



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-C5230

**Digitaalisen signaalinkäsittelyn
perusteet**

Luento 9: IIR-suodatinten suunnittelu

Luennon aiheet kirjassa

- Mitra, Digital Signal Processing: A Computer Based Approach, 9 IIR Digital Filter Design
 - ▷ 9.1 Preliminary Considerations
 - ▷ 9.2 Bilinear Transformation Method of IIR Filter Design
 - ▷ 9.3 Design of Lowpass IIR Digital Filters
 - ▷ 9.4 Design of Highpass, Bandpass, and Bandstop IIR Digital Filters
 - ▷ 9.5 Spectral Transformations of IIR Filters
 - ▷ 9.6 IIR Digital Filter Design Using MATLAB
- Vaihtoehtoinen materiaali Rawat, Digital signal processing 12. Infinite Impulse Response Digital Filter, 12.1-2, 12.7-13

Oppimistavoitteet

- Digitaalisten suodattimien johtaminen analogisista
- suodatusvaatimusten mukaisen IIR-suodattimen suunnittelu
- IIR-suodattimien ja eri suunnittelumenetelmien edut ja rajoitteet

Johdanto

- IIR-suodattimia käytetään laajasti
 - ▷ yksinkertainen toteutus (pieni asteluku)
 - ▷ hyvä suodatus
- IIR-suodattimien haittapuolina
 - ▷ mahdolliset stabiiliusongelmat
 - ▷ epälineaari vaihevaste kausaalisilla suodattimilla
- Analogisesta IIR-suodattimesta mahdollista johtaa vastaava digitaalinen

Sisältö

1. Suodattimen spesifikaatio
2. Analogiset suodattimet
3. Bilineaarimuunnos
4. Spektraalimuunnokset
5. IIR-suodatinten suunnittelu

Suodattimen suunnitteluspesifikaatio

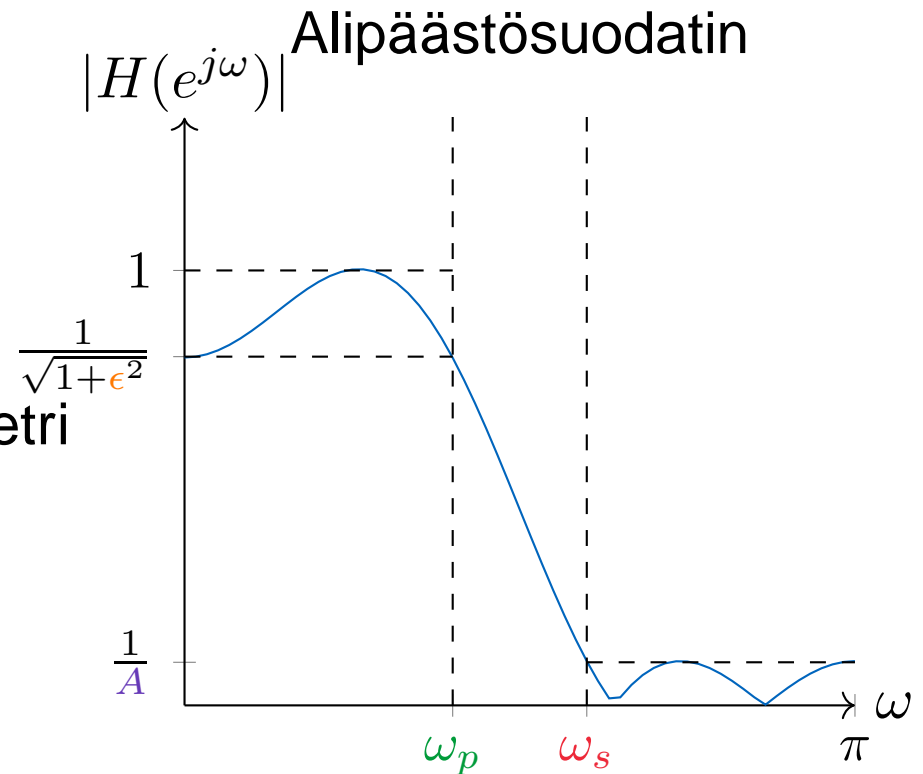
Magnitudivasteen spesifikaatio

ω_p päästökaistan rajataajuus
(passband cutoff frequency)

ω_s estokaistan rajataajuus
(stopband cutoff frequency)

A estokaistan vaimennusparametri

ϵ päästökaistan vahvistuksen
poikkeama



Suodattimen suunnittelun parametrit

- Päästökaistan parametri ϵ
 - ▷ päästökaistan vahvistuksen maksimi $1 + \epsilon^2$
 - ▷ normalisoidaan tekijällä $(1 + \epsilon^2)^{-1}$ \Rightarrow Taajuusvasteen maksimivaimennus $\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$
- Desibeleinä $\alpha_{\max} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \epsilon^2} = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2)$
- $\alpha_s = 20 \log_{10} A$

