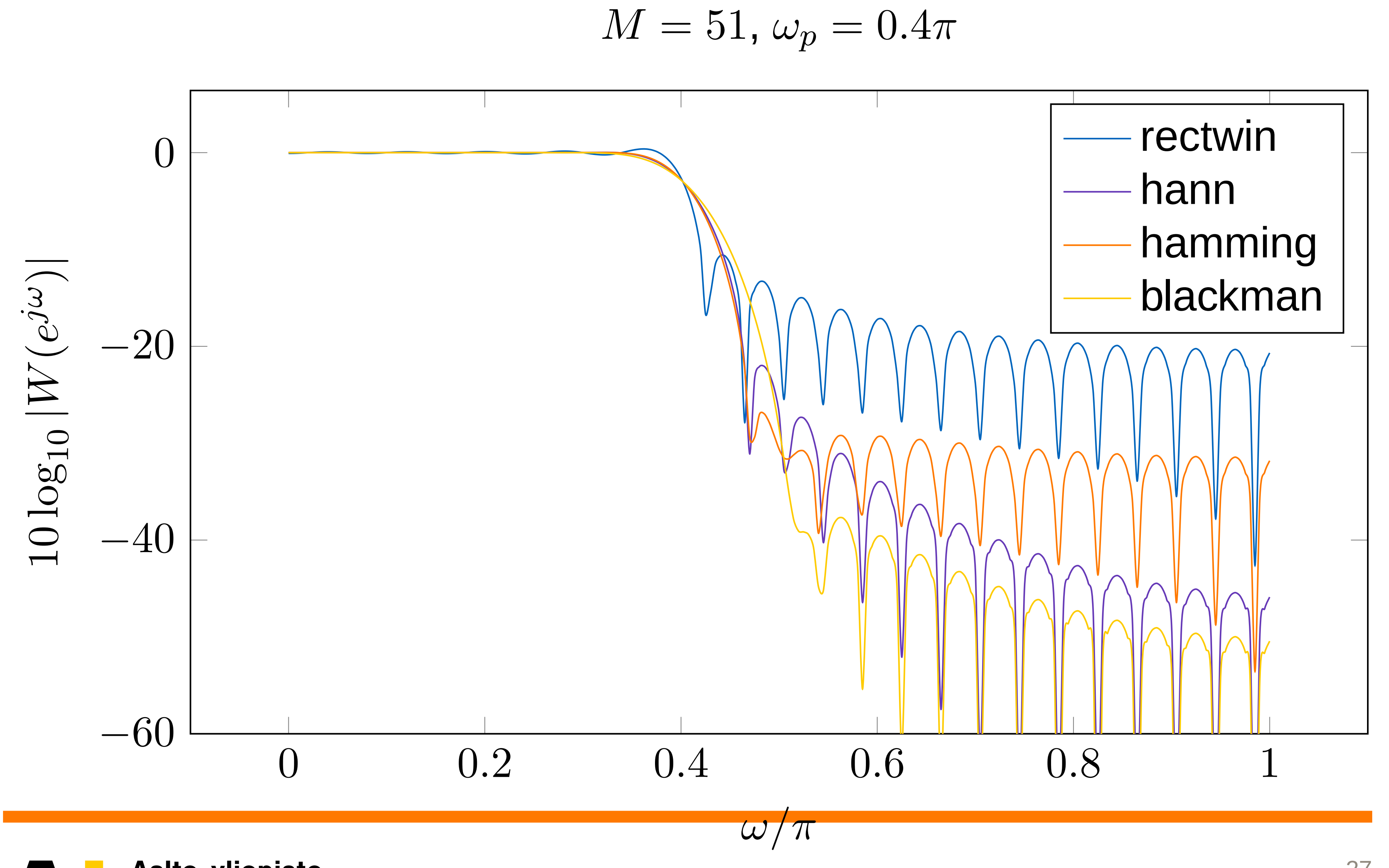
Parametrittomat ikkunat taajuustasossa



Ikkunat suodatinsuunnittelussa

- Ikkunan pituus ja tyyppi määräävät pääkeilan leveyden
  $\Rightarrow$ siirtymäkaistan leveys
- Ikkunan tyyppi määrää sivukeilatason $\Rightarrow$ estokaistan vaimennus

