1. Autossa on 4 rengasta ja 1 vararengas ($T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $[\lambda] = 1/\text{km}$, i=1,...,5). Kulkeakseen auto tarvitsee 4 ehjää rengasta. Aluksi auto käyttää neljää "alkuperäistä" rengasta. Kun yksi näistä vikaantuu, vaihdetaan sen paikalle vararengas. Seuraavan renkaan vikaantuessa auto vikaantuu. Oletetaan, että rengas ei voi vikaantua ollessaan varalla ja että vaihto onnnistuu varmasti.

**Tapa 1: infinitesmaalinen todennäköisyys**

Autolla voidaan ajaa matka $T$ viidellä eri tavalla:
1°- 4°: Rengas $x \in \{1, .., 4\}$ vikaantuu hetkellä $\tau$ [km]. Vaihtorengas ei vikaannu matkalla $[\tau, T]$. Muut renkaat (3 kpl) eivät vikaannu matkalla $[0, T]$.
5°: Yksikään neljästä renkaasta ei vikaannu matkalla $[0, T]$.

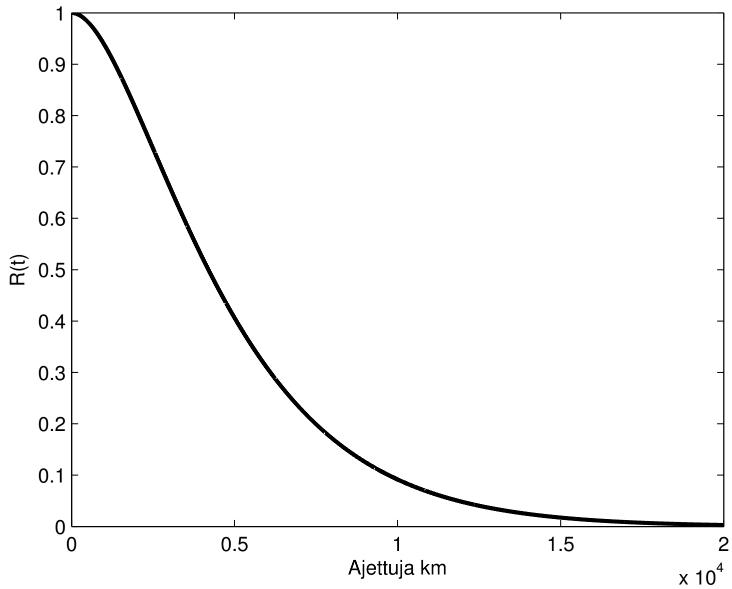
Nämä tavat ovat toisensa poissulkevia $\Rightarrow R(T) = R(1°) + R(2°) + R(3°) + R(4°) + R(5°)$.

Määritetään tapahtumien todennäköisyydet:
1. P(Rengas $x$ vikaantuu hetkellä $\tau$)= $f(\tau)d\tau$= $\lambda e^{-\lambda\tau}d\tau$ (eksponentiaalijakauman tiheysfunktio)
2. P(Vararengas ei vikaannu matkan $[\tau, T]$ aikana)=$e^{-\lambda(T-\tau)}$ $\quad (T \geq \tau)$
3. P(Kolme muuta rengasta eivät vikaannu matkalla $[0, T]$)=$\prod_{i=1}^{3} R_i(T)$=$e^{-3\lambda T}$

Kohdassa 2.-3. on käytetty eksponentiaalijakauman kertymäfunktiota ($P(t > |T - \tau|) = 1 - P(t \leq |T - \tau|)$.

$$
\begin{aligned}
R(1°) &= R(2°) = R(3°) = R(4°) = \\
&= \int_0^T \lambda e^{-\lambda\tau} \cdot e^{-\lambda(T-\tau)} \cdot e^{-3\lambda T} d\tau \\
&= \int_0^T \lambda e^{-\lambda T} \cdot e^{-3\lambda T} d\tau \\
&= \lambda e^{-4\lambda T} \int_0^T d\tau = \lambda T e^{-4\lambda T} \\
R(5°) &= \prod_{i=1}^{4} R_i(T) = e^{-4\lambda T} \\
\Rightarrow R(T) &= 4 \cdot \lambda T e^{-4\lambda T} + e^{-4\lambda T} \\
&= (1 + 4\lambda T)e^{-4\lambda T}
\end{aligned}
$$

Esim. $\lambda = \frac{1}{10000}$ (yksittäisen renkaan odotettu elinikä on 10 000km) tuottaa seuraavanlaisen kuvaajan:




**Tapa 2: Perinteinen todennäköisyyslasku**

Luotettavuuden laskeminen ilman infinitesmaalista todennäköisyyttä voidaan tehdä seuraavasti. Määritellään toisensa poissulkevat tapahtumat

- $S_0 = (T_1 > T)(T_2 > T)(T_3 > T)(T_4 > T)$ (yksikään rengas ei vikaannu $T$:hen mennessä)
- $S_1 = (T_1 \leq T)(T_1 + T_5 > T)(T_2 > T)(T_3 > T)(T_4 > T)$ (vain rengas 1 vikaantuu ennen $T$:tä, mutta vararengas kestää siitä hetkestä eteenpäin yli $T$:hen)
- $S_2 = (T_2 \leq T)(T_2 + T_5 > T)(T_1 > T)(T_3 > T)(T_4 > T)$ (kuten yllä renkaalle 2)
- $S_3 = (T_3 \leq T)(T_3 + T_5 > T)(T_1 > T)(T_2 > T)(T_4 > T)$ (kuten yllä renkaalle 3)
- $S_4 = (T_4 \leq T)(T_4 + T_5 > T)(T_1 > T)(T_2 > T)(T_3 > T)$ (kuten yllä renkaalle 4)

Selvästi $S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$ kuvaa kaikki tavat, jolla onnistutaan kulkea matka $T$. Koska tapahtumat ovat toisensa poissulkevat, pätee

$$P(S) = P(S_0) + P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) + P(S_4) + P(S_5) \ .$$

Koska vikaantumisajat ovat riippumattomat on $P(S_0) = e^{-4\lambda T}$. Tapahtuman $S_1$ todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(S_1) =& P\big((T_1 \leq T)(T_1 + T_5 > T)(T_2 > T)(T_3 > T)(T_4 > T)\big) \\ =& P\big((T_1 \leq T)(T_1 + T_5 > T)\big)P(T_2 > T)P(T_3 > T)P(T_4 > T) \\ =& P\big((T_1 \leq T)(T_1 + T_5 > T)\big)e^{-3\lambda T} \ . \end{aligned}$$

Todennäköisyys $P\big((T_1 \leq T)(T_1 + T_5 > T)$ saadaan integroimalla satunnaismuuttujien $T_1$ ja $T_5$ yhteisjakauman tiheysfunktiota (koska toisistaan riippumattomat, on yhteisjakauman tiheysfunktio tiheysfunktioiden tulo) niiden pisteiden yli, jotka toteuttavat tapahtuman edellyttämät ehdot:

$$
\begin{aligned}
P\big((T_1 \leq T)(T_1 + T_5 > T)\big) &= \int_{\tau_1=0}^{T} \int_{\tau_5=T-\tau_1}^{\infty} f(\tau_1) f(\tau_5) d\tau_1 d\tau_5 \\
&= \lambda^2 \int_{\tau_1=0}^{T} \int_{\tau_5=T-\tau_1}^{\infty} e^{-\lambda(\tau_1+\tau_5)} d\tau_1 d\tau_5 \\
&= \lambda^2 \int_{\tau_1=0}^{T} \Big/_{\tau_5=T-\tau_1}^{\infty} \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda(\tau_1+\tau_5)} d\tau_1 \\
&= -\lambda \int_{\tau_1=0}^{T} (0 - e^{-\lambda(\tau_1+T-\tau_1)} d\tau_1 \\
&= \lambda e^{-\lambda T} \int_{\tau_1=0}^{T} d\tau_1 \\
&= \lambda T e^{-\lambda T}
\end{aligned}
$$

Näin ollen $P(S_1) = \lambda T e^{-\lambda T} \cdot e^{-3\lambda T} = \lambda T e^{-4\lambda T}$, ja koska komponentit identtiset, pätee $P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = P(S_4)$. Luotettavuudeksi saadaan siis

$$R(T) = \ P(S) = P(S_0) + 4P(S_1) = e^{-4\lambda T} + 4\lambda T e^{-4\lambda T} = e^{-4\lambda T}(1 + 4\lambda T)\ .$$

2. (a) Kuvataan komponenttien vikaantumisaikoja eksponentiaalijakautuneilla satunnaismuuttujilla $T_A, \ldots, T_E$ ja järjestelmän vikaantumisaikaa satunnasmuuttujalla $T_S$. Eksponentiaalijakautuneen satunnusamuuttujan tiheysfunktio on $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0, f(t) = 0, t \leq 0$, missä $\lambda > 0$ on vikaantumisintensiteetti.