IIR-suodattimen perussuunnittelu

- Suunnittelu voidaan tehdä analogisen prototyypin kautta
 - ▷ usein suodattimille suljetun muodon ratkaisut
 - ▷ voidaan tehdä käsin laskemalla
- Analoginen prototyyppi muutetaan digitaaliseksi
 - ▷ useita eri muunnoksia

Sisältö

1. Suodattimen spesifikaatio
2. Analogiset suodattimet
3. Bilineaarimuunnos
4. Spektraalimuunnokset
5. IIR-suodatinten suunnittelu

Analogiset suodattimet

- Siirtofunktio ilmaistaan s-tasossa $H_a(s)$
- Aikatason ja s-tason yhteys Laplace-muunnos

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- Erikoistapauksena muunnos taajuustasoon eli Fourier-muunnos
 $s = j\Omega$
- Stabiiliusehto: napojen reaaliosa < 0

Klassiset analogiset suodattimet

- Kolme päätyyppiä
 - ▷ Butterworth
 - ▷ Chebyshev
 - ▷ elliptinen
- Butterworth ja Chebyshev ovat elliptisen suodattimen erikoistapauksia
- Näille suodatintyypeille valmiita taulukoita ja suunnittelufunktioita
- Myös muita suodatintyyppejä (kts. esim. Wikipedia)

Butterworth-suodatin

- Analogisen asteen N vahvistusfunktio

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

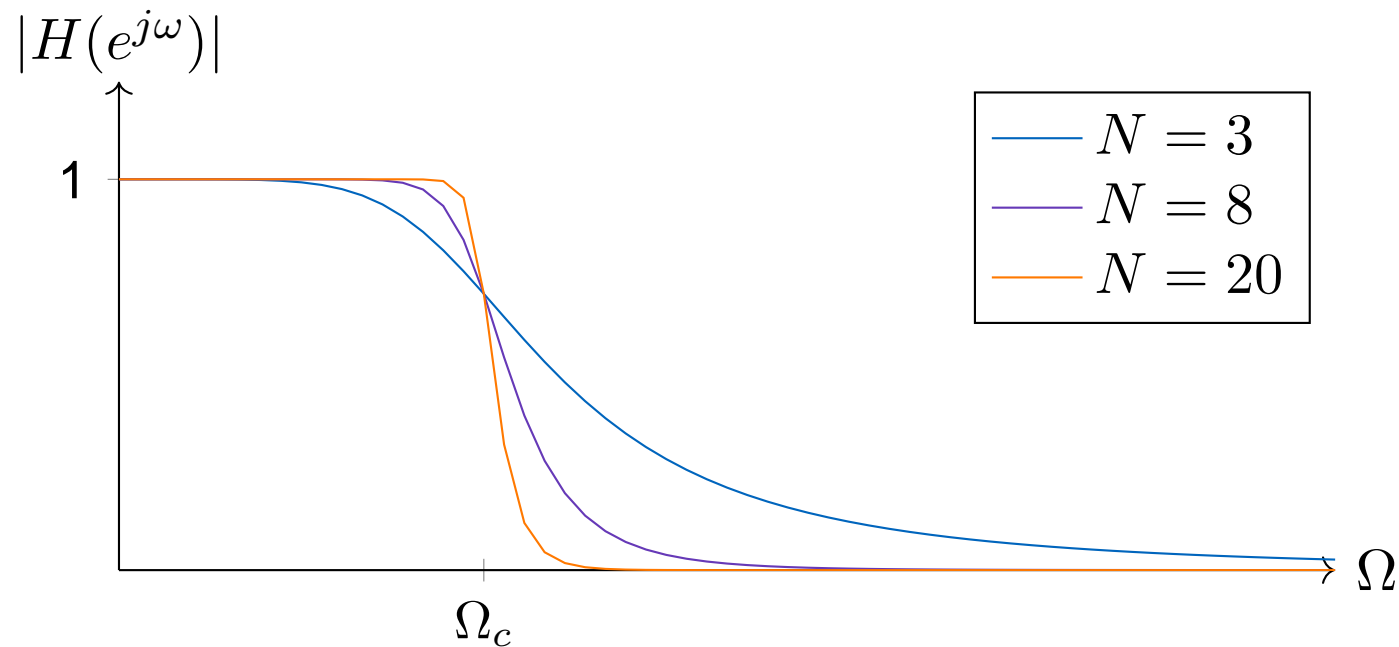
- Ensimmäiset $2N - 1$ derivaattaa nolliä taajudella $\Omega = 0$ (maksimaalisen tasainen nollassa)
- Parametri Ω_c 3dB-leikkaustaajuus

$$|H_a(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_c/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{2}$$

eli $20 \log_{10} |H_a(j\Omega_c)| \approx -3.01$

Butterworth-suodattimen magnitudivaste

- Taajuusvaste monotonisesti vähenevä, ei aaltoilua
- Asteluvin kasvaessa siirtymä jyrkkenee



