

MS-A0502 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi

2A Odotusarvo ja muunnokset

Emilia Blåsten

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Perustieteiden korkeakoulu
Aalto-yliopisto

Lukuvuosi 2021–2022
Periodi II

Sisältö

Diskreetin satunnaisluvun odotusarvo

Suurten lukujen laki

Jatkuvan satunnaisluvun odotusarvo

Satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Kahden sm:n summan odotusarvo

Lisäesimerkkejä

Odotusarvo

Diskreetin lukuarvoisen satunnaismuuttujan X **odotusarvo** on

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x \mathbb{P}(X = x) = \sum_x x f(x)$$

missä summa käy yli X :n mahdollisten arvojen.

Odotusarvo on X :n mahdollisten arvojen **todennäköisyyksillä** $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$ **painotettu summa**.

Esim (Noppa)

Nopanheiton tuloksen X odotusarvo on

$$\mathbb{E}(X) = \left(1 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(6 \times \frac{1}{6}\right) = 3.5.$$



Mitä odotusarvo **kertoo** satunnaismuuttujasta X ?
(Ei ainakaan “odotettua arvoa”, koska noppa ei koskaan saa arvoa 3.5.)

Odotusarvon tulkinta: Pitkän sarjan keskiarvo

Pelataan n kierrosta peliä, jossa yhden kierroksen tuotto on X .
Tiheysfunktio $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$.

Oletus: Tulos x esiintyy pelissä likimain $nf(x)$ kertaa.

- Tällöin tuotto n kierrokselta on likimain

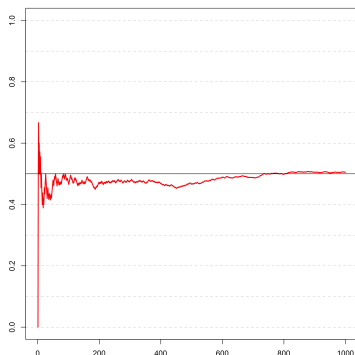
$$\sum_x x nf(x).$$

- Keskimääräinen tuotto per kierros on likimain

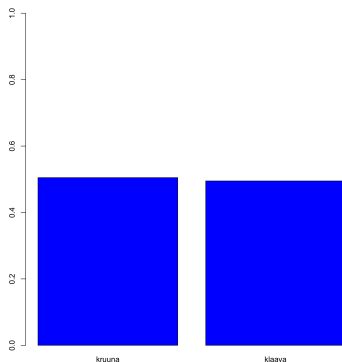
$$\frac{1}{n} \sum_x x nf(x) = \sum_x x f(x) = \mathbb{E}(X).$$

Mutta pitääkö oletus paikkansa?

Esimerkki: 1000 kolikkoa



Kruunan suhteellinen osuus heittojen määrän kasvaessa

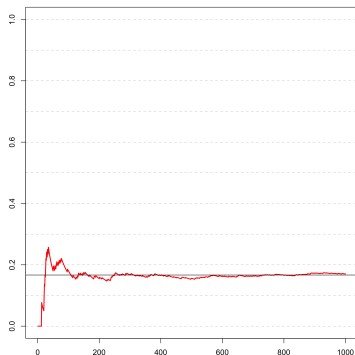


Kruunan ja klaavan suhteelliset osuudet 1000 heitossa.

```
n <- 1000
x <- sample(c(0,1),n,replace=TRUE)
plot(cumsum(x)/(1:n),type="l")
plot(table(x))
```

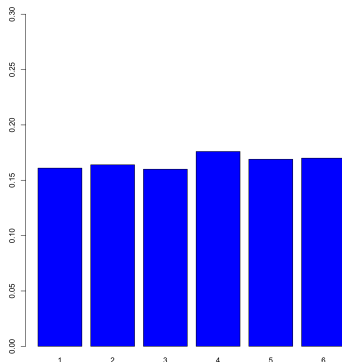
<http://www.r-project.org/>
<http://www.random.org/>

Esimerkki: 1000 noppaa



Kuutosen suhteellinen osuus
heittojen lukumäärän funktiona

```
n <- 1000  
x <- sample(1:6,n,replace=TRUE)  
plot(cumsum(x==6)/(1:n),type="l")  
plot(table(x))
```



Silmälukujen suhteelliset osuudet
1000 heitossa

<http://www.r-project.org/>
<http://www.random.org/>

Sisältö

Diskreetin satunnaisluvun odotusarvo

Suurten lukujen laki

Jatkuvan satunnaisluvun odotusarvo

Satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Kahden sm:n summan odotusarvo

Lisäesimerkkejä

Satunnaismuuttujan odotusarvo vs. pitkän ajan keskiarvo

Lause (Suurten lukujen laki)

Jos X_1, X_2, X_3, \dots ovat keskenään riippumattomia X :n tavoin jakautuneita satunnaislukuja, niin tapahtuman

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n X_s = \mathbb{E}(X) \pm 0.001$$

todennäköisyys lähestyy ykköstä suurilla n arvoilla.