   Osajärjestelmät 1 ja 2 ovat kumpikin kahden komponentin ns. stand-by rinnakkaisjärjestelmiä, jolloin ensimmäinen komponentti on käytössä vikaantumiseensa asti ja sen jälkeen toinen komponetti otetaan käyttöön ja se alkaa kulua. Kuvataan satunnaismuuttujilla $T_{S_1}$ ja $T_{S_2}$ osajärjestelmien $S_1$ ja $S_2$ vikaantumisaikoja. Selvästi $T_{S_1} = T_A + T_B$, eli kahden toisistaan riippumattoman eksponentiaalijakautuneen muuttujan summa. Tällöin $T_{S_1}$ noudattaa Erlangin jakaumaa (luento 6), jolle:

$$
\begin{aligned}
f_{S_1}(t) &= \frac{\lambda}{(n-1)!} (\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t} \\
R_{S_1}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

   , jossa n on parametrilla $\lambda$ eksponentiaalijakautuneiden toisistaan riippumattomien satunnaismuuttujien lukumäärä.

Lasketaan osajärjestelmän 1 luotettavuus $R_{S_1}(t)$ 1000 tunnin ajanjaksona:

$$\begin{aligned} R_{S_1}(1000) =& \frac{(0.001 \cdot 1000)^0}{0!} e^{-0.001 \cdot 1000} + \frac{(0.001 \cdot 1000)^1}{1!} e^{-0.001 \cdot 1000} \\ =& \frac{2}{e} \approx 0.735759 \ . \end{aligned}$$

Koska $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = \lambda_D$, niin $R_{S_1}(t) = R_{S_2}(t) \approx 0.735759$

(b) Olkoon komponentin $E$ luotettavuus $R_E(t) = Pr(T_E > t)$ ja koko järjestelmän luotettavuus

$$\begin{aligned} R_S(t) =& 1 - \Bigg( \underbrace{\underbrace{(1 - R_{S_1}(t))}_{= S_1 \text{ vikaantumistn}} \cdot \underbrace{(1 - R_{S_2}(t))}_{= S_2 \text{ vikaantumistn}}}_{\text{tn, että } S_1 \text{ ja } S_2 \text{ vikaantuvat}} + \underbrace{(1 - R_E(t))}_{E\text{:n vikaantumistn}} \\ & - \underbrace{(1 - R_{S_1}(t)) \cdot (1 - R_{S_2}(t)) \cdot (1 - R_E(t))}_{= \text{tn, että } S_1,\ S_2 \text{ ja } E \text{ vikaantuvat}} \Bigg) \ . \end{aligned}$$

Tällöin vaatimus, että komponentin E vikaantumistodennäköisyyden osuus koko järjestelmän vikaantumistodennäköisyydestä 1000 h ajanjaksolla on oltava vähemmän kuin 10% voidaan ilmaista epäyhtälönä (luotettavuuksista jätetty argumentti $t = 1000$ pois):

$$\frac{1 - R_E}{1 - R_S} < 0.1 \ .$$

Sijoittamalla $R_S$:n lauseke voidaan ratkaista, että

$$1 - R_E < 0.1(1 - R_{S_1}) \cdot (1 - R_{S_2}) + 0.1(1 - R_E) - 0.1(1 - R_{S_1}) \cdot (1 - R_{S_2}) \cdot (1 - R_E)$$

$$\Rightarrow R_E > 1 - \frac{(1 - R_{S_1}) \cdot (1 - R_{S_2})}{9 + (1 - R_{S_1}) \cdot (1 - R_{S_2})} = \frac{9}{R_{S_1} R_{S_2} - R_{S_1} - R_{S_2} + 10}$$

ja edelleen sijoittamalla $R_E$:n lauseke saadaan, että

$$1 - (1 - e^{-1000\lambda_E}) > \frac{9}{R_{S_1} R_{S_2} - R_{S_1} - R_{S_2} + 10}$$

$$\begin{aligned} \lambda_E <& - \frac{1}{1000} \ln \left( \frac{9}{R_{S_1} R_{S_2} - R_{S_1} - R_{S_2} + 10} \right) \\ =& - \frac{1}{1000} \ln \left( \frac{9}{(2/e)^2 - 2 \cdot 2/e + 10} \right) \\ \approx& 7.72821 \cdot 10^{-6} \ . \end{aligned}$$

Vikaantumistaajuuden on siis oltava alle $\lambda_E = 7.7 \cdot 10^{-6}$/h.

