



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-C5230

**Digitaalisen signaalinkäsittelyn
perusteet**

Luento 10: Kertaus

Luennon aiheet kirjassa

- Mitra, Digital Signal Processing: A Computer Based Approach
 - ▷ 1 Signals and Signal Processing
 - ▷ 2 Discrete-Time Signals in the Time Domain
 - ▷ 3 Discrete-Time Signals in the Frequency Domain
 - ▷ 4 Discrete-Time Systems
 - ▷ 5 Finite-Length Discrete Transforms
 - ▷ 6 z-Transform
 - ▷ 7 LTI Discrete-Time Systems in the Transform Domain
 - ▷ 8 Digital Filter Structures
 - ▷ 9 IIR Digital Filter Design
 - ▷ 10 FIR Digital Filter Design
 - Vaihtoehtoinen materiaali Rawat, Digital signal processing luvut 1-7, 10-12
-

Luento 1: Johdanto

Signaali- ja signaalinkäsittely

- Signaali on
 - ▷ yleistajuisesti tietoa välittävä lähete
 - ▷ matemaattisesti riippumattomien muuttujien funktio

Signaali- ja signaalinkäsittely

- Signaali on
 - ▷ yleistajuisesti tietoa välittävä lähete
 - ▷ matemaattisesti riippumattomien muuttujien funktio
- Signaalinkäsittely on
 1. signaalien matemaattista esitystä
 2. signaaleille suoritettavia operaatioita ja algoritmeja informaation sisällön muokkaamiseksi ja analysoimiseksi

Signaali- ja signaalinkäsittely

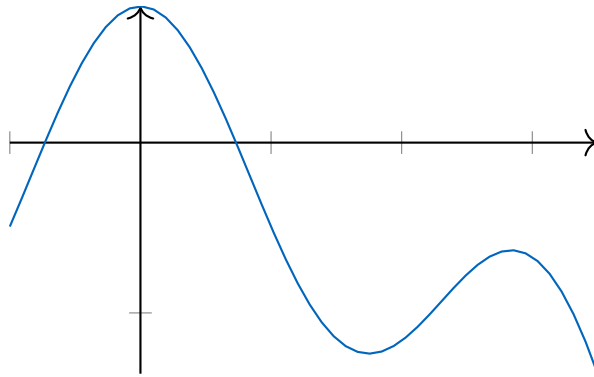
- Signaali on
 - ▷ yleistajuisesti tietoa välittävä lähete
 - ▷ matemaattisesti riippumattomien muuttujien funktio
- Signaalinkäsittely on
 1. signaalien matemaattista esitystä
 2. signaaleille suoritettavia operaatioita ja algoritmeja informaation sisällön muokkaamiseksi ja analysoimiseksi
- Digitaalista signaalinkäsittelyä tarvitaan nyky-yhteiskunnassa kaikkialla
 - ▷ digitaalinen lämpömittari
 - ▷ viestintäliikenne
 - ▷ satelliittipaikannus, . . .

Signaalin dimensio ja kanavat

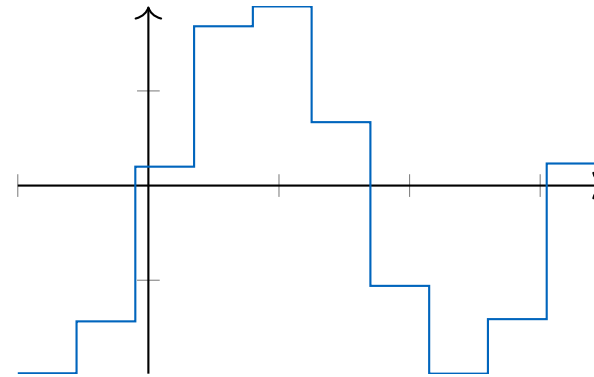
- Signaalin dimensio = riippumattomien muuttujien määrä
 - ▷ 1-ulotteinen (1D) signaali: sähkövirta $I(t)$
 - ▷ 2-ulotteinen (2D) signaali: harmaasävykuva $s(x, y)$
 - ▷ 3-ulotteinen (3D) signaali: harmaasävyvideo $s(x, y, t)$
- Signaalin kanavien määrä
 - ▷ 1-kanavainen: lämpötila, $T(t)$, paine $p(t)$
 - ▷ 3-kanavainen: värikuva $u(x, y) = [r(x, y) \ g(x, y) \ b(x, y)]^T$
 - ▷ N-kanavainen: EEG-mittaus

Signaalien luokittelu

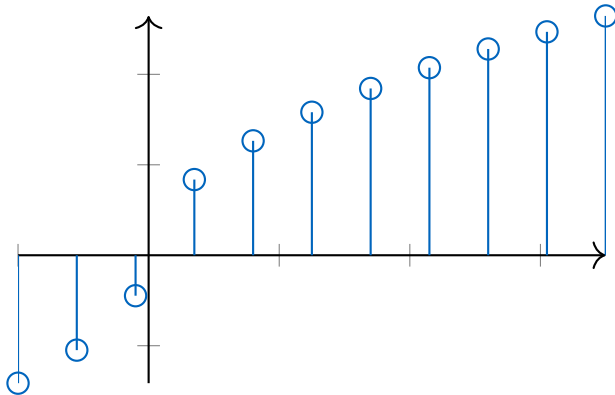
Analoginen



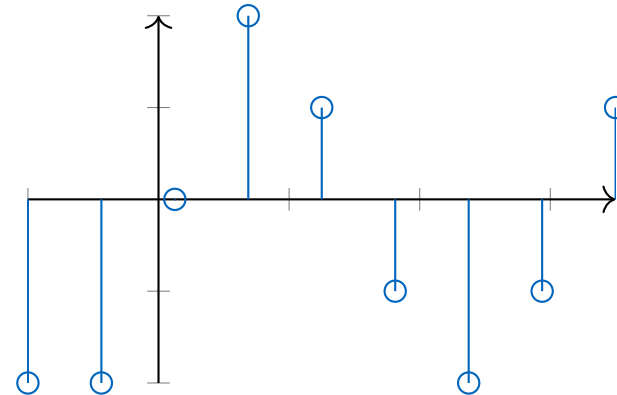
Kvantisoitu



Diskreettiaikainen

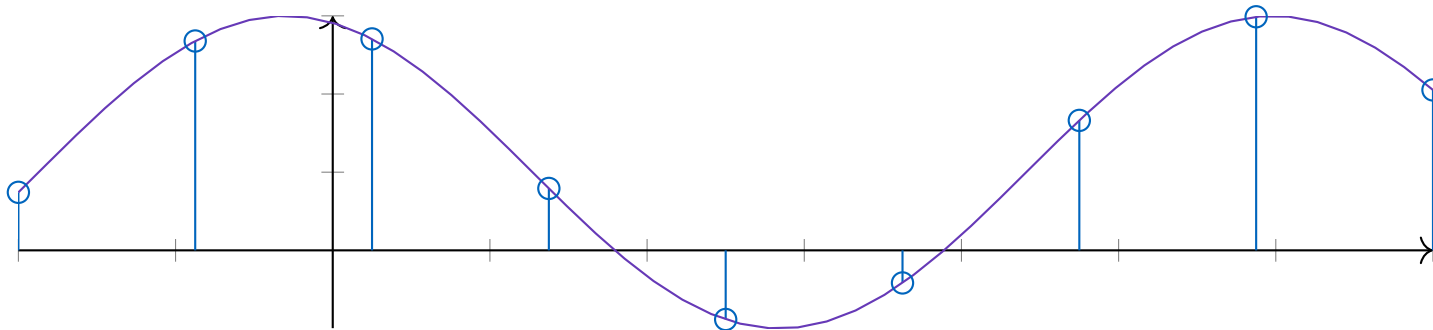


Digitaalinen



Luento 2: Diskreettiaikaiset signaalit aikatasossa

Diskreettiaikainen signaali



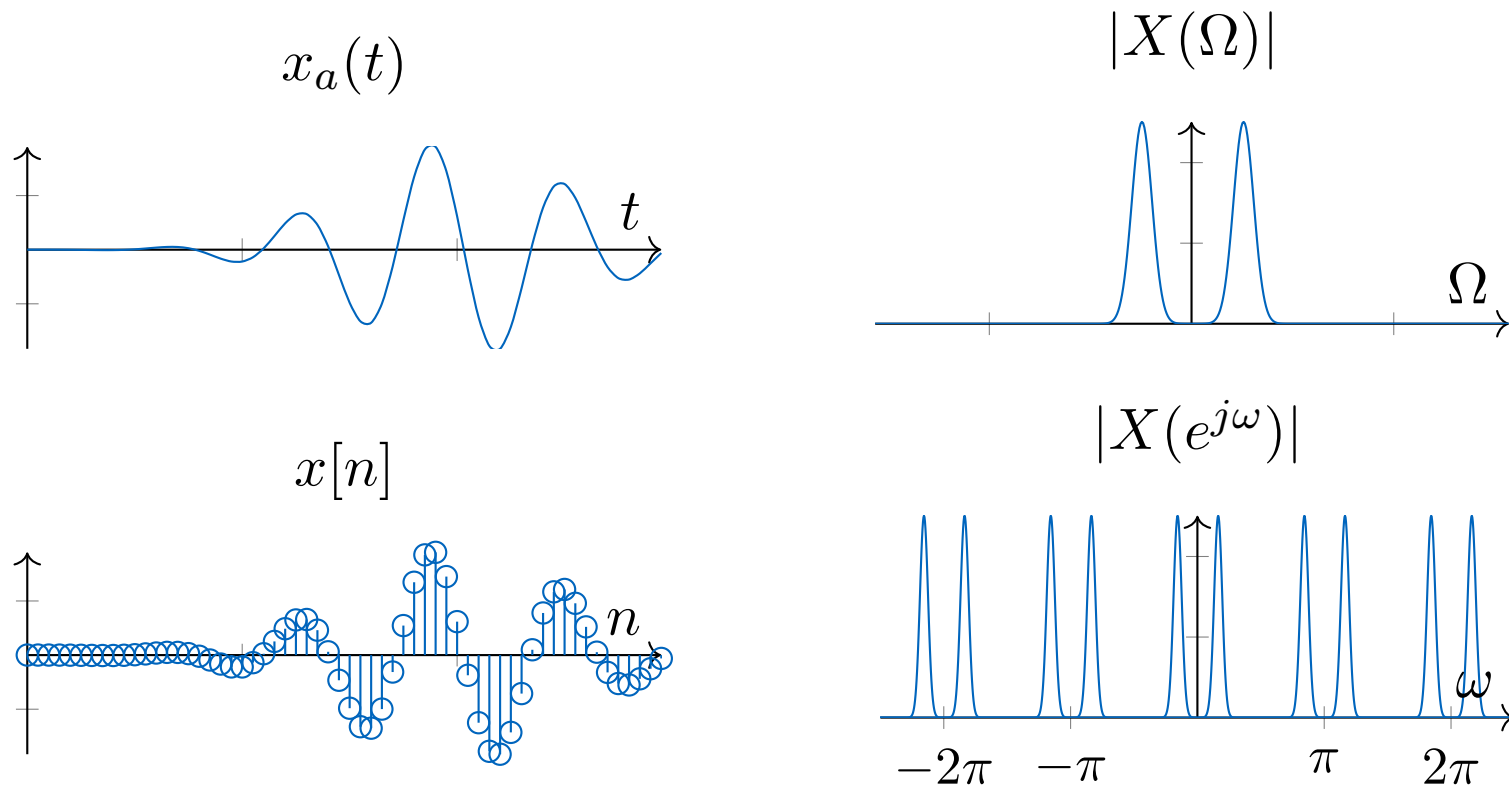
- Analogisesta signaalista saadaan diskreettiaikainen *näytteistämällä* (engl. sampling)

$$x[n] = x_a(nT), \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

- Näytteenottoväli T_s (engl. sampling interval, sampling period)
- Näytteenottotaajuus $F_s = 1/T_s$ (engl. sampling frequency)