Butterworth-suodatin s-tasossa

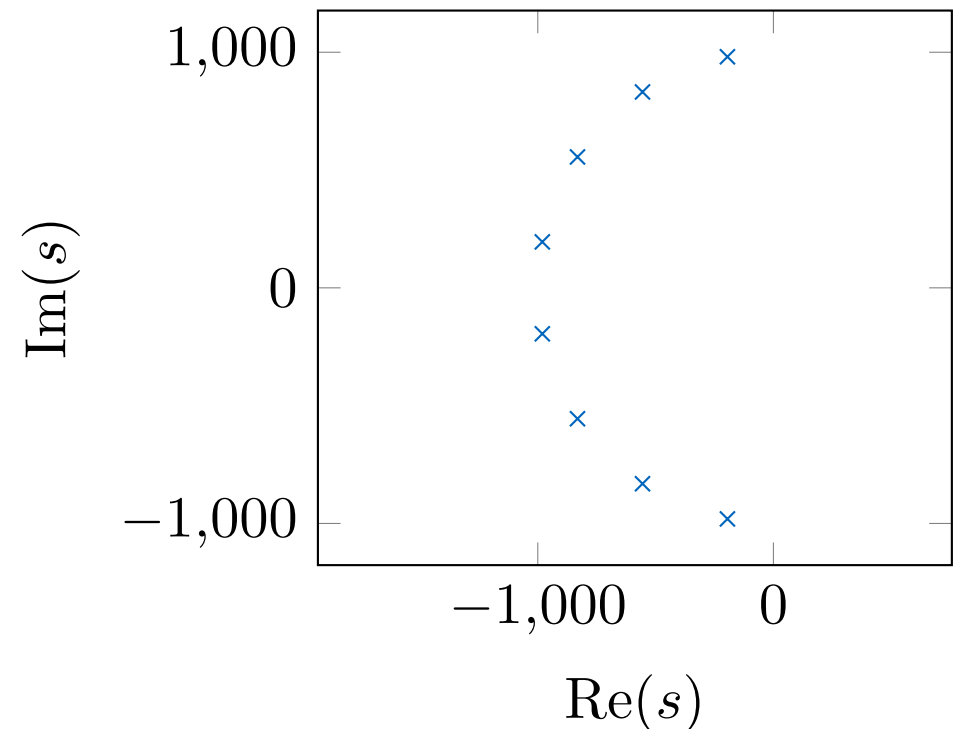
- Siirtofunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{\prod_{n=1}^N (s - p_n)}$$

- Navat

$$p_n = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2} + j\pi\frac{2n-1}{2N}}$$

$$N = 8, \Omega_c = 1000$$



Chebyshev 1 -suodatin

- Analogisen asteen N vahvistusfunktio

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

- $T_N(\Omega)$ on asteluvun N Chebyshev-polynomi

$$T_N(\Omega) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} \Omega), & |\Omega| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} \Omega), & |\Omega| > 1 \end{cases}$$

Chebyshev 1 -suodattimen siirtofunktio

- Siirtofunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$H_a(s) = \frac{\Omega_p^N}{\prod_{n=1}^N (s - p_n)}$$