Tämä on **stokastiikan tärkein teoreema**, jonka mukaan keskiarvon satunnaisuus katoaa suurilla n :

- Keskiarvo $\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n X_s$ on satunnaismuuttuja
- Odotusarvo $\mathbb{E}(X)$ on deterministinen luku
- 0.001 voidaan korvata millä tahansa $\epsilon > 0$.

Päteekö tulos keskenään riippuville satunnaisluvuille?

Kyllä, jos riippuvuus on riittävän heikkoa (ergodisuus).

Tapahtuman todennäköisyys vs. suhteellinen esiintyvyys

Lause

Jos X_1, X_2, \dots ovat riippumattomia X :n tavoin jakautuneita satunnaislukuja, niin minkä tahansa arvojoukon B **suhteellinen esiintyvyys** listassa (X_1, \dots, X_n) toteuttaa

$$\frac{\#\{s \in \{1, 2, \dots, n\} : X_s \in B\}}{n} = \mathbb{P}(X \in B) \pm 0.001$$

todennäköisyydellä, joka lähestyy ykköstä suurilla n .

- Diskreetille tiheysfunktiolle $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$:

$$\frac{\#\{s : X_s = x\}}{n} \approx f(x)$$

- Kertymäfunktiolle $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$:

$$\frac{\#\{s : X_s \leq t\}}{n} \approx F(t)$$

Todennäköisyys vs. suhteellinen esiintyvyys: Todistus

Arvojoukon B suhteellinen esiintyvyys voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n I_s, \quad \text{missä } I_s = \begin{cases} 1, & \text{jos } X_s \in B, \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

on tapahtuman $\{X_s \in B\}$ indikaattorimuuttuja.

Satunnaismuuttujat I_1, I_2, \dots ovat toisistaan riippumattomia ja tapahtuman $\{X \in B\}$ indikaattorimuuttujan I kanssa samoin jakautuneita (miksi?).

Suurten lukujen lain perusteella, kun $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n I_s \approx \mathbf{E}(I) = 0 \times \mathbb{P}(I = 0) + 1 \times \mathbb{P}(I = 1) = \mathbb{P}(X \in B).$$

Esimerkki: Nopan tutkiminen empiirisesti

Yritetään kokeilemalla tutkia todennäköisyyttä $\mathbb{P}(X \leq 2)$, missä X on nopanheiton (tietokoneella simuloitu) tulos.

n	suht. esiintyvyys	käytetty laskenta-aika
100	0.38000000	0.00 s
10000	0.33260000	0.00 s
1e+06	0.33351000	0.02 s
1e+08	0.33332494	1.55 s
1e+10	0.33333081	159.33 s

Tässä **tiedämme** oikean todennäköisyyden, joten **näemme** kuinka oiketa desimaaleja kertyy (virhe pienenee).

Oikeissa sovelluksissa emme yleensä tiedä todennäköisyyttä, vaan yritämme arvioida sitä. Olisi myös kiva pystyä **arvioimaan virheen suuruutta**, vaikka oikeaa arvoa ei tiedetä. Tähän saadaan myöhemmin työkaluja.

Todennäköisyys vs. suhteellinen esiintyvyys: Käyttö

Saimme keinon **kokeellisesti** arvioida jonkin tapahtuman todennäköisyyttä, kunhan vain voimme toistaa sitä monta kertaa.

Onko tässä tn-laskennan Graalin malja? Hankalien kaavojen sijaan **toistetaan koetta** ja katsotaan, miten usein tapahtuma tapahtui?

Tavallaan, mutta

- tarvitsemme menetelmän toistaa koetta monta kertaa (oikeasti tai simuloidusti)
- oikea kokeileminen voi olla vaikeaa, kallista, vaarallista
- simuloitu koe ei ehkä vastaa todellisuutta
- suuri tarkkuus edellyttää paljon toistoja: tn-arvion virhe on karkeasti suhteessa lukuun $1/\sqrt{n}$, joten yksi oikea lisädesimaali vaatii 100 kertaa enemmän toistoja!

Todennäköisyys vs. suhteellinen esiintyvyys: Käyttö

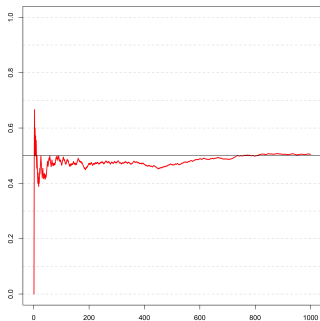
Kutenkin se, että esiintyvyys pitkässä sarjassa on hyvä estimaatti todennäköisyydelle, on pohjana suurelle osalle modernia tilastotiedettä.