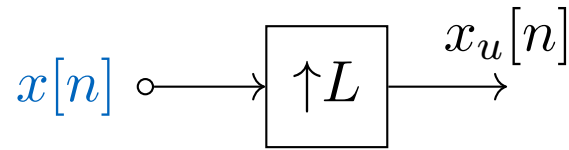
Näytteistys ja taajuudet

- Analogisen signaalin taajuus $F \in [-\infty, \infty]$
- Diskreettiaikaisen signaalin normalisoitu taajuus $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- Kulmataajuudet $\Omega = 2\pi F \in [-\infty, \infty]$, $\omega = 2\pi f \in [-\pi, \pi]$
- Huom! usein käytössä normalisoitu kulmataajuus $\omega/\pi \in [-1, 1]$



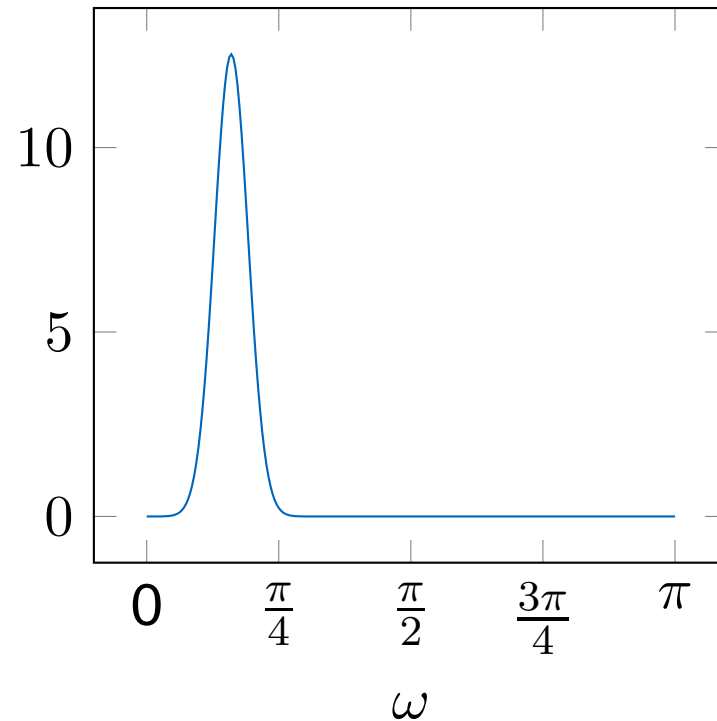
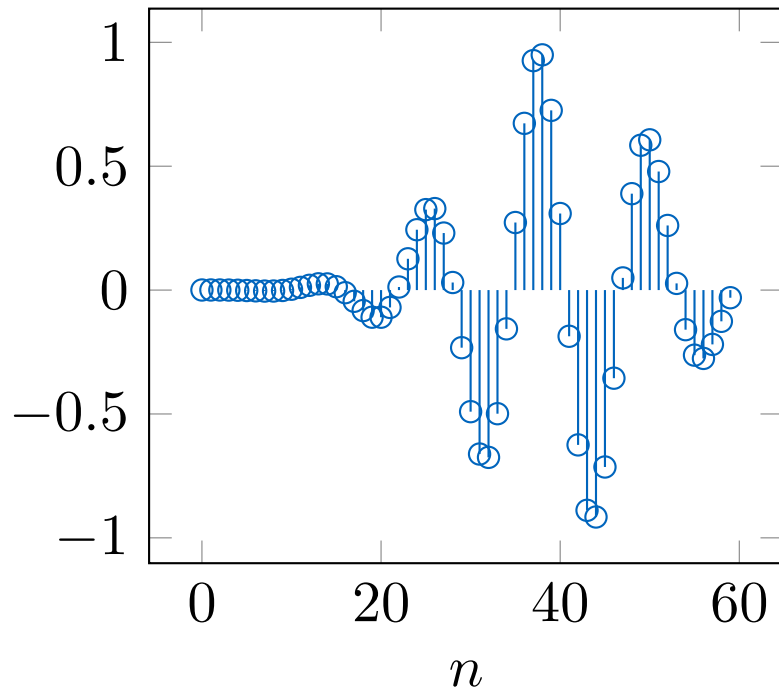
Ekstra: interpolointi 1

- Nostetaan näytteiden määrä L -kertaiseksi lisäämällä nolliä



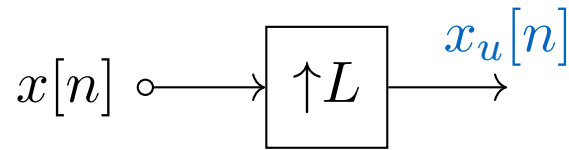
$x[n]$

$|X(e^{j\omega})|$



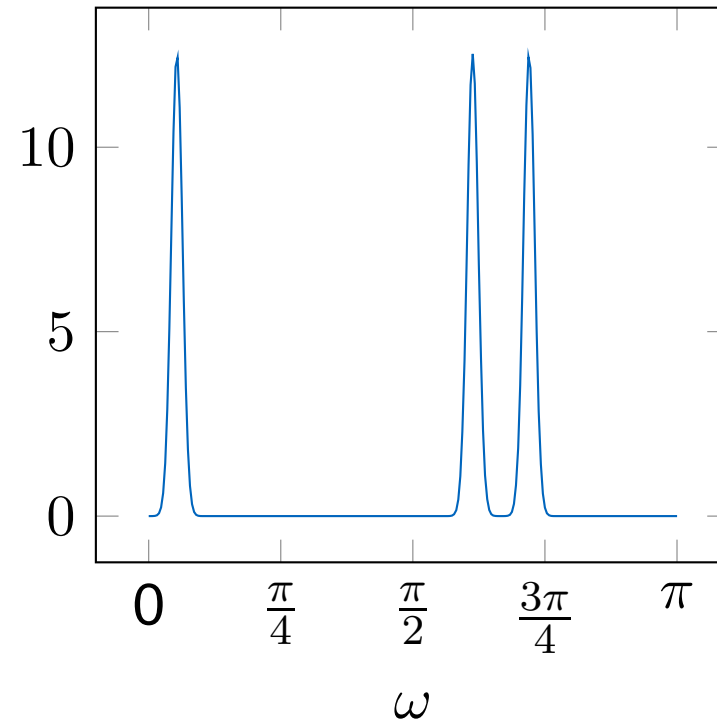
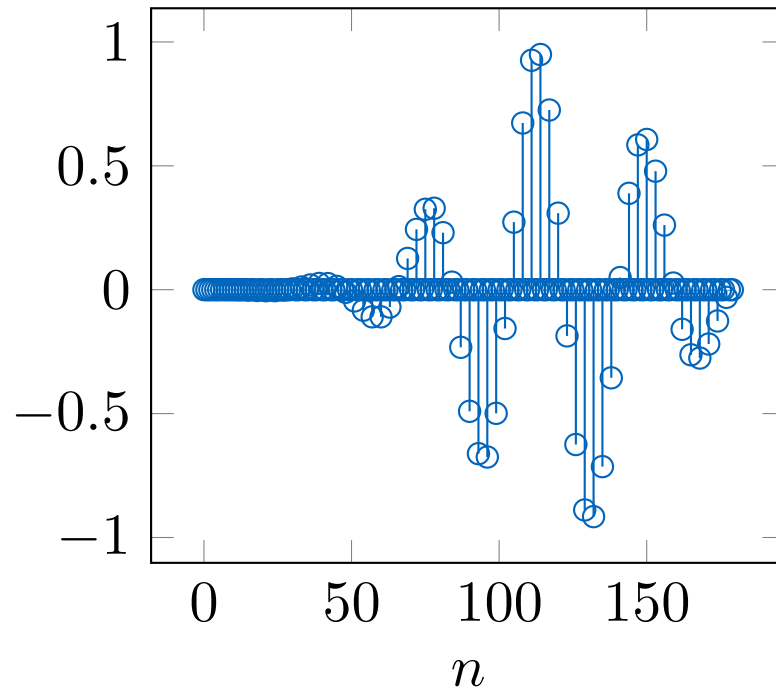
Ekstra: interpolointi 2