Esimerkki: alipäästösuodatin



Suodattimen suunnittelu parametrittomalla ikkunalla

1. Valitse ikkuna, jolla riittävä estokaistan vaimennus (taulukoitu esim. Mitran kirjassa)
2. Siirtymäkaistan leveys $\Delta\omega = |\omega_s - \omega_p|$
3. Valitse suodattimen asteluku (pituus), niin että saadaan haluttu $\Delta\omega$ (esim. Mitran taulukosta)
4. Laske ideaalinen impulssivaste arvolla $\omega_c = (\omega_s - \omega_p)/2$
5. Kerro ideaalinen impulssivaste ikkunafunktiolla

Suodattimen suunnitteluesimerkki

- Spesifikaatio $\omega_p = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.5\pi$, vaimennus vähintään $\alpha_s = 40$dB
- Vaimennus ~~rect 13.3dB~~, Hann 43.9dB, Hamming 54.5dB, Blackman 58.1dB
- Siirtymäkaistan leveys $\Delta\omega = 0.2\pi$
- Suodattimen asteluku
  - Hann: $K = 3.11\pi/\Delta\omega = 15.55 \Rightarrow M = 33$
  - Hamming: $K = 3.32\pi/\Delta\omega = 16.6 \Rightarrow M = 35$
  - Blackman: $K = 5.56\pi/\Delta\omega = 27.8 \Rightarrow M = 57$