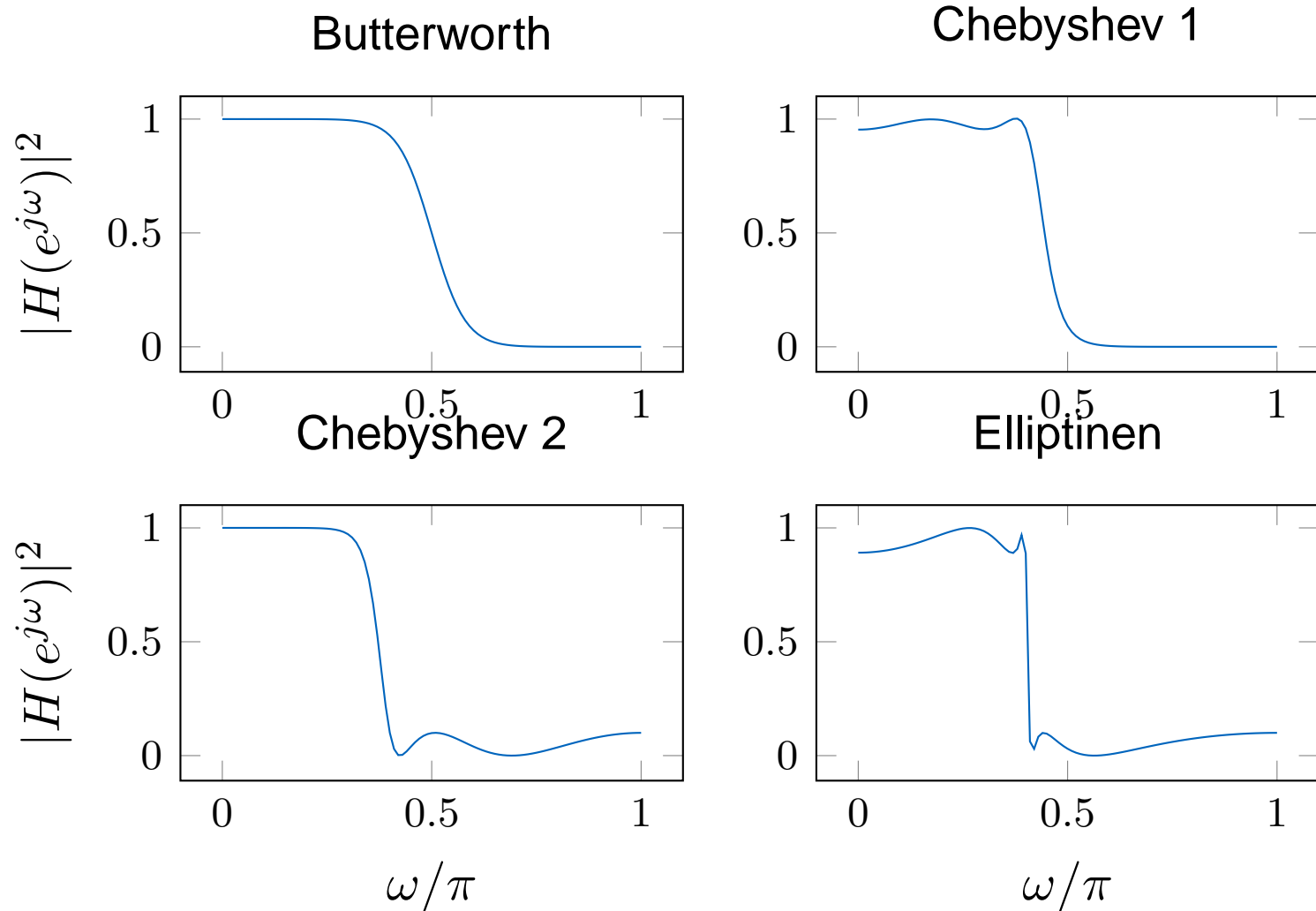
- Navat

$$p_n = -\Omega_p \xi \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right) + j\Omega_p \eta \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right)$$
$$\xi = \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma}, \quad \eta = \frac{\gamma^2 + 1}{2\gamma}, \quad \gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}}{\epsilon}\right)^{1/N}$$

Suodatintyyppejä

- Butterworth: monotoninen
- Chebyshev 1: tasa-aaltoleiva päästök., monotoninen estok.
- Chebyshev 2: monotoninen, tasa-aaltoleiva estok.
- Elliptinen: tasa-aaltoleiva päästök., tasa-aaltoleiva estok.
- ...

Suodatintyyppejä digitaalisena



Sisältö

1. Suodattimen spesifikaatio
2. Analogiset suodattimet
3. Bilineaarimuunnos
4. Spektraalimuunnokset
5. IIR-suodatinten suunnittelu

Muunnos digitaaliseksi

- Analogisen suodattimen suunnittelusta saadaan siirtofunktio $H_a(s)$
- Tarvitaan digitaalisen suodattimen siirtofunktio $G(z)$
- Muunnos s-tasosta z-tasoon
 - ▷ Kuva imaginaariakselin yksikköympyrälle
- Useita muunnoksia
 - ▷ impulssi-invarianssi
 - ▷ bilineaari muunnos
 - ▷ ...

Muunnos digitaaliseksi

- Kirjoitetaan diskreettiaikainen signaali delta-funktion avulla analogisena

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$

- Laplace-muunnos

$$X_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](e^{sT})^{-n}$$

- Laplace- ja z-muunnoksen välillä yhteys

$$z = e^{sT} \Leftrightarrow s = T^{-1} \ln z$$

ei lineaarinen, joten ei voida käyttää

Bilineaarimuunnos

- Sarjakehitelmä $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$z = e^{sT} = \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}} = \frac{1 + sT/2 + \frac{(sT/2)^2}{2} + \dots}{1 - sT/2 + \frac{(-sT/2)^2}{2} + \dots}$$

- Ensimmäisen asteen approksimaatio

$$z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \Leftrightarrow z - (sT/2)z = 1 + sT/2 \Leftrightarrow \frac{sT}{2} = \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