- Ylimääräiset nollanäytteet lisäävät signaaliin korkeita taajuuksia



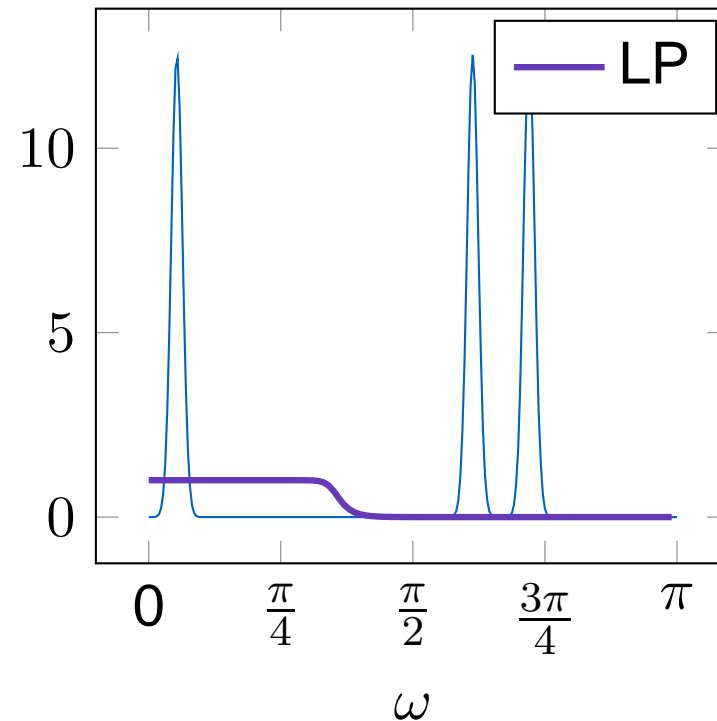
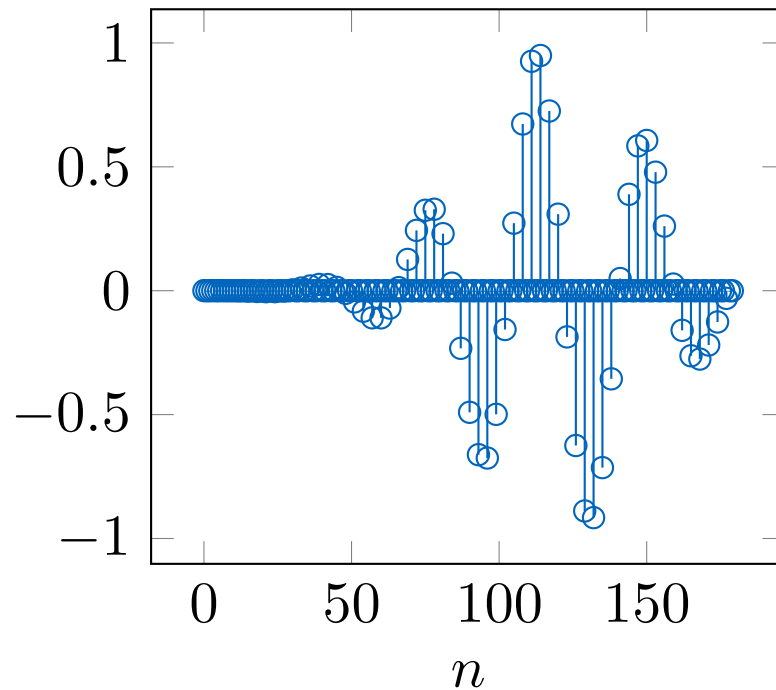
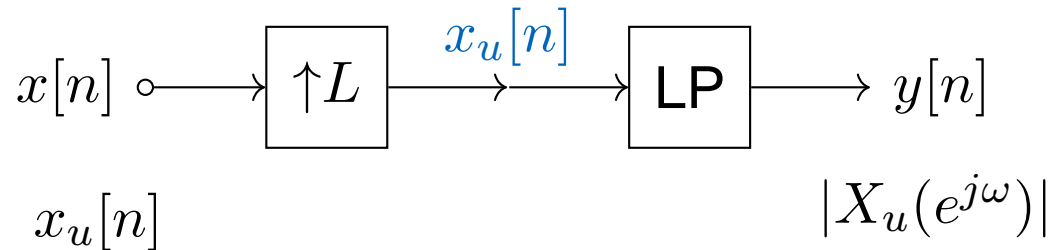
$x_u[n]$

$|X_u(e^{j\omega})|$



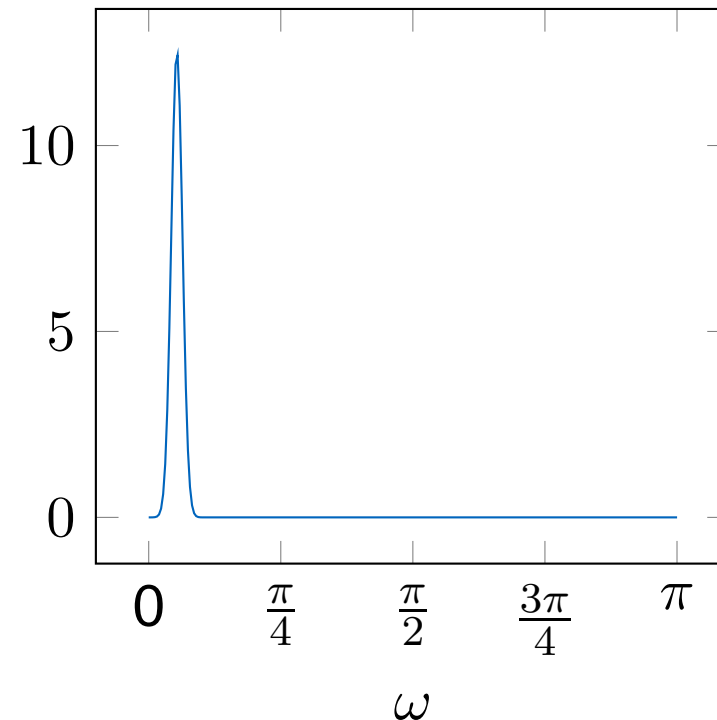
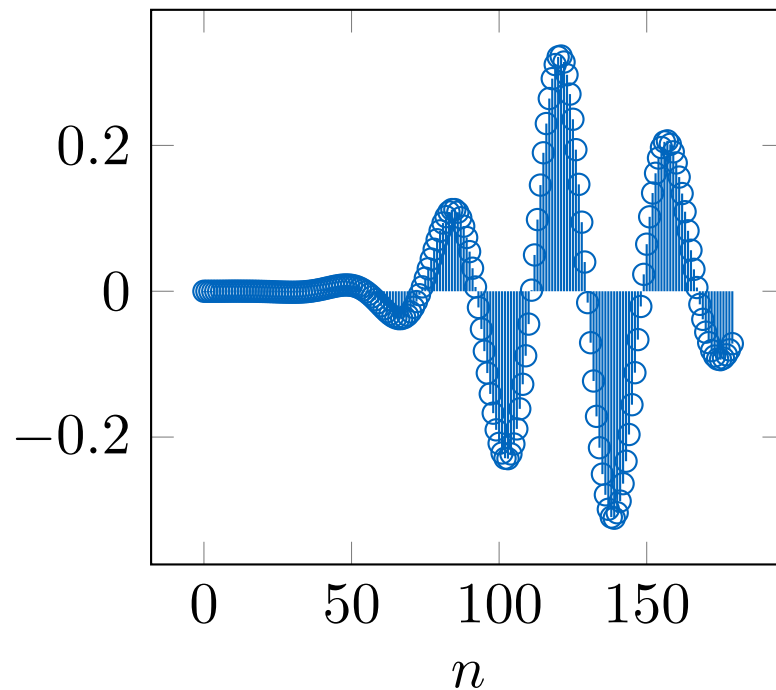
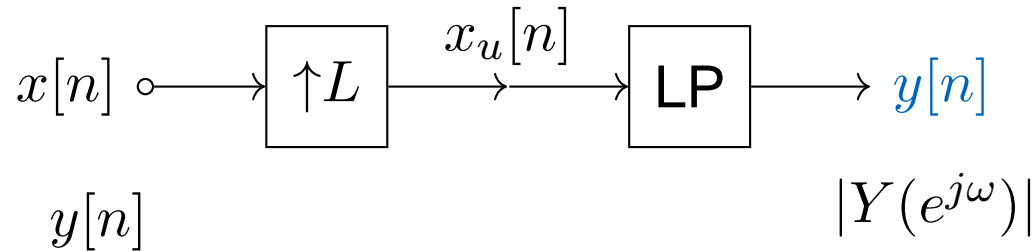
Ekstra: interpolointi 2

- Ylimääräiset nollanäytteet lisäävät signaaliin korkeita taajuuksia



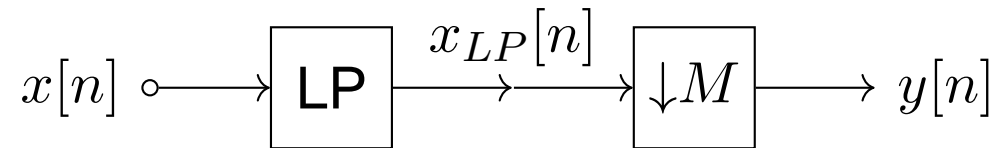
Ekstra: interpolointi 3

- Suodattamalla korkeat taajuudet saadaan interpoloitu signaali



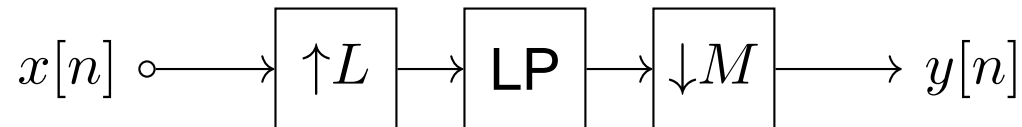
Ekstra: desimointi

- Säilytetään vain joka M :s näyte
- Alipäästösuodatus laskostuvien taajuuksien poistamiseksi



Ekstra: Näytteenottotaajuuden muutos murtoluvulla

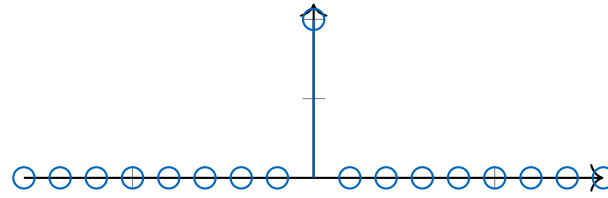
- Ensin interpolointi kertoimella L
- Desimointi kertoimella M
- Alipäästösuodattimet voidaan yhdistää
- Lopputuloksena näytteenottotaajuus muuttuu tekijällä $\frac{L}{M}$



Diskreettiaikaisia perussekvenssejä

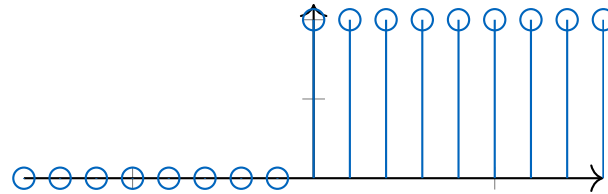
Yksikköimpulssi (engl. unit impulse, unit sample sequence)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