3. Mean time to failure saadaan vikaantumisajan odotusarvosta. Koska vikaantumisajan ja luotettavuuden välillä on yhteys, voidaan MTTF laskea suoraan luotettavuusfunktion ($R(t)$ sama kuin luentokalvojen eloonjäämisfunktio/survival function $S(t)$) avulla: Jos $F(t)$ on vikaantumisajan kertymäfuntio, saadaan vikaantumisajan tiheysfunktio kaavalla

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - R(t)) = -R^{'}(t), \text{ josta edelleen osittaisintegroimalla:} \\ \text{MTTF} &= \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty t \cdot (-R^{'}(t))dt = \Big|_0^\infty t \cdot (-R(t)) - \int_0^\infty -R(t)dt \\ &= \int_0^\infty R(t)dt, \end{aligned}$$

Määritetään ensin järjestelmän luotettavuusfunktio ja MTTF ilman linkkiä ja linkin kanssa:

**Ilman linkkiä**

Ylempi haara: $R(t)_u = R_u = R_1(R_2 + R_3 - R_2R_3)$.
Alempi haara: $R_l = R_4R_5$.
Systeemi: $R_s = R_u + R_l - R_uR_l = R_4R_5 + R_1(R_2 + R_3 - R_2R_3)(1 - R_4R_5)$
Kaikki komponentit ovat eksponentiaalijakautuneita, joten $R_i = e^{-\lambda t}$.
$\Rightarrow R_s = 3e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t} - 2e^{-4\lambda t} + e^{-5\lambda t}$.

MTTF:n laskemista varten tarvitaan integrointikaavaa:

$$\int_0^\infty Ce^{-D\lambda t}dt = -\Big|_0^\infty \frac{Ce^{-D\lambda t}}{D\lambda} = \frac{C}{D\lambda}$$

Tällä saadaan koko järjestelmälle MTTF:

$$\text{MTTF} = \frac{3}{2\lambda} - \frac{1}{3\lambda} - \frac{2}{4\lambda} + \frac{1}{5\lambda} = \frac{13}{15\lambda}$$

**Linkin kanssa**

Jaetaan luotettavuus kahteen toisensa poissulkevaan skenaarioon: komponentti 4 toimii ja komponentti 4 ei toimi. Tällöin luotettavuus voidaan laskea kaavalla $R_s = R_4R_{s|4} + R_{\bar{4}}R_{s|\bar{4}}$. Laskettaessa Luotettavuutta $R_{s|4}$ huomataan, että komponentti 1 on tarpeeton ja luotettavuusfunktio muodostuu komponentin 4 sarjaankytkennästä komponenttien 2,3 ja 5 muodostamaan rinnankytkentään. Termi $R_{s|\bar{4}}$ on yhtä kuin aiemmin laskettu $R_u$, sillä tällöin vain ylempi haara on käytössä.

Yhteensä saadaan: $R_s = R_4(1 - (1 - R_2)(1 - R_3)(1 - R_5)) + (1 - R_4)(R_1(R_2 + R_3 - R_2R_3))$.
Merkitään $R_i = R$ ja sievennetään:
$R_s = R(1-(1-R)^3)+(1-R)(R(R+R-R^2)) = R(1-(1-3R+3R^2-R^3))+(1-R)(2R^2-R^3))$
$= 3R^2 - 3R^3 + R^4 + 2R^2 - R^3 - 2R^3 + R^4 = 5R^2 - 6R^3 + 2R^4$.
$\Rightarrow R_s = 5e^{-2\lambda t} - 6e^{-3\lambda t} + 2e^{-4\lambda t}$

MTTF $= \frac{5}{2\lambda} - \frac{6}{3\lambda} + \frac{2}{4\lambda} = \frac{1}{\lambda}$.

Järjestelmän, jossa linkki toimii, keskimääräinen vikaantumisaika on $\frac{1/\lambda}{13/15\lambda} - 1 \approx 15.4\%$ suurempi.

4. MTTF = Mean time to failure
   MTTR = Mean time to repair
   Keskimääräinen käytettävyys, R = $\frac{\text{MTTF}}{\text{MTTF+MTTR}}$ (6. luento)
   Järjestelmä keskimäärin ei-käytettävissä: q = 1-R.
   Vikaantumistaajuuden ja MTTF:n yhteys: $\lambda = \frac{1}{\text{MTTF}}$

   $q = 1 - \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}+\text{MTTR}} = 1 - \frac{\frac{1}{0.001}}{\frac{1}{0.001}+15} = 14.78 \times 10^{-3}$

   Minimikatkosjoukot: $C_1 = \{A, C\} \quad C_3 = \{A, E, D\} \quad C_2 = \{B, D\} \quad C_4 = \{B, E, C\}$

$$\begin{aligned} q_s &\approx P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) \\ &= 2q^2 + 2q^3 \\ &= 2 \cdot (14.78 \times 10^{-3})^2 + 2 \cdot (14.78 \times 10^{-3})^3 \\ &= 4.4335 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$