Parametrilliset ikkunat

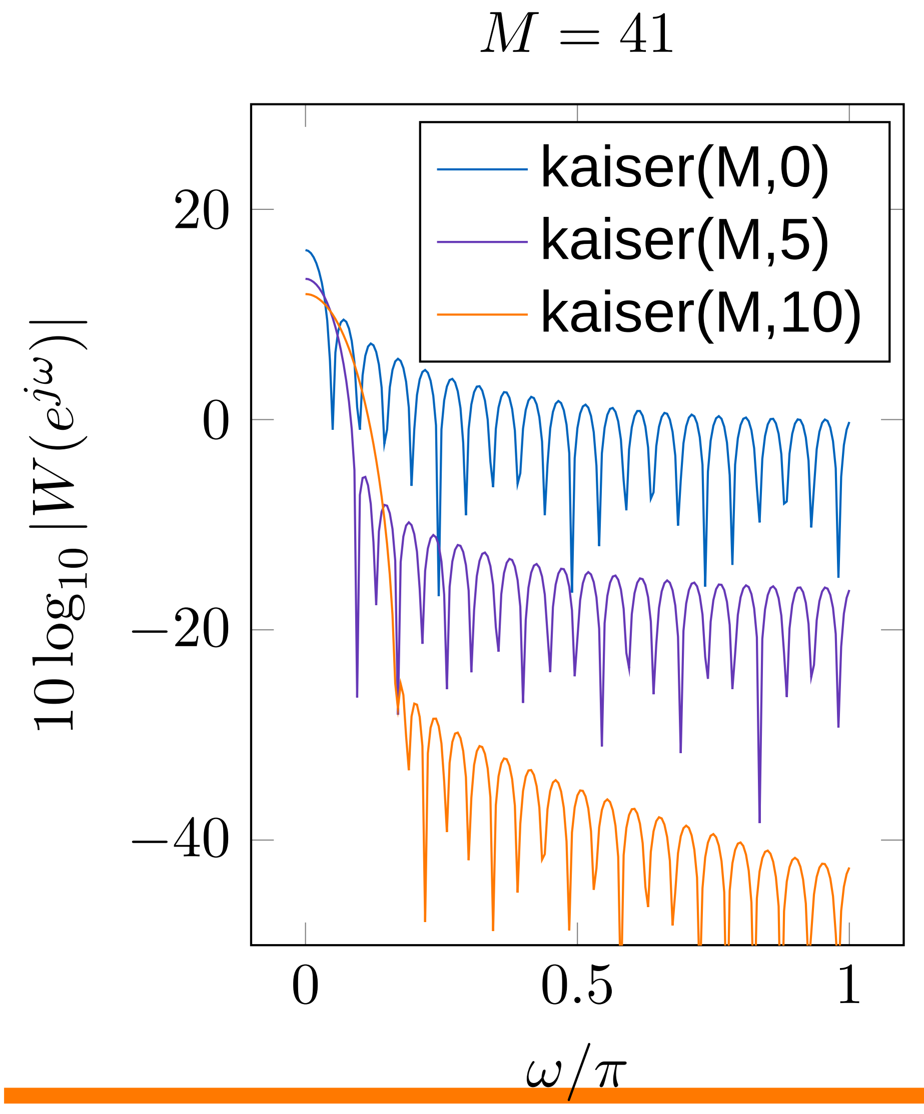
- Kaiser

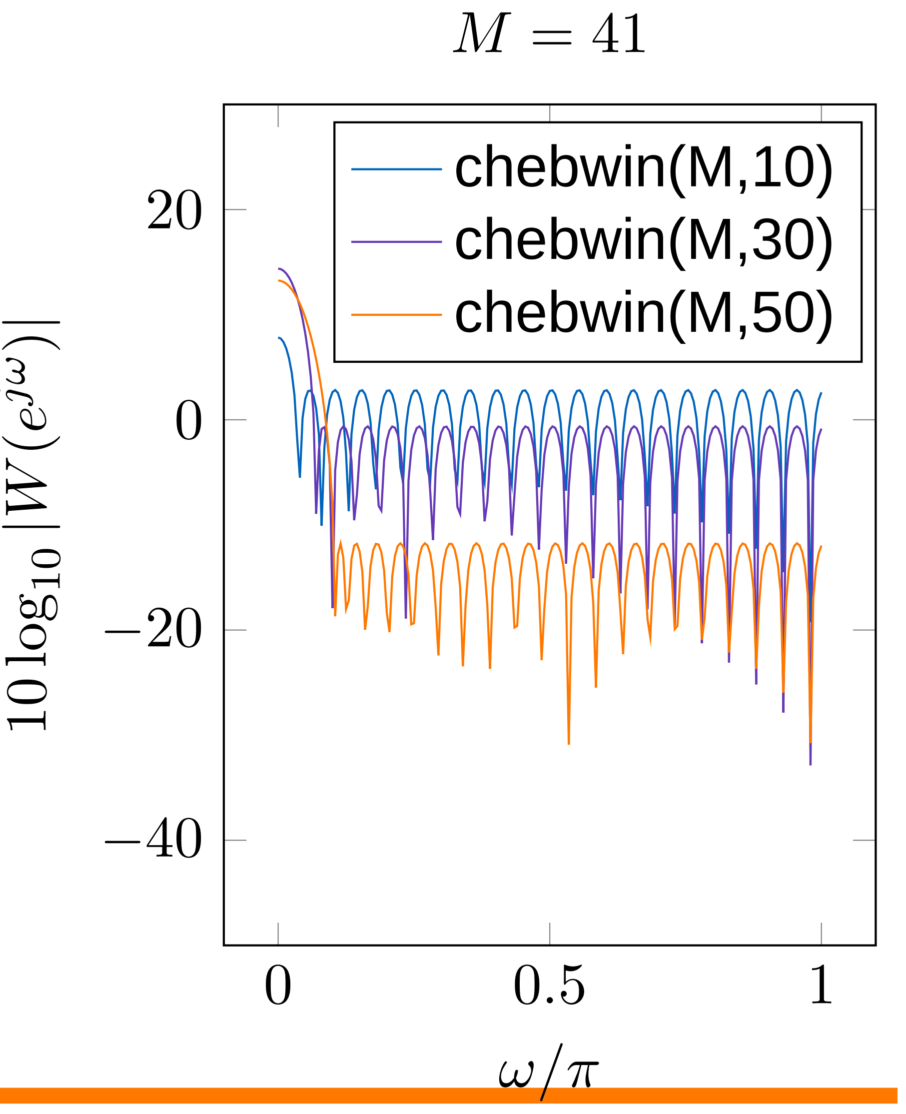
$$w[n] = \frac{I_0(\beta\sqrt{1-(n/K)^2})}{I_0(\beta)},$$

missä I_0 on muunnettu nollannen asteen Bessel-funktio

- Chebyshev (kts. esim Mitra)