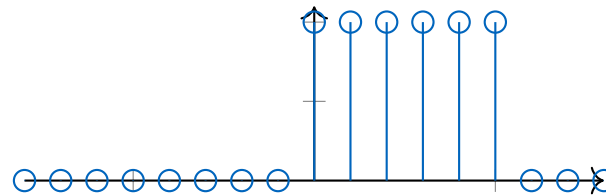
Yksikköaskel (engl. unit step)

$$\mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Suorakaidepulssi/ikkuna (engl. rectangular pulse/window)

$$p_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$



Sekvenssien ominaisuuksia

- Äärelliskestoinen

$$\exists K : x[n] = 0 \quad \forall |n| > K$$

Sekvenssien ominaisuuksia

- Äärelliskestoinen

$$\exists K : x[n] = 0 \quad \forall |n| > K$$

- Rajattu

$$\exists B_x : |x[n]| \leq B_x \quad \forall n$$

Sekvenssien ominaisuuksia

- Äärelliskestoinen

$$\exists K : x[n] = 0 \quad \forall |n| > K$$

- Rajattu

$$\exists B_x : |x[n]| \leq B_x \quad \forall n$$

- itseisarvosummautuva, neliösummautuva

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Sekvenssien ominaisuuksia

- Äärelliskestoinen

$$\exists K : x[n] = 0 \quad \forall |n| > K$$

- Rajattu

$$\exists B_x : |x[n]| \leq B_x \quad \forall n$$

- itseisarvosummautuva, neliösummautuva

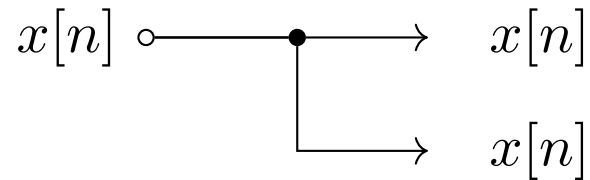
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

- Jaksollinen jaksolla N

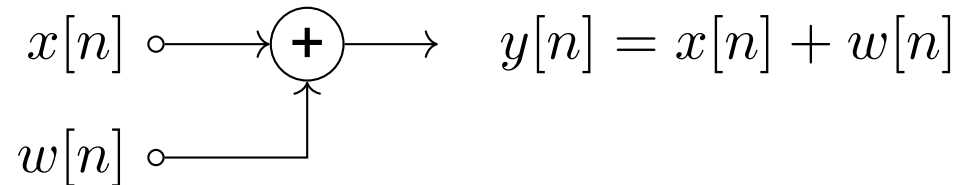
$$x[n + N] = x[n] \quad \forall n$$

Perusoperaatiot

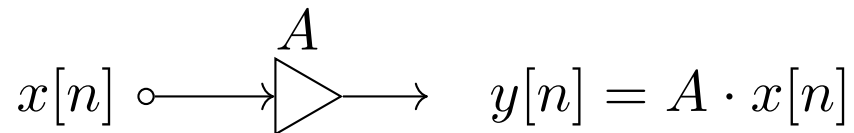
Haara



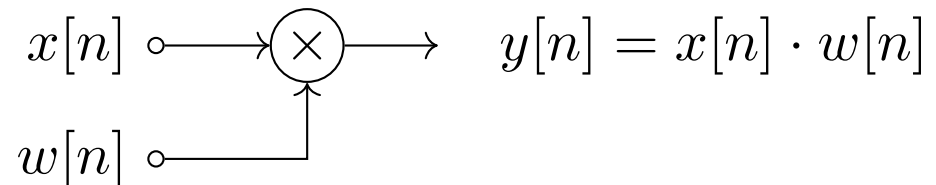
Yhteenlaskija



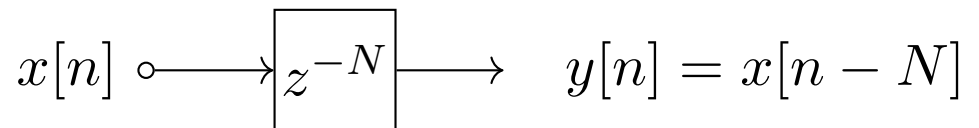
Kertoja



Modulaattori



Viive



Konvoluutio

- Kahden sekvenssin konvoluutio

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n - k]$$

- Konvoluution ominaisuuksia

$$x[n] * (ay[n] + bz[n]) = a(x[n] * y[n]) + b(x[n] * z[n])$$

(lineaarisuus)

$$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$$

(kommutatiivisuus)

$$x[n] * (y[n] * z[n]) = (x[n] * y[n]) * z[n]$$

(assosiatiivisuus)

Luento 3: Diskreettiaikaiset järjestelmät aikatasossa

Diskreettiaikaisen järjestelmän ominaisuuksia

- syöte $x[n]$, vaste $y[n] = T(x[n])$

Diskreettiaikaisen järjestelmän ominaisuuksia

- syöte $x[n]$, vaste $y[n] = T(x[n])$
- lineaarisuus

$$T(ax_1[n] + bx_2[n]) = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n])$$

Diskreettiaikaisen järjestelmän ominaisuuksia

- syöte $x[n]$, vaste $y[n] = T(x[n])$
- lineaarisuus

$$T(ax_1[n] + bx_2[n]) = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n])$$

- siirto-invarianssi

$$\tilde{x}[n] = x[n - k] \Rightarrow \tilde{y}[n] = y[n - k]$$

eli vaste ei riipu syötteen (ajan)kohdasta

Diskreettiaikaisen järjestelmän ominaisuuksia

- syöte $x[n]$, vaste $y[n] = T(x[n])$
- lineaarisuus

$$T(ax_1[n] + bx_2[n]) = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n])$$

- siirto-invarianssi

$$\tilde{x}[n] = x[n - k] \Rightarrow \tilde{y}[n] = y[n - k]$$

eli vaste ei riipu syötteen (ajan)kohdasta

- BIBO-stabiilius

$$|y[n]| = |T(x[n])| \leq B_y \quad \forall |x[n]| \leq B_x$$

eli rajatulla syötteellä on rajattu vaste

Diskreettiaikaisen järjestelmän ominaisuuksia

- syöte $x[n]$, vaste $y[n] = T(x[n])$
- lineaarisuus

$$T(ax_1[n] + bx_2[n]) = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n])$$

- siirto-invarianssi

$$\tilde{x}[n] = x[n - k] \Rightarrow \tilde{y}[n] = y[n - k]$$

eli vaste ei riipu syötteen (ajan)kohdasta

- BIBO-stabiilius

$$|y[n]| = |T(x[n])| \leq B_y \quad \forall |x[n]| \leq B_x$$

eli rajatulla syötteellä on rajattu vaste

- kausaalisuus

$$x_1[n] = x_2[n] \quad \forall n \leq n_0 \Rightarrow y_1[n] = y_2[n] \quad \forall n \leq n_0$$

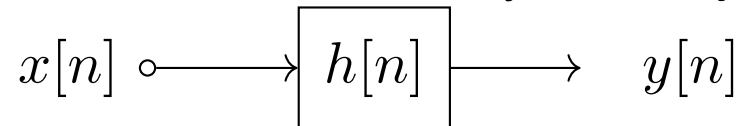
eli vaste ei voi riippua tulevista syötteen arvoista

Impulssivaste

- Impulssivaste on järjestelmän vaste yksikköimpulssiin

$$h[n] = T(\delta[n])$$

- Impulssivaste riittää kuvaamaan täysin LTI-järjestelmän



- Vaste on syötteen ja impulssivasteen konvoluutio

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

Taajuusvaste

- Taajuusvaste on impulssivasteen diskreettiaikainen Fourier-muunnos

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k}$$

- Jos LTI-järjestelmän syöte on $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, vaste on $y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$
- Vasteen DTFT: $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$
- Määritelty BIBO-stabiileille LTI-järjestelmille

Magnitudi- ja vaihevaste

- $H(e^{j\omega})$ on lähtökohtaisesti kompleksiarvoinen
- Käytetään polaariesitystä

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}, \quad \theta(\omega) = \arg\left(H(e^{j\omega})\right)$$

- ▶ $|H(e^{j\omega})|$ on **magnitudivaste** (engl. magnitude response)
- ▶ $\theta(\omega)$ on **vaihevaste** (engl. phase response)
- Magnitudivasteen neliö (yleensä logaritmisena) on **vahvistusfunktio** (engl. gain function)

$$G(\omega) = 10 \log_{10} |H(e^{j\omega})|^2 \text{dB} = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| \text{dB}$$

Vaiheviive ja ryhmäviive

- Vaihevaste $\theta(\omega) = \arg \left(H(e^{j\omega}) \right)$
- Vaiheviive

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}$$

- Ryhmäviive

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

- Syötteen $a[n]e^{j\omega_0 n}$ vaste on karkeasti

$$|H(e^{j\omega_0})| a[n - \tau_g(\omega_0)] e^{j\omega_0 (n - \tau_p(\omega_0))}$$

(voitaisiin laskea tarkasti esim. DTFT:llä

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \sum_n a[t] e^{-j(\omega - \omega_0)t} d\omega)$$

Luento 4: Diskreettiaikaiset järjestelmät taajuustasossa

Fourier-muunnokset

- Jatkuva-aikainen, ei-jaksollinen signaali: FT, CTFT

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t} dt \Leftrightarrow x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

- Diskreettiaikainen, ei-jaksollinen signaali: DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Leftrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

- Diskreettiaikainen, **jaksollinen** signaali: DFT

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-j2\pi kn/N} \Leftrightarrow x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{j2\pi kn/N}$$

Fast Fourier Transform

- DFT suoraan määritelmästä

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j2\pi kn/N}$$

- Tarvitaan $\mathcal{O}(N^2)$ kompleksilukuoperaatiota
- Eksponenttifunktion ominaisuuksien takia DTF voidaan jakaa lyhyisiin pätkiin ja yhdistää tulokset
- Tyypillisesti edetään $N = 2, N = 4, N = 8, \dots$ (radix-2)
 \Rightarrow tarvitaan $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ kompleksilukuoperaatiota
- Eri algoritmeja, kts. Rawat, Digital signal processing, luku 9

Fourier-muunnosten ominaisuuksia

- Aikatason konvoluutiota vastaa taajuustason tulo ja päinvastoin

$$\mathcal{F}\{x * y\} = XY, \quad \mathcal{F}\{xy\} = X * Y$$

(DFT:llä kiertokonvoluutio!)

Fourier-muunnosten ominaisuuksia

- Aikataason konvoluutiota vastaa taajuustason tulo ja päinvastoin

$$\mathcal{F}\{x * y\} = XY, \quad \mathcal{F}\{xy\} = X * Y$$

(DFT:llä kiertokonvoluutio!)

- Aikataason siirtoa vastaa taajuustason vaihemodulaatio

$$\mathcal{F}\{x(n - a)\} = e^{j\omega a} X(e^{-j\omega})$$

Fourier-muunnosten ominaisuuksia

- Aikatason konvoluutiota vastaa taajuustason tulo ja päinvastoin

$$\mathcal{F}\{x * y\} = XY, \quad \mathcal{F}\{xy\} = X * Y$$

(DFT:llä kiertokonvoluutio!)