Stabiilius bilineaarimuunnoksessa

- Muunnos

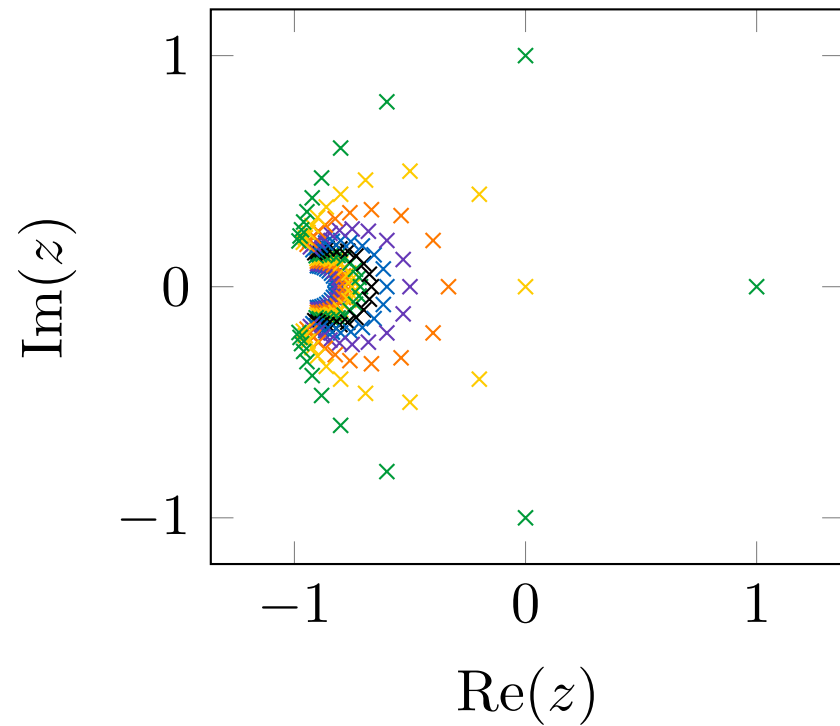
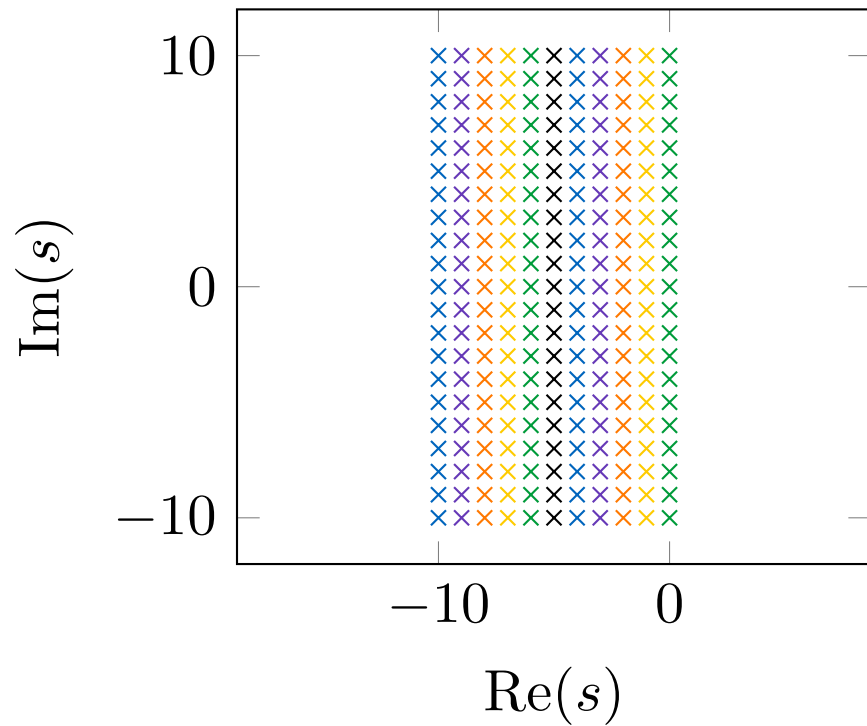
$$z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}$$

- Sijoitetaan $s = \sigma + j\Omega$

$$|z|^2 = \frac{|1 + sT/2|^2}{|1 - sT/2|^2} = \frac{(1 + \frac{T}{2}\sigma)^2 + (\frac{T}{2}\Omega)^2}{(1 - \frac{T}{2}\sigma)^2 + (\frac{T}{2}\Omega)^2} \begin{cases} < 1, & \sigma < 0 \\ = 1, & \sigma = 0 \\ > 1, & \sigma > 0 \end{cases}$$

- Reaaliarvoltaan negatiivinen puolitaso kuvautuu yksikköympyrän sisään
⇒ stabiilius säilyy