Parametrilliset ikkunat: esimerkki

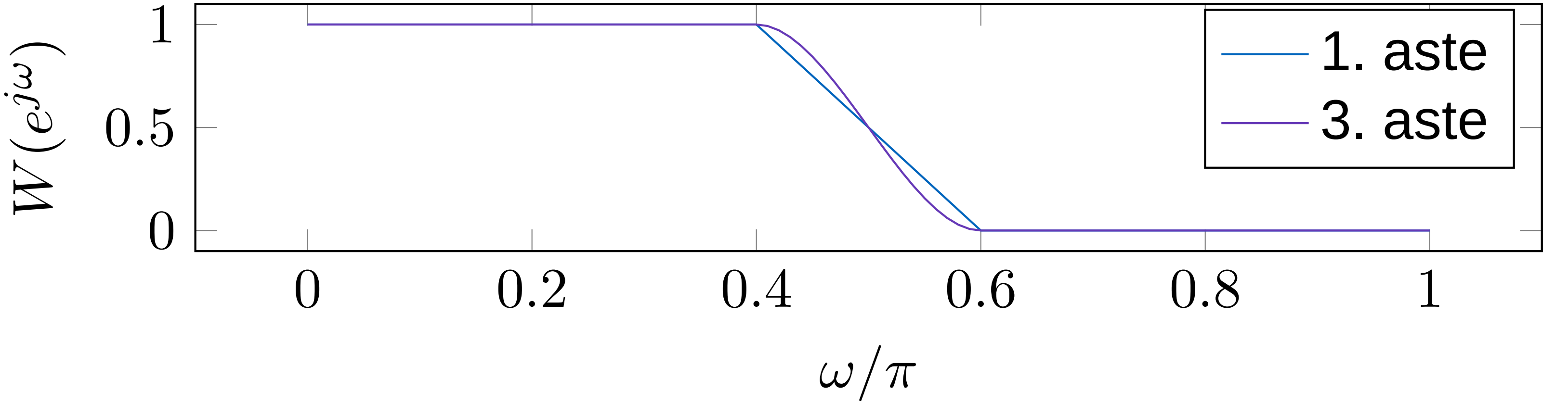




Jatkuva ideaalinen taajuusvaste

- Muunnetaan haluttua taajuusvastetta niin, että siinä ei ole epäjatkuvuuksia
- Käytetään splinejä
  - ▹ 1. aste: pisteet yhdistävä suora
  - ▹ $2n+1$. aste: n. derivaatat päätepisteissä nolla

  $\Rightarrow$ Lineaarinen yhtälöryhmä polynomin kertoimille

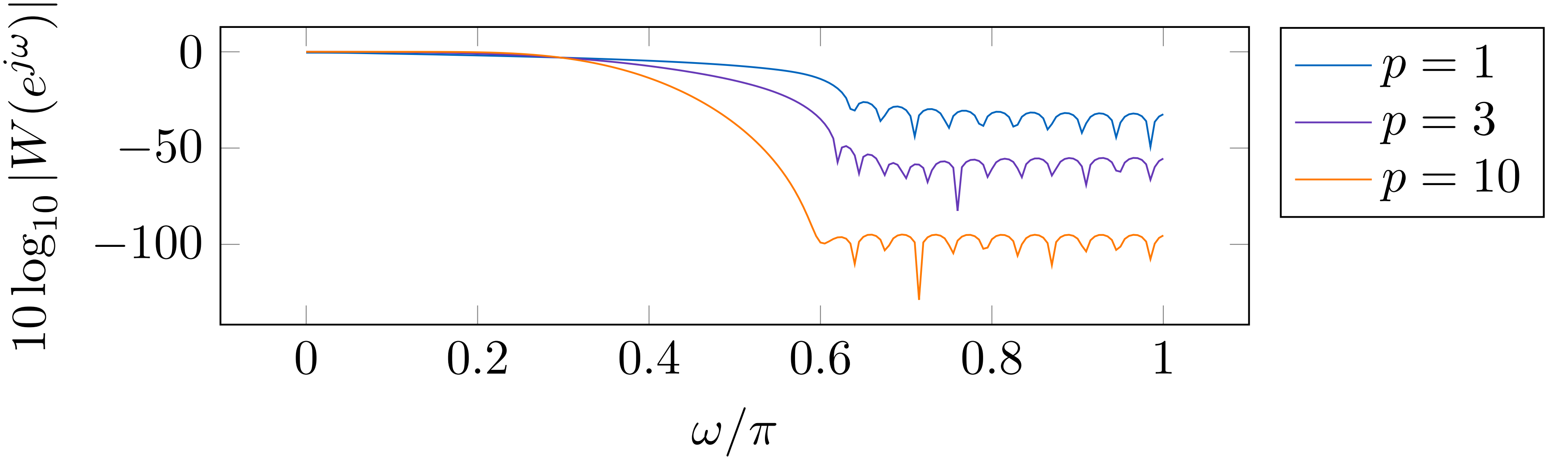


Splini

- Impulssivaste Fourier-käänteismuunnoksella
- Asteen p splinillä saadaan esim. alipäästösuodatin

$$h_{\mathrm{LP}}[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \left(\frac{\sin(\Delta\omega n/2p)}{\Delta\omega n/2p}\right)^p \frac{\sin(\omega_c/2)}{\pi n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

- Iso p ei välttämättä ole parempi



Ikkunoinnin ja splinien ongelmat

- Suorakaideikkuna on optimaalinen integroidun neliövirheen mielessä
- Neliövirhe ei välttämättä paras kriteeri Gibbsin ilmiön takia
- Ikkunan tai splinien asteen valinnassa joudutaan turvautumaan yritys–erehdys -toimintatapaan
- Tuloksen optimaalisuudesta ei ole mitään tietoa
- Onko parempia lähestymistapoja?