- Aikatason siirtoa vastaa taajuustason vaihemodulaatio

$$\mathcal{F}\{x(n - a)\} = e^{j\omega a} X(e^{-j\omega})$$

- Aikatason taajuusmodulaatiota vastaa taajuustason siirto

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega na} x\} = X(e^{-j(\omega - a)})$$

Fourier-muunnosten ominaisuuksia

- Aikatasen konvoluutiota vastaa taajuustason tulo ja päinvastoin

$$\mathcal{F}\{x * y\} = XY, \quad \mathcal{F}\{xy\} = X * Y$$

(DFT:llä kiertokonvoluutio!)

- Aikatasen siirtoa vastaa taajuustason vaihemodulaatio

$$\mathcal{F}\{x(n - a)\} = e^{j\omega a} X(e^{-j\omega})$$

- Aikatasen taajuusmodulaatiota vastaa taajuustason siirto

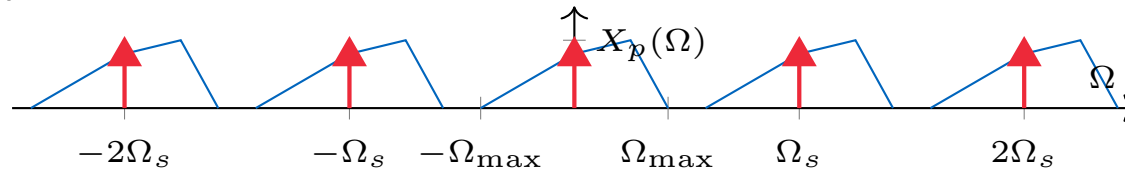
$$\mathcal{F}\{e^{j\omega n a} x\} = X(e^{-j(\omega - a)})$$

- Sisätulot ovat suoraan verrannollisia (Parseval/Plaranchel)

$$\langle x, y \rangle = \text{vakio} \cdot \langle X, Y \rangle$$

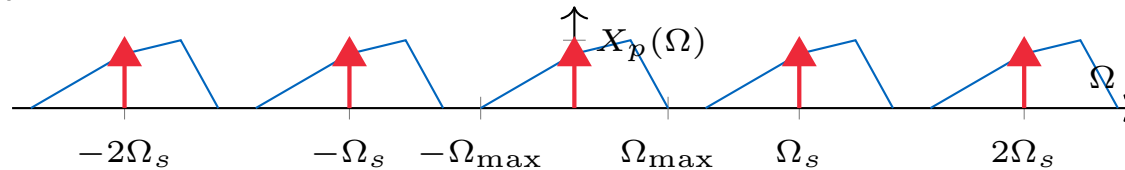
Näytteistetyin signaalin spektri

- Ylinäytteistys , $\Omega_s > 2\Omega_{\max}$

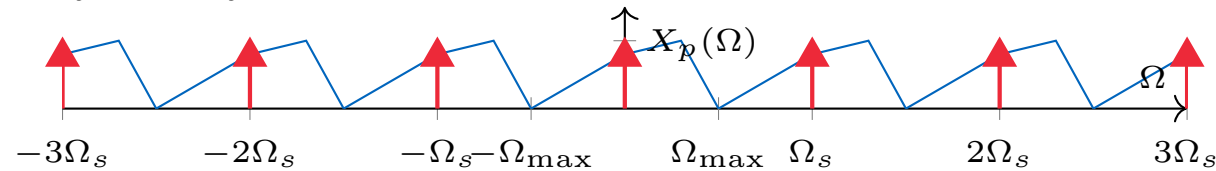


Näytteistetyn signaalin spektri

- Ylinäytteistys , $\Omega_s > 2\Omega_{\max}$

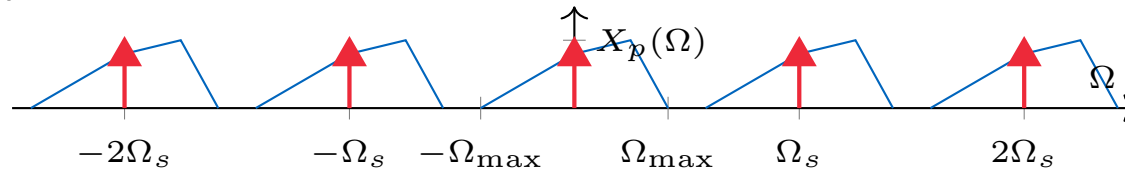


- Kriittinen näytteistys , $\Omega_s = 2\Omega_{\max}$

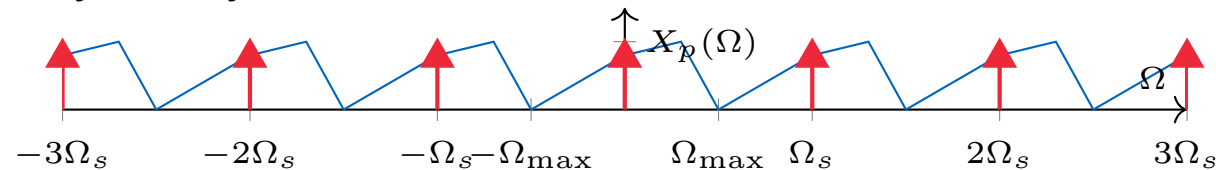


Näytteistetyn signaalin spektri

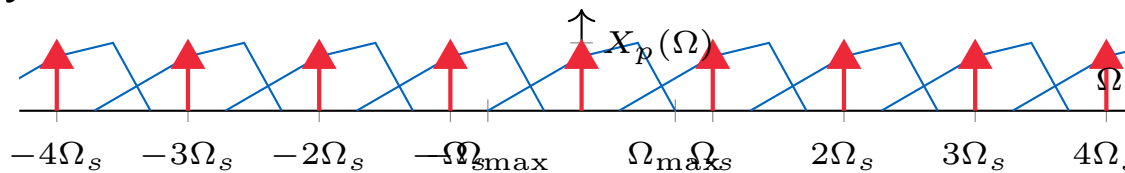
- Ylinäytteistys , $\Omega_s > 2\Omega_{\max}$



- Kriittinen näytteistys , $\Omega_s = 2\Omega_{\max}$

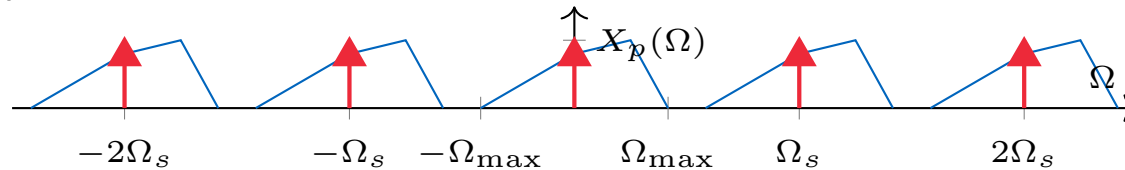


- Alinäytteistys , $\Omega_s < 2\Omega_{\max}$, \Rightarrow laskostuminen

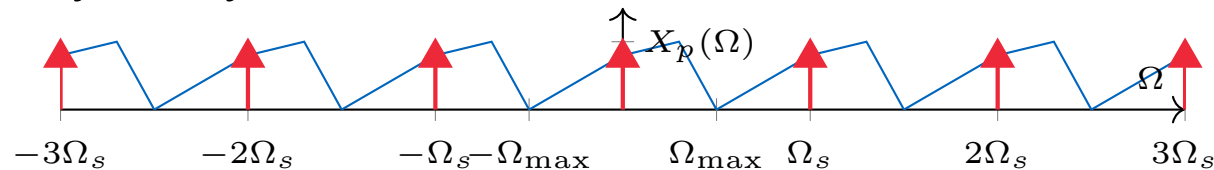


Näytteistetyn signaalin spektri

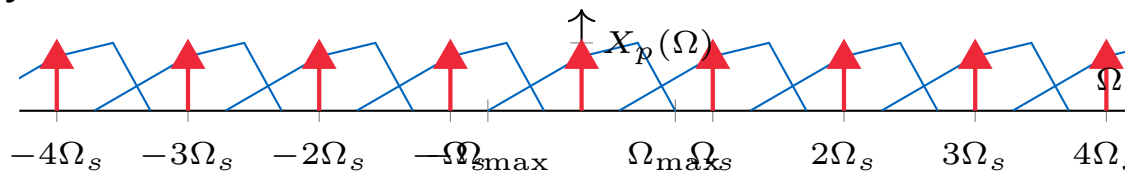
- Ylinäytteistys , $\Omega_s > 2\Omega_{\max}$



- Kriittinen näytteistys , $\Omega_s = 2\Omega_{\max}$



- Alinäytteistys , $\Omega_s < 2\Omega_{\max}$, \Rightarrow laskostuminen



- Nyquist-taajuus (engl. Nyquist frequency) =

Näytteistysteoreema

Nyquist-taajuus (engl. Nyquist frequency)

= näytteistetyn signaalin suurin mahdollinen taajuus

= puolet näytteenottotaajuudesta eli $F_s/2$

Luento 5: z-muunnos

z-muunnos

- Määritelmä

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \Leftrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

- z on kompleksiluku
- Suppenemisarvo $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty$
- Erikoistapauksena DTFT $z = e^{j\omega}$

Siirtofunktio

- ARMA-prosessin differenssiyhtälö

$$\sum_{k=0}^N d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M p_k x[n-k] \quad \Big| \mathcal{Z}\{\cdot\}$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N d_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M p_k z^{-k}$$

- **siirtofunktio** (engl. transfer function) $Y(z) = H(z)X(z)$

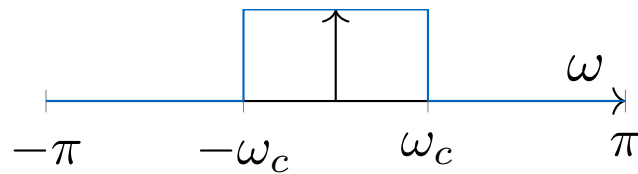
$$\Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M p_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N d_k z^{-k}} = \frac{z^{-M} p_0 \prod_{k=0}^M (z - \xi_k)}{z^{-N} d_0 \prod_{k=0}^N (z - \lambda_k)}$$

- Nollat ξ_k , navat λ_k
- Kausaali LTI-järj. BIBO-stabiili, kun navat yksikköympyrän sisällä