Bilineaarimuunnos s-tasosta z-tasoon

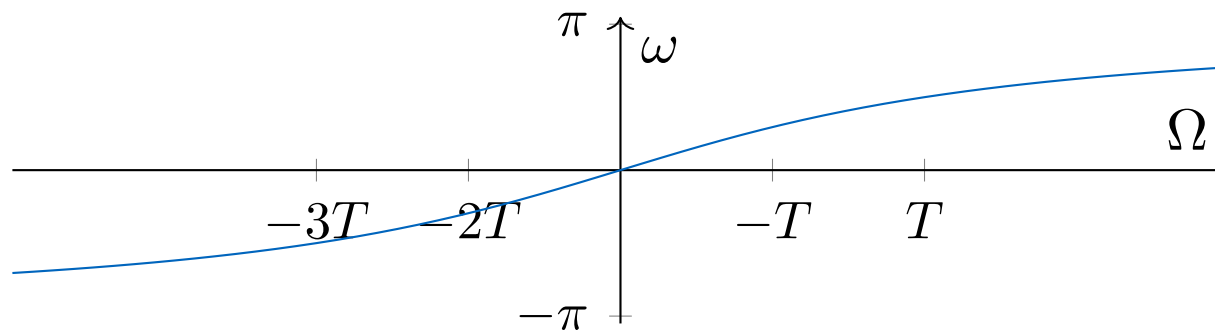


Bilineaarimuunnoksen taajuus

- S-tasossa taajuus on imaginaariosa $\Omega = \text{Im}(s)$, z-tasossa kompleksiarargumentti $\omega = \arg z$

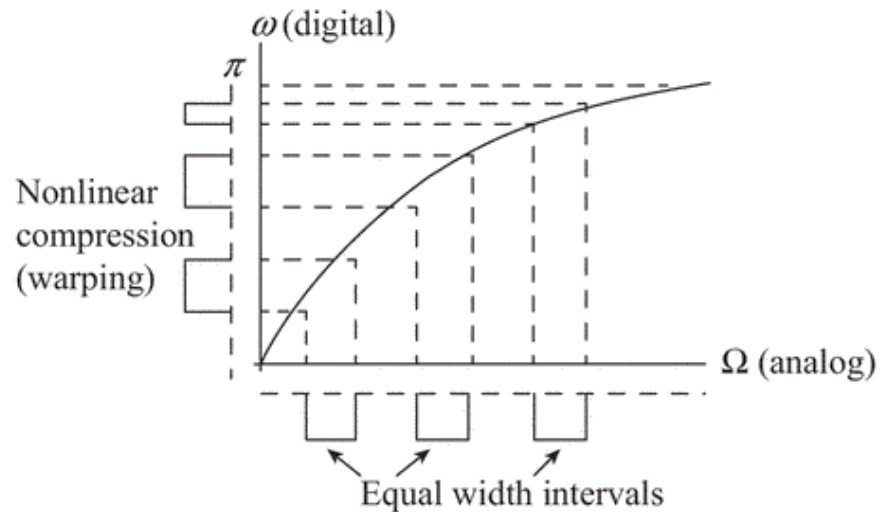
$$j\Omega = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = j \frac{2}{T} \tan(\omega/2)$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan(\omega/2) \Leftrightarrow \omega = 2 \arctan(T\Omega/2)$$



Taajuusvääristymä

- Bilineaarimuunnos kuvaa koko imaginaariakselin yksikköympyrälle
- Kuvaus on bijektio
⇒ ei laskostumista
- Epälineaarinen ⇒ taajuusvääristymä (engl. warping)
- Analogisen suodattimen kriittiset taajuudet tulee “esivääristää” (engl. pre-warp)



Lähde: Rawat, Digital signal processing

Esimerkki: 1. asteen Butterworth-suodatin

- Siirtofunktio $H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$
- Bilineaarimuunnos

$$G(z) = \frac{\Omega_c}{\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + \Omega_c} = \frac{\Omega_c T}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1}) + \frac{\Omega_c T}{2} (1+z^{-1})} \right)$$
$$= \frac{\Omega_c T}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{\left(1 + \frac{\Omega_c T}{2}\right) - \left(1 - \frac{\Omega_c T}{2}\right)z^{-1}} \right) = \frac{1-\alpha}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

missä $\alpha = 1 - \frac{\Omega_c T}{2} \frac{1 + \frac{\Omega_c T}{2}}{1 + \frac{\Omega_c T}{2}}$

- Sama alipäästösuodatin kuin luennolla 6
- Muunnoksesta $\Omega = \frac{2}{T} \tan(\omega/2)$ saadaan 3dB-taajuudelle

$$\alpha = \frac{1 - \tan(\omega_c/2)}{1 + \tan(\omega_c/2)}$$

Sisältö

1. Suodattimen spesifikaatio
2. Analogiset suodattimet
3. Bilineaarimuunnos
4. Spektraalimuunnokset
5. IIR-suodatinten suunnittelu

Spektraalimuunnos

- Toistaiseksi käsitelty alipäästösuodattimia
- Alipäästösuodattimen siirtofunktiosta $G_L(z)$ voidaan saada halutun tyyppinen suodatin $G_D(\hat{z})$
- Muuttujien välinen yhteys $z = F(\hat{z})$, eli $G_D(\hat{z}) = G_L(F(\hat{z}))$