Minimax-optimointi

- Määritetään suurin absoluuttinen (painotettu) virhe

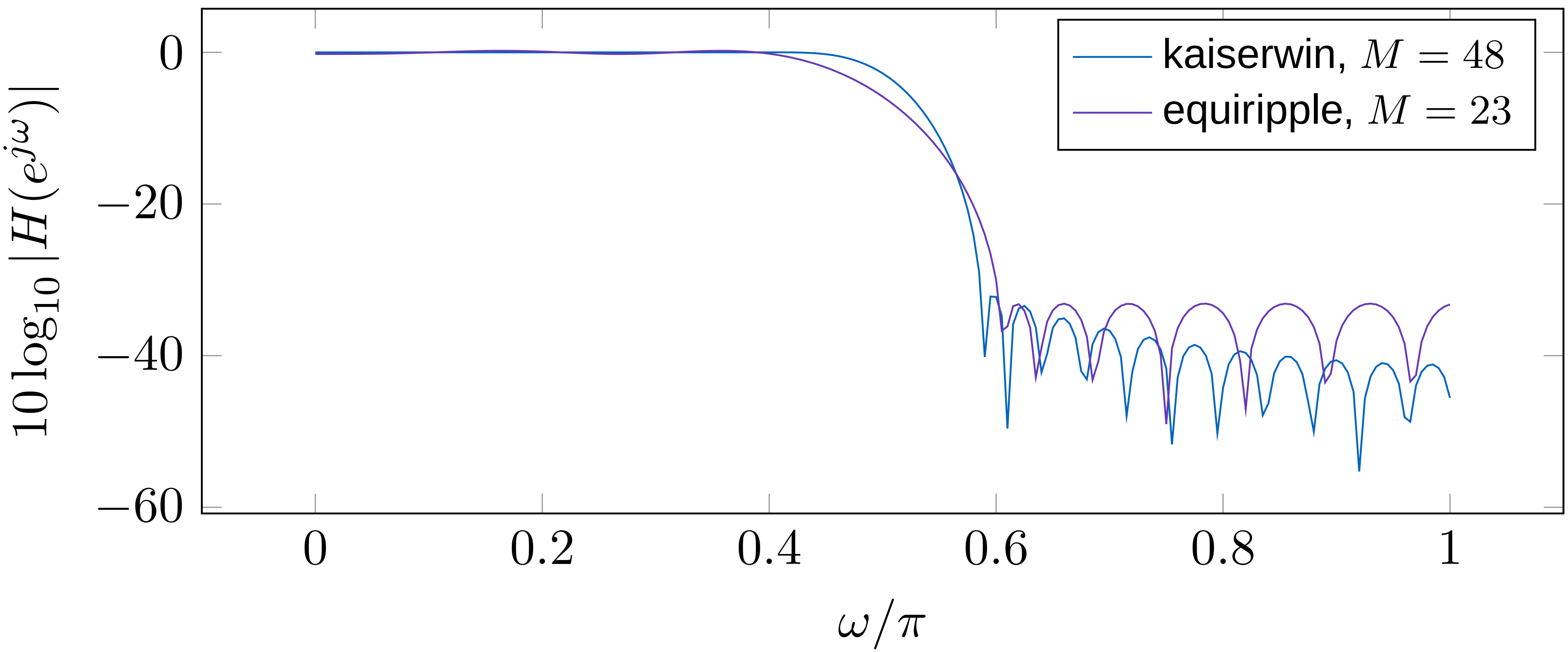
$$\tilde{\epsilon}(h_t[-K], \ldots, h_t[K]) = \max_{\omega} \left| H_t(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega}) \right| \phi(\omega)$$

- Minimoidaan saatu kriteeri
- Iteratiiviset algoritmit
  - Parks-McClellan
  - Remez

Esimerkki: alipäästösuodatin

Matlab:

```
filt = designfilt('lowpassfir', 'PassbandFrequency', 0.4,
'StopbandFrequency', 0.6, 'StopbandAttenuation', 65,
'DesignMethod', 'equiripple')
```



Seuraava luento

- IIR-suodattimien suunnittelu