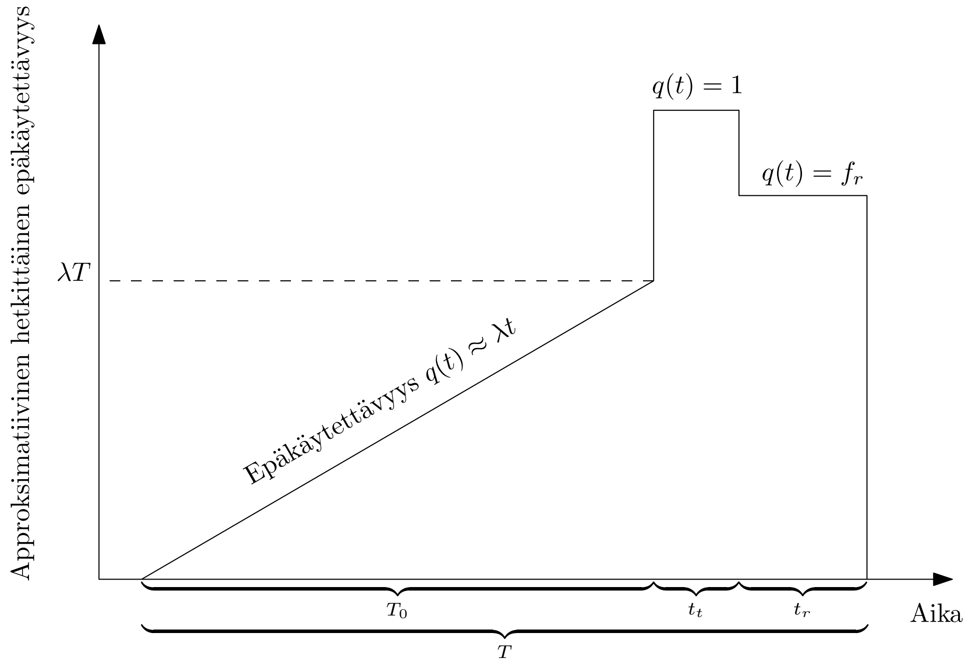
1. Piirretään jaksottain testattavan komponentin approksimatiivinen hetkittäinen epäkäytettävyys ajan funktiona (approksimaatio hyvä kun λT lähellä nollaa ja $t_t + t_r << T_0$).



Eksponenttifuntion sarjakehitelmä: $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots \Rightarrow e^x \approx 1 + x$ kun x lähellä nollaa.

Hetkittäinen epäkäytettävyys ennen testausta on $q(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \approx 1 - (1 + (-\lambda t)) = \lambda t$.

Kun testataan, on järjestelmä epäkäytettävissä, eli $q(t) = 1$. Järjestelmää korjataan keskimäärin f_r osassa testauksia, jolloin järjestelmä on epäkäytettävissä, ja muulloin järjestelmä ei ole vikaantunut, jolloin epäkäytettävyys on 0, eli keskimäärin korjausjakson aikana epäkäytettävyys on $q(t) = f_r \cdot 1 + (1 - f_r) \cdot 0 = f_r$.

Keskimääräinen epäkäytettävyys saadaan integroimalla tämän yli ja jakamalla tarkastelujakson pituudella (kts. myös Modarres taulukko 4.2). Tällöin saadaan, että

$$q = \frac{1}{T} \int_0^T q(t)dt = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} \lambda T_0^2 + f_r t_r + t_t \right) \approx \frac{1}{2} \lambda \cdot T_0 + \frac{f_r \cdot t_r}{T} + \frac{t_t}{T} \ ,$$

missä λ = vikaantumistaajuus, T_0 = testausaikaväli, f_r = korjaustaajuus per testi, t_r = korjauksen pituus ja t_t = testin pituus (ensimmäinen termi sivenee approksimaatiolla $T \approx T_0$). Koko sykliin kuluva aika $T = T_0 + t_r + t_t$.

(Mallin parametreja ei voi valita täysin toisistaan riippumattomasti. Jos testaaminen ei lisää epäkäytettävyyttä, voidaan valita $f_r = \lambda T$ ja toisaalta jos testaaminen voi vioittaa järjestelmää, voidaan se mallintaa asettamalla $f_r > \lambda T$. Jos $f_r < \lambda T$, vähenee epäkäytettävyys testauksen jälkeen, mikä ei ole järkevää).

Optimaalinen testausväli saadaan minimoimalla epäkäytettävyyttä. Haetaan siis sen derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}\lambda \cdot T_0 + \frac{f_r \cdot t_r}{T_0 + t_r + t_t} + \frac{t_t}{T_0 + t_r + t_t}, \text{ vaaditaan } \frac{\partial q}{\partial T_0} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial T_0} &= \frac{1}{2}\lambda - \frac{f_r \cdot t_r}{(T_0 + t_r + t_t)^2} - \frac{t_t}{(T_0 + t_r + t_t)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_0 =& \frac{\sqrt{2\lambda}\sqrt{f_r t_r + t_t} - \lambda(t_r + t_t)}{\lambda} \\ =& \frac{\sqrt{2 \cdot 10^{-4}}\sqrt{0.05 \cdot 10 + 5} - 10^{-4}(10+5)}{10^{-4}} \approx \underline{\underline{316.7}} \end{aligned}$$

(Koska $\frac{\partial^2 q}{\partial T_0^2} = \frac{11}{(15+T_0)^3} > 0$, on löydetty ääriarvo on *minimi*.)