Spektraalimuunnokset

Tyyppi	Muunnos	Parametrit
ali \rightarrow ali	$z^{-1} = \frac{\hat{z}^{-1} - \lambda}{1 - \lambda \hat{z}^{-1}}$	$\lambda = \frac{\sin(\frac{\omega_c - \hat{\omega}_c}{2})}{\sin(\frac{\omega_c + \hat{\omega}_c}{2})}$
ali \rightarrow yli	$z^{-1} = -\frac{\hat{z}^{-1} - \lambda}{1 - \lambda \hat{z}^{-1}}$	$\lambda = \frac{\cos(\frac{\omega_c - \hat{\omega}_c}{2})}{\cos(\frac{\omega_c + \hat{\omega}_c}{2})}$
ali \rightarrow kaistanpäästö	$z^{-1} = -\frac{\hat{z}^{-2} - \frac{2\lambda\rho}{\rho+1}\hat{z}^{-1} + \frac{\rho-1}{\rho+1}}{\frac{\rho-1}{\rho+1}\hat{z}^{-2} - \frac{2\lambda\rho}{\rho+1}\hat{z}^{-1} + 1}$	$\lambda = \frac{\cos(\frac{\hat{\omega}_{c1} + \hat{\omega}_{c2}}{2})}{\cos(\frac{\hat{\omega}_{c1} - \hat{\omega}_{c2}}{2})}$ $\rho = \cot(\frac{\hat{\omega}_{c2} - \hat{\omega}_{c1}}{2}) \tan(\frac{\omega_c}{2})$
ali \rightarrow kaistanesto	$z^{-1} = \frac{\hat{z}^{-2} - \frac{2\lambda\rho}{\rho+1}\hat{z}^{-1} - \frac{\rho-1}{\rho+1}}{-\frac{\rho-1}{\rho+1}\hat{z}^{-2} - \frac{2\lambda\rho}{\rho+1}\hat{z}^{-1} + 1}$	$\lambda = \frac{\cos(\frac{\hat{\omega}_{c1} + \hat{\omega}_{c2}}{2})}{\cos(\frac{\hat{\omega}_{c1} - \hat{\omega}_{c2}}{2})}$ $\rho = \tan(\frac{\hat{\omega}_{c2} - \hat{\omega}_{c1}}{2}) \tan(\frac{\omega_c}{2})$

Huom. Mitran ja Rawatin kirjoissa hiukan eri kaavat

Spektraalimuunnos: esimerkki

- Muunnetaan alipäästösuodatin 1. asteen Butterworth-suodatin kaistanpäästösuodattimeksi

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.245(1 + z^{-1})}{1 - 0.509z^{-1}}, \quad \omega_c = \frac{\pi}{5}$$