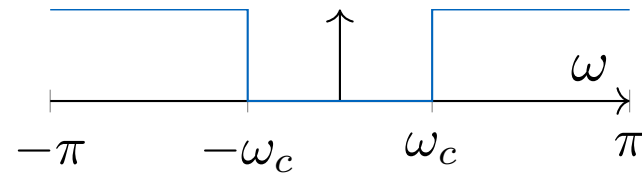
Luento 6: Suodatintyypit, vaihevastus

Suodattimien perustyyppit

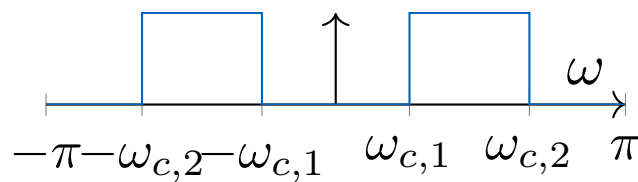
alipäästö



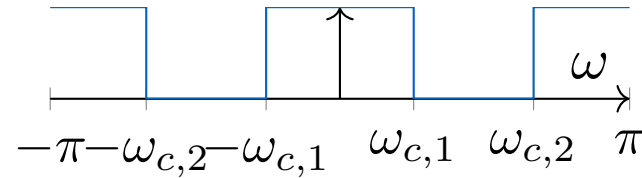
ylipäästö



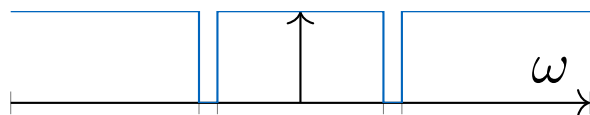
kaistanpäästö



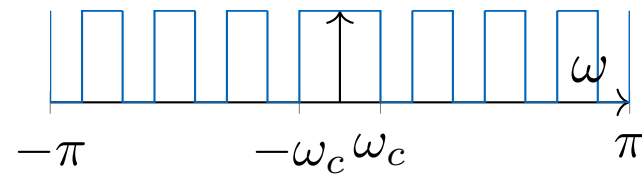
kaistanesto



lovi



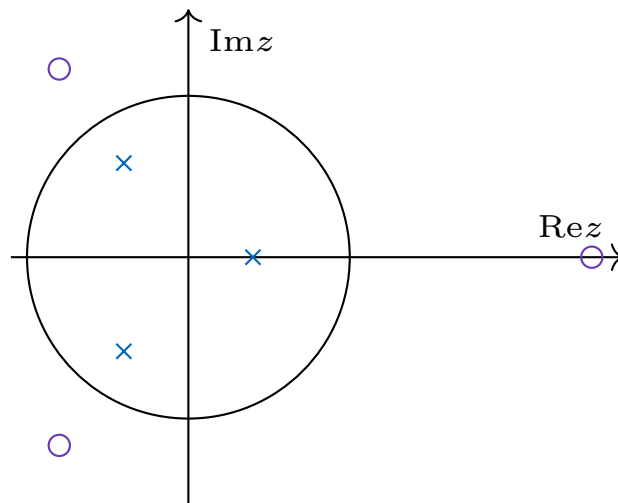
kampa



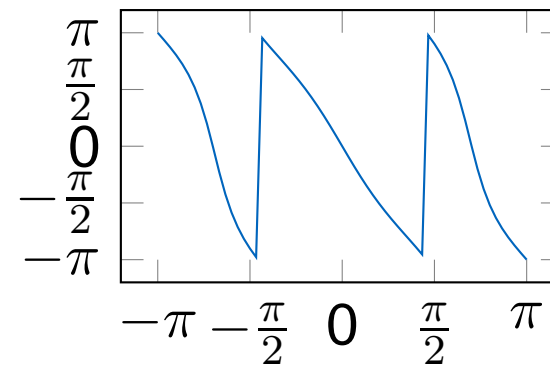
Kaikenpäästösuodatin

- Magnitudivaste yksi kaikilla taajuuksilla
- Navat ja nollat pareina $\xi_k = 1/\lambda_k^*$
- Siirtofunktion osoittaja ja nimittäjä toistensa suhteen resiprookkipolynomeja

$$A(z) = \pm \frac{p_N + p_{N-1}z^{-1} + \dots p_1z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + p_1z^{-1} + \dots p_{N-1}z^{-N+1} + p_Mz^{-N}} = \pm \frac{z^{-N}P(z^{-1})}{P(z)}$$



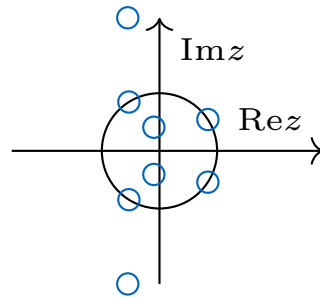
Vaihevaste



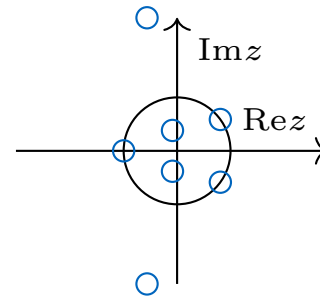
Lineaarinen vaihevaste

- Impulssivaste (eli kertoimet) $h[n] = \pm h[N - n]$
- Siirtofunktio (anti)palindrominen polynomi
- Nollat pareina $\xi_n = 1/\xi_m^*$ (tai yksikköympyrällä)

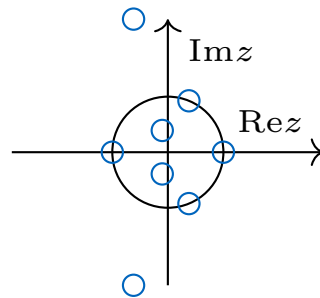
Tyyppi 1: n parill., sym.



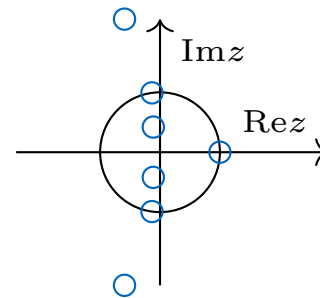
Tyyppi 2: n pariton, sym.



Tyyppi 3: n parill., antisym.



Tyyppi 4: n pariton, antisym.



Nollavaiheisuodatus

- “eteenpäin–taaksepäin -suodatus” (engl. forward–backward filtering)
- Poistaa vaihevasteen vaikutuksen
- Ei kausaalinen!
- Käytännön toteutus
 - ▷ suodatus $H(z)$:lla
 - ▷ tehdään ajankääntö
 - ▷ suodatus uudestaan $H(z)$:lla
 - ▷ tehdään taas ajankääntö

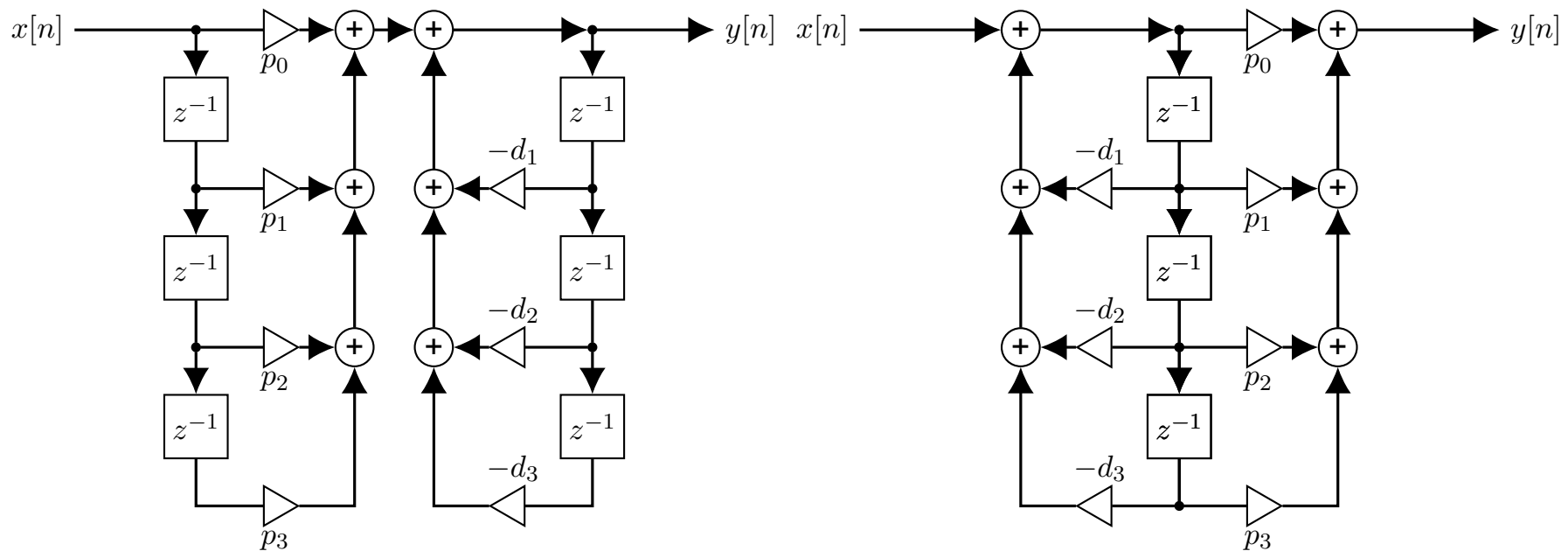
Minimi- ja maksimivaiheinen suodatin

- Kausasainen suodatin on
 - ▷ **minimivaiheinen** (engl. minimum phase), kun kaikki nollat ovat yksikköympyrän sisäpuolella \Rightarrow pienin ryhmäviive
 - ▷ **maksimivaiheinen** (engl. maximum phase), kun kaikki nollat ovat yksikköympyrän ulkopuolella \Rightarrow suurin ryhmäviive
- jos suodatin ei ole minimi- ja maksimivaiheinen, se on sekavaiheinen (engl. mixed phase)

Luento 7: Suodatinrakenteet ja toteutukset

Ekvivalentti rakenne

- **Ekvivalentti:** suodattimilla sama siirtofunktio
- **Kanoninen:** viiveyksikköjen määrä on yhtäsuuri kuin suodattimen asteluku