2. Epäkäytettävyys $q = \frac{1}{2}\lambda \cdot T_0 + \frac{f_r \cdot t_r}{T} + \frac{t_t}{T}$. Nyt testaamis- ja korjaamisaika oletetaan mitättömiksi (t_r=t_t=0), joten saadaan yksittäisen generaattorin käytettävyydeksi (kts. myös Modarres 4.33): $q = \frac{1}{2}\lambda T \Rightarrow a = 1 - q = 1 - \frac{1}{2}\lambda T = 1 - \frac{1}{2}(0.21)(0.5) = 0.9475$

   Lasketaan käytettävyys systeemille, jossa kahden generaattorin pitää olla käytettävissä samanaikaisesti: $as = a^2 = (0.9475)^2 = 0.8978 < 0.99$

   Kolmen generaattorin tapauksessa riittää, kun kaksi kolmesta samanaikasesti käytettävissä. Käytettävyys saadaan binomijakaumalla: $a_s = \sum_{r=k}^{N} \binom{N}{r} a^r (1-a)^{N-r}, \quad k = 2, N = 3$

   $a_s = \binom{3}{2}(0.9475)^2(1-0.9475)^1 + \binom{3}{3}(0.9475)^3(1-0.9475)^0$

   $= 3 \cdot (0.8978)(0.0525) + (0.8506) = 0.992 > 0.99$

   $\Rightarrow$ On hankittava <u>kolme generaattoria</u>.

3. Vikaantumisaika $T \sim$ Log-N(μ, σ).

   (a) Lognormaalisti jakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktio on

$$f(t) = \frac{e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \;, t > 0 \;,$$

   missä μ ja σ ovat jakauman parametrit. Jakauman odotusarvo (saadaan integroimalla tai taulukoista) on:

$$E[T] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \approx 81.86$$

   (b) Eloonjäämisfunktio $R(t) = 1 - F(t)$. Vaaditaan $R(t) \geq 0.95 \Rightarrow F(t) < 0.05$. Log-normaalille muuttujalle pätee: $T \sim$ Log-N$(\mu, \sigma) \Rightarrow \ln T \sim$ N(μ, σ). Haetaan siis standardi-normaalijakautuneelle satunnaismuuttujalle Z sen 5%-häntää vastaava arvo normaalijakaumasta:

$$z = -1.645 = \frac{\ln t - 4}{0.9} \Rightarrow \ln t = 2.5195 \Rightarrow t = 12.42$$

   (c) Riskitaajuusfunktio ("hazard function") $h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$. Tiedetään, että kohdassa $t = 12.42$ järjestelmän luotettavuus $R(12.42) = 0.95$. Riskitaajuusfunktion arvo saadaan siis käyttämällä log-normaalin jakauman tiheysfunktiota:

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(12.42) = \frac{f(12.42)}{R(12.42)} &= \frac{e^{-\frac{(\ln 12.42 - 4)^2}{2 \cdot 0.9^2}}}{0.95 \cdot 12.42 \cdot 0.9\sqrt{2\pi}} \\ &\approx 9.7 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

4. Merkitään T_k = komponentin lämpötila ja T_v = vikaantumislämpötila. Lähtötiedoista saadaan:

$$\begin{aligned}
f_{T_k} &= \lambda e^{-\lambda T_k},\ T_k \geq 0 \\
f(T) &= \frac{1}{b-a} = \frac{1}{150-100} = \frac{1}{50} \text{ (kuvaajasta)} \\
\Rightarrow f_{T_v} &= \frac{1}{50} \quad 100^oC \leq T_1 \leq 150^oC \text{ (0 muulloin)}
\end{aligned}$$

Oletetaan, että satunnaismuuttujat T_k ja T_v ovat riippumattomia, jolloin yhteisjakauma $f_{T_kT_v}(t_k, t_v) = f_{T_k}(t_k) \cdot f_{T_v}(t_v)$.

Yleisesti yhteisjakaumalle pätee $P(a \leq X \leq b \ \cap \ c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)dydx$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow R = P(T_k \leq T_v) &= P(100 \leq T_v \leq 150 \ \cap \ 0 \leq T_k \leq T_v) \\
&= \int_{100}^{150} \frac{1}{50}\left(\int_0^{t_v} \lambda e^{-\lambda t_k} dt_k\right)dt_v \\
&= \int_{100}^{150} \frac{1}{50} \cdot (1 - e^{-\lambda t_v})dt_v \\
&= \frac{1}{50}\int_{100}^{150} dt_v - \frac{1}{50}\int_{100}^{150} e^{-\lambda t_v} dt_v \\
&= 1 - \frac{1}{50}\Big|_{100}^{150} \left(\frac{e^{-\lambda t_v}}{-\lambda}\right) \\
&= \underline{\underline{0.998}}
\end{aligned}$$

Tulos on odotettu, sillä $\lambda = 0.05\ 1/^oC \Rightarrow E[T_k] = 20^oC$