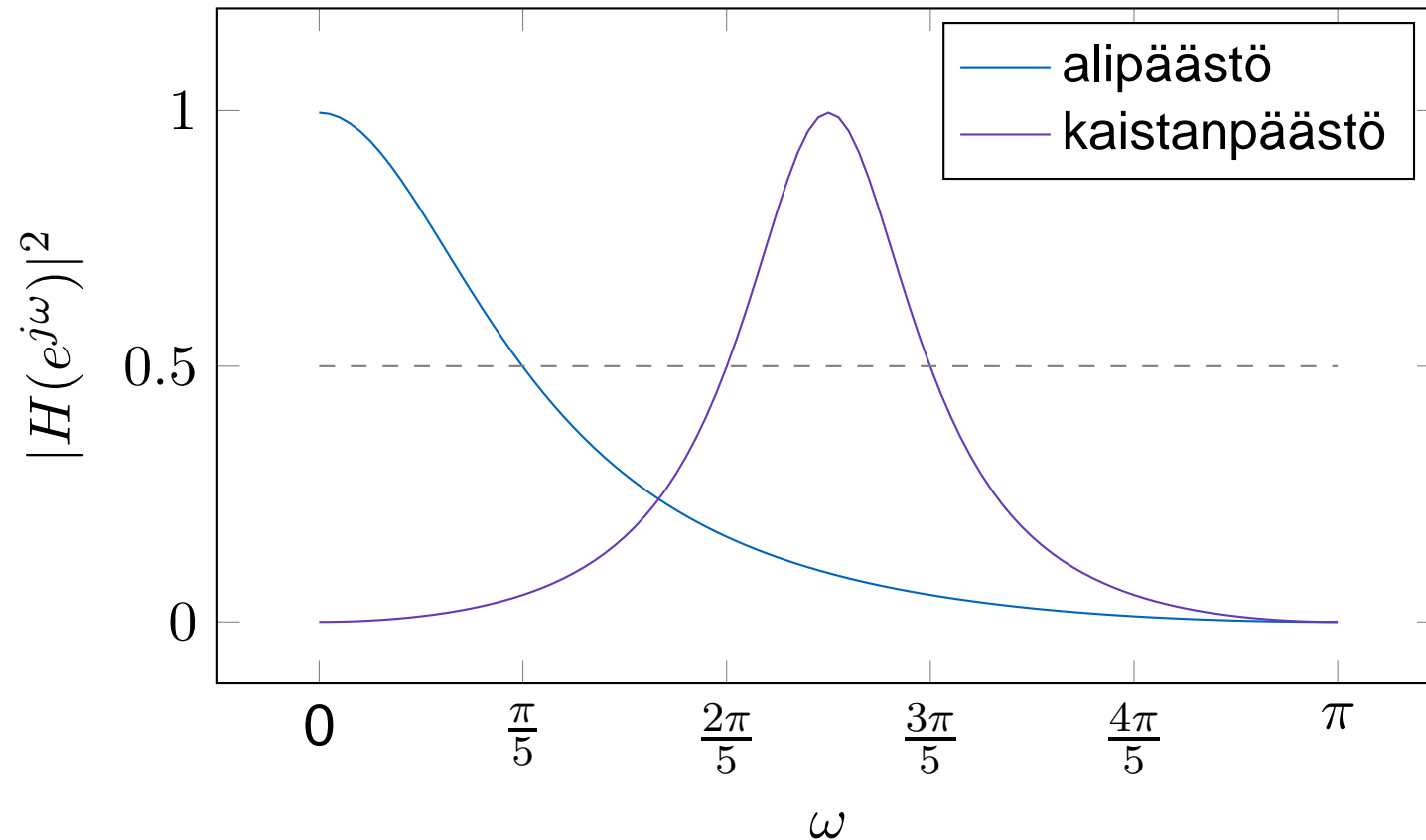
- Uudet rajataajuudet $\hat{\omega}_{c1} = \frac{2\pi}{5}$, $\hat{\omega}_{c2} = \frac{3\pi}{5}$
- Muunnos

$$\lambda = \frac{\cos(\frac{5\pi}{10})}{\cos(\frac{1\pi}{10})} = 0, \quad \rho = \cot(\frac{1\pi}{10}) \tan(\frac{1\pi}{10}) = 1$$

$$z^{-1} = -\frac{\hat{z}^{-2} - \frac{0}{1+1}\hat{z}^{-1} + \frac{1-1}{1+1}}{\frac{1-1}{1+1}\hat{z}^{-2} - \frac{0}{1+1}\hat{z}^{-1} + 1} = -\hat{z}^{-2}$$

- Saatiin suodatin $H(e^{j\omega}) = \frac{0.245(1-z^{-2})}{1+0.509z^{-2}}$

Spektraalimuunnos: esimerkki



Sisältö

1. Suodattimen spesifikaatio
2. Analogiset suodattimet
3. Bilineaarimuunnos
4. Spektraalimuunnokset
5. IIR-suodatinten suunnittelu

Klassinen IIR-suodatinsuunnittelu

1. Muuta taajuudet sopivalla kaavalla, esim. bilineaari

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan(\omega/2)$$

2. Suunnittele sopiva analoginen alipäästösuodatin

3. Muuta

1. analoginen suodatin digitaaliseksi valitulla muunnoksella ja
2. halutuksi suodattimeksi spektraalimuunnoksella

TAI muuta

1. analoginen alipäästösuodatin halutuksi suodatintyypiksi ja
2. sen jälkeen digitaaliseksi esim. bilineaarimuunnoksella

4. Tarkista, että lopputulos vastaa haluttua (jos ei, aloita alusta)

(Käytännössä: Matlabin `designfilt` tai muut vastaavat työkalut)

Klassisen suodatinsuunnittelun ongelmat

- Klassisella menetelmällä voi suunnitella perussuodatintyyppejä (yli-, ali-, kaistanpäästö- ja -esto-)
- Monimutkaisempien magnitudivasteiden suunnittelu ei ole mahdollista
- Vaikka analoginen prototyyppisuodatin olisi jollakin kriteerillä optimaalinen, samaa ei voi sanoa saadusta digitaalisesta

Kehittyneempi suodatinsuunnittelu

- Optimoidaan digitaalisen suodattimen kertoimet p_k ja d_k jollakin kriteerillä
- Esim. taajuusvasteen painotettu maksimivirhe

$$\max |H_i(e^{j\omega}) - H_t(e^{j\omega})|w(\omega)$$

- Integroitu virhe

$$\int |H_i(e^{j\omega}) - H_t(e^{j\omega})|^p w(\omega)$$

- Kertoimet lasketaan jollakin numeerisella menetelmällä

Seuraava luento

- Välistä jääneitä asioita
- Kurssin sisällön kertaus