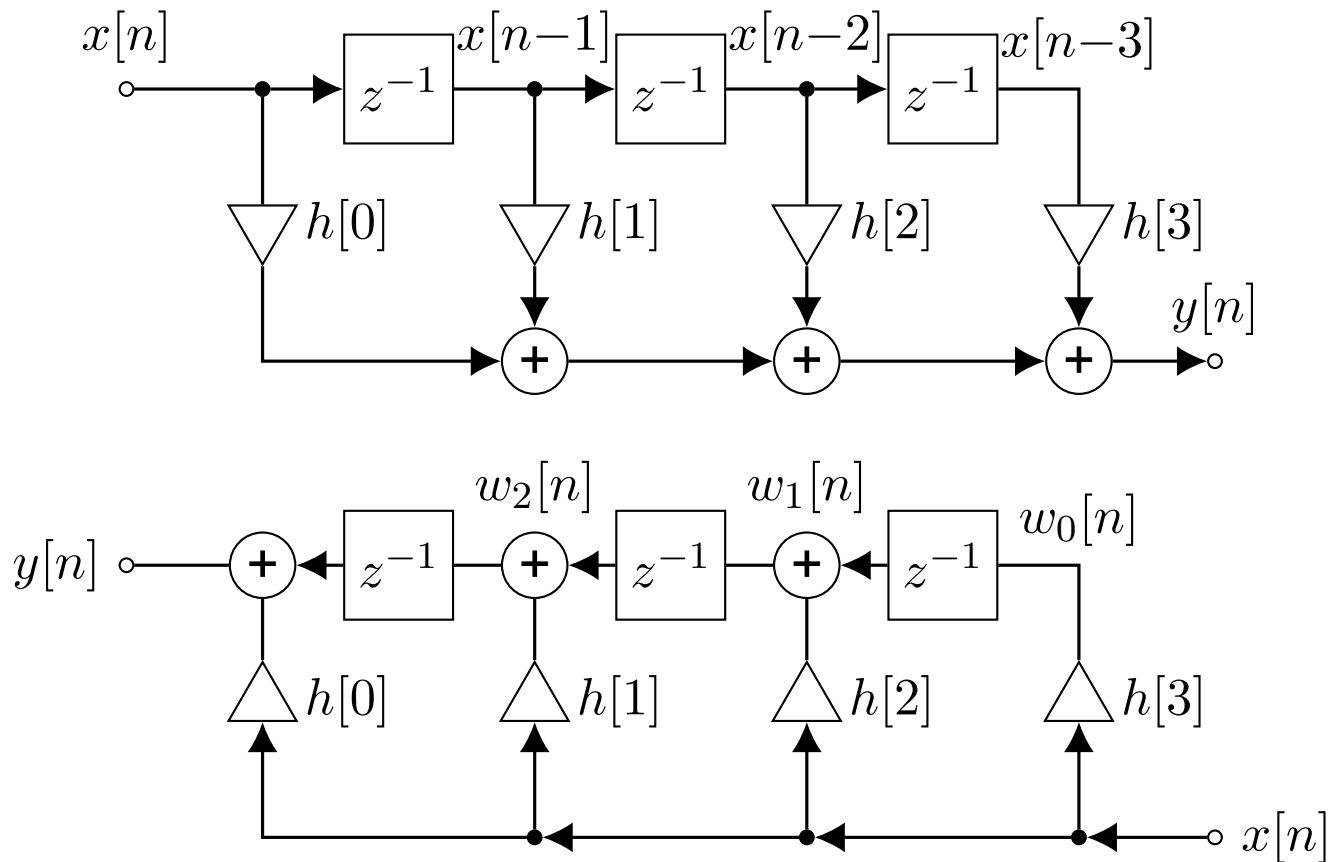


Suora muoto I, ei-kanoninen

Suora muoto II, kanoninen

Transpoosi

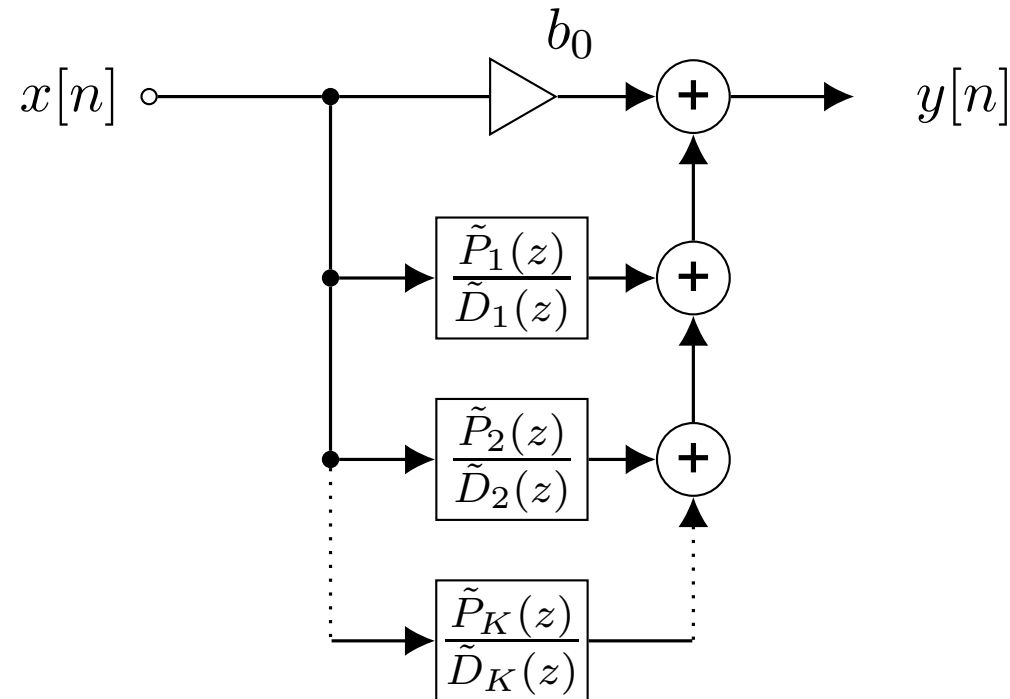
- **transpoosi**: signaalin kulun kääntäminen päinvastaiseksi
- Ei muuta LTI-järjestelmän toimintaa



Rinnakkaisrakenne

- Siirtofunktiolle voidaan kirjoittaa osamurtokehiteelmä

$$H(z) = b_0 + \sum_{k=1}^K \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}}$$
$$= b_0 + \sum_{k=1}^K \frac{\tilde{P}_k(z)}{\tilde{D}_k(z)}$$



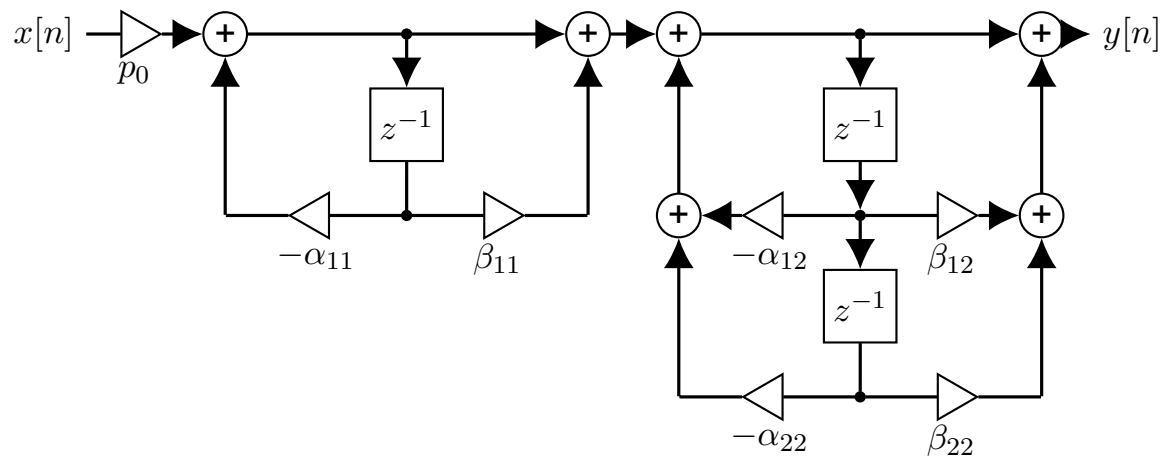
Kaskaditoteutus

- Faktoroidaan siirtofunktio

$$H(z) = \frac{P(z)}{D(z)} = \frac{P_1(z)P_2(z)P_3(z)}{D_1(z)D_2(z)D_3(z)}$$

- Kaskadi 2. asteen suodattimista (engl. second order sections, SOS), esim.

$$H(z) = p_0 \frac{1 + \beta_{11}z^{-1}}{1 + \alpha_{11}z^{-1}} \frac{1 + \beta_{12}z^{-1} + \beta_{22}z^{-2}}{1 + \alpha_{12}z^{-1} + \alpha_{22}z^{-2}}$$



Luento 8: FIR-suodatinten suunnittelu

Suunnitteluspesifikaatio

Magnitudivasteen spesifikaatio (alipäästösuodatin)

Päästökaista: $|\omega| \leq \omega_p$

$$1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p$$

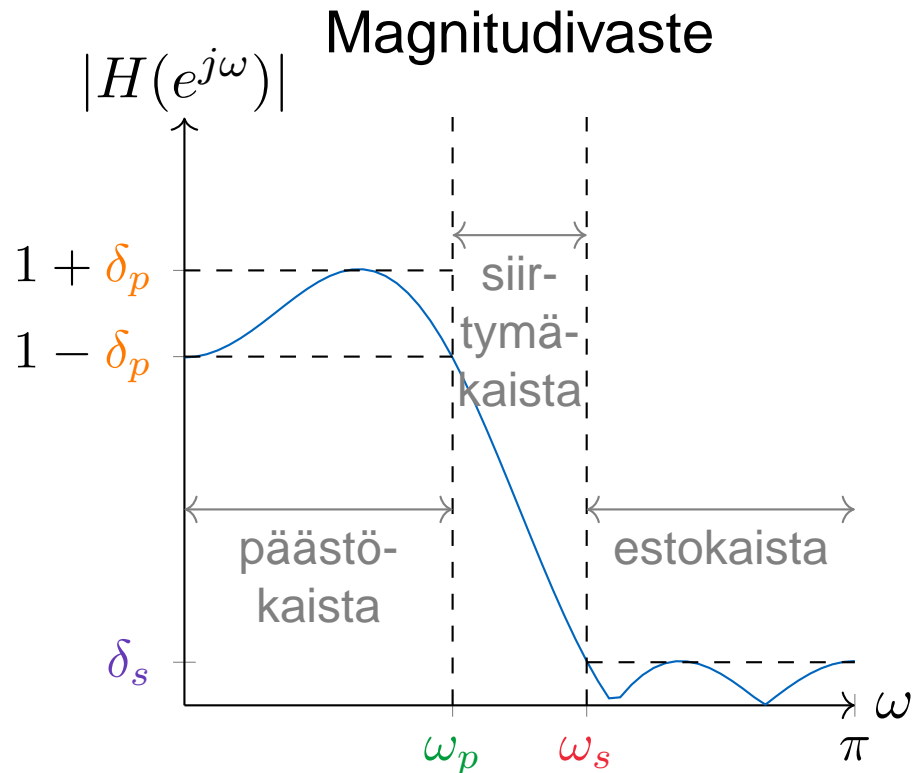
Estokaista: $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_s$$

Vahvistusfunktion kriteerit:

$$\alpha_p = -20 \log_{10}(1 - \delta_p) \text{dB}$$

$$\alpha_s = -20 \log_{10}(\delta_s) \text{dB}$$



Suodatintyyppin valinta

- FIR-suodattimet
 - + Lineaarinen vaihevaste helppo aikaansaada
 - + Aina stabiili
 - Suuri tarvittu asteluku IIR-suodattimiin verrattuna (kertaluokkaa suurempi)
- IIR-suodattimet
 - + Hyvät vaimennusominaisuudet
 - + Olemassaolevia approksimaatiokaavoja
 - Vaihevaste epälineaarinen
 - Stabiiliusongelmat mahdollisia rajatulla laskentatarkkuudella

FIR suodatin ikkunoinnilla

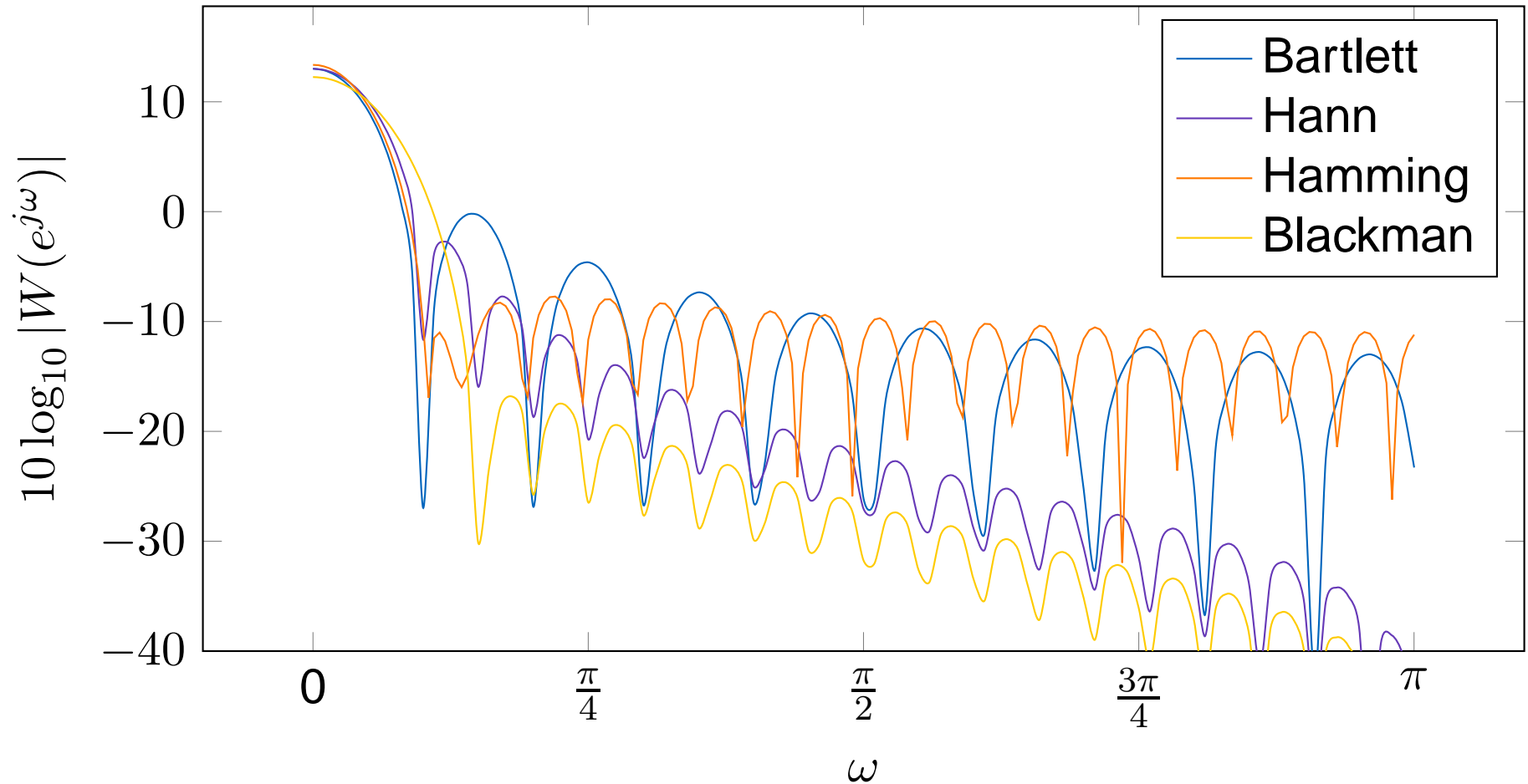
- Katkaistaan ja painotetaan ideaalisuodattimen impulssivaste

$$h_t[n] = h_d[n]w[n],$$

- Kompromissi Gibbsin ilmiön, siirtymäkaistan leveyden ja vaimennuksen välillä
- Ikkunan pituus ja tyyppi määräävät pääkeilan leveyden
⇒ siirtymäkaistan leveys
- Ikkunan tyyppi määrää sivukeilatason ⇒ estokaistan vaimennus

Parametrittomat ikkunat taajuustasossa

$$K = 20$$



Parametrilliset ikkunat

- Kaiser

$$w[n] = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - (n/K)^2})}{I_0(\beta)},$$

missä I_0 on muunnettu nollannen asteen Bessel-funktio

- Chebyshev (kts. esim Mitra)
- Vaimennus säädettävissä
- Tarvitsee säätöparametrin optimoinnin

Minimax-optimointi

- Määritetään suurin absoluuttinen (painotettu) virhe

$$\tilde{\epsilon}(h_t[-K], \dots, h_t[K]) = \max_{\omega} \left| H_t(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega}) \right| \phi(\omega)$$

- Minimoidaan saatu kriteeri
- Iteratiiviset algoritmit
 - ▷ Parks-McClellan
 - ▷ Remez

Luento 9: IIR-suodatinten suunnittelu

Suodattimen suunnitteluspesifikaatio

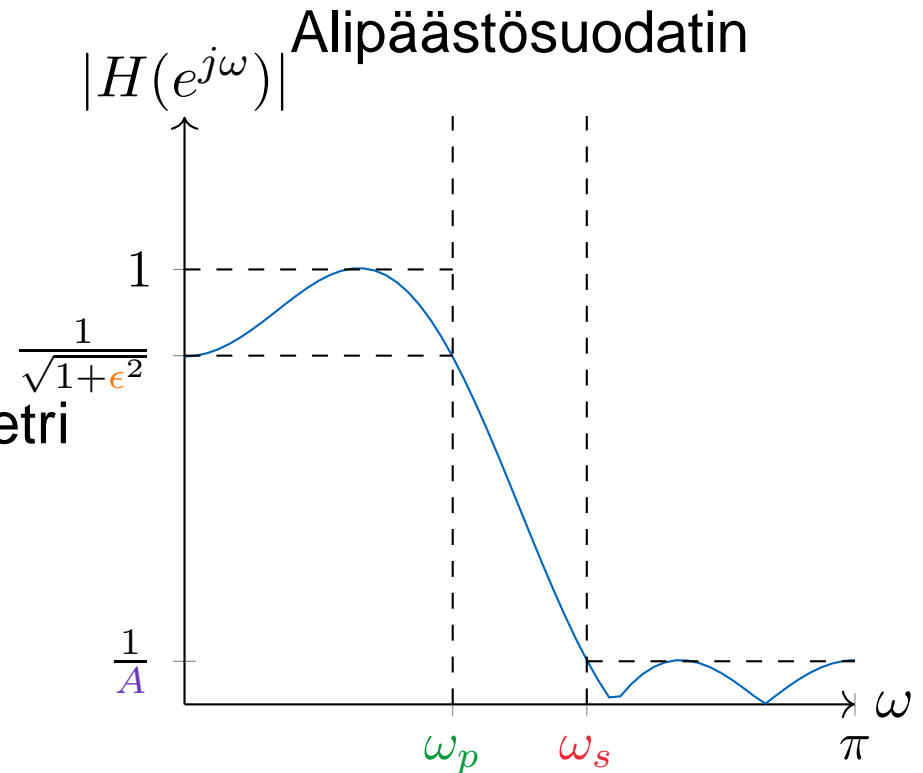
Magnitudivasteen spesifikaatio

ω_p päästökaistan rajataajuus
(passband cutoff frequency)

ω_s estokaistan rajataajuus
(stopband cutoff frequency)

A estokaistan vaimennusparametri

ϵ päästökaistan vahvistuksen
poikkeama



Klassiset analogiset suodattimet

- Kolme päätyyppiä
 - ▷ Butterworth
 - ▷ Chebyshev
 - ▷ elliptinen eli Cauer
- Butterworth ja Chebyshev ovat elliptisen suodattimen erikoistapauksia
- Näille suodatintyypeille valmiita taulukoita ja suunnittelufunktioita
- Myös muita suodatintyyppejä (kts. esim. Wikipedia)

Klassinen IIR-suodatinsuunnittelu

1. Muuta taajuudet sopivalla kaavalla, esim. [bilineaari](#)

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan(\omega/2)$$

2. Suunnittele sopiva analoginen alipäästösuodatin

- Butterworth
- Chebyshev I ja II
- elliptinen

3. Muuta analoginen suodatin digitaaliseksi valitulla muunnoksella ja halutuksi suodatintyypiksi [spektraalimuunnoksella](#) (jommassakummassa järjestyksessä)

4. Tarkista, että lopputulos vastaa haluttua (jos ei, aloita alusta)

Moderni IIR-suodatinsuunnittelu

- Optimoidaan suodatin jollakin kriteerillä
- Esim. taajuusvasteen painotettu maksimivirhe

$$\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega}) - H_t(e^{j\omega})|w(\omega)$$

- Integroitu virhe

$$\int_0^{\pi} |H_i(e^{j\omega}) - H_t(e^{j\omega})|^p w(\omega) d\omega$$

- Kertoimet lasketaan jollakin numeerisella menetelmällä

Minimioppimistavoite

Kurssin jälkeen tulisi ymmärtää

- Signaalin näytteistys
 - ▷ normalisoitu taajuus
 - ▷ laskostuminen
- konvoluutio, DTFT, DFT ja z-muunnos
- Mikä on LTI-järjestelmä
- Magnitudivaste, vaihevaste, ja vahvistusfunktio (gain)
- FIR- ja IIR-suodattimet ja niiden hyvät ja huonot puolet
- Lineaarinen vaihevaste ja nollavaihesuodatus (esim. Matlabin `filtfilt`)
- Suodattimen suunnittelu spesifikaation mukaan (Matlabin `designfilt` tai muut vastaavat työkalut)

Vielä

- Viimeisen laskarikierroksen palautus 31.5.2021 klo 12.15
- Kurssipalaute
- ylimääräinen rästikierros, ajankohta ilmoitetaan piakkoin