- **otanta**: poimimme väestöstä n ihmistä, heistä k :lla on diabetes, arvioimme osuuden k/n pätevän koko väestössä
- lääketieteellinen **koe**: kokeilemme hoitoa n kertaa, se onnistuu k kertaa, arvioimme jatkossakin sen onnistuvan tn:llä k/n
- **jakauman estimointi** empiirisellä histogrammilla
- Monte Carlo -menetelmät fysiikassa, biologiassa jne. pohjautuvat siihen, että koetta simuloidaan tietokoneella monta (miljoonaa) kertaa ja katsotaan esiintyvyys. (Vaikeaa on suunnitella se simulaatio.)
- Monte Carlo -integroinnissa heitetään tikkaa ja katsotaan, miten usein osutaan tiettyyn joukkoon \rightarrow arvio ko. joukon pinta-alalle

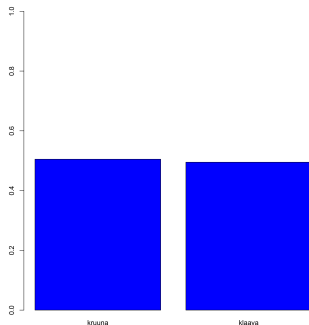
Esimerkki: 1000 kolikkoa

Suurten lukujen lain perusteella kruunan suhteellinen esiintyvyys satunnaisjonossa (X_1, \dots, X_n) on

$$\frac{\#\{s \leq n : X_s = \text{“kruuna”}\}}{n} \approx \frac{1}{2}$$



Kruunan suhteellinen osuus heittojen määrän kasvaessa

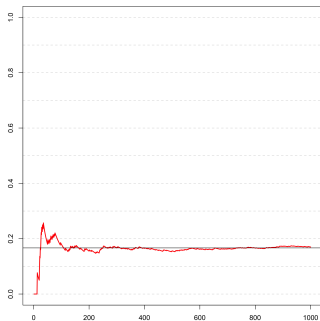


Kruunan ja klaavan suhteelliset osuudet 1000 heitossa

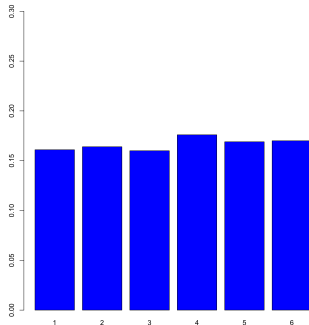
Esimerkki: 1000 noppaa

Suurten lukujen lain perusteella 6:n suhteellinen esiintyvyys satunnaisjonossa (X_1, \dots, X_n) on

$$\frac{\#\{s \leq n : X_s = 6\}}{n} \approx \frac{1}{6}$$



Kuutosen suhteellinen osuus heittojen lukumäärän funktiona



Silmälukujen suhteelliset osuudet 1000 heitossa

Lisää tarinoita nopista

Zacariach Labby: Weldon's dice, automated

<https://www.youtube.com/watch?v=95EErdou02w>

[https:](https://link.springer.com/article/10.1007/s00144-009-0036-8)

[//link.springer.com/article/10.1007/s00144-009-0036-8](https://link.springer.com/article/10.1007/s00144-009-0036-8)

Prof. Samuli Siltanen:

Samun tiedepläjäys: arpakuutio ja todennäköisyyden olemus

<https://www.youtube.com/watch?v=rkJv4BveY4g>

Tuomas Kukko & Risto Heikkinen:

Kimblen noppa ei ole täysin satunnainen

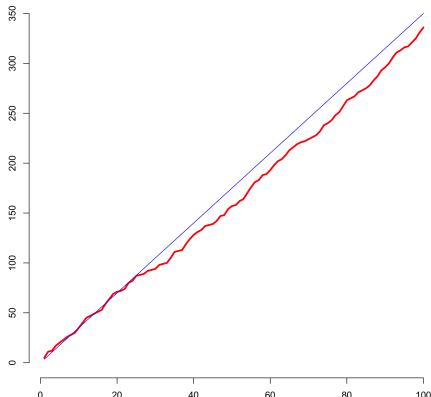
<http://statistition.com/?p=440>

Esimerkki: Noppapelin tuottokertymä

Noppapelissä voittaa kierroksella i silmäluvun X_i verran euroja.
Yhden kierroksen tuoton odotusarvo on $\mathbb{E}(X_i) = 3.5$ EUR.

Tuotto suurelta määrältä n
kierroksia on suurten lukujen
lain mukaan likimain

$$\sum_{i=1}^n X_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) n \approx 3.5n.$$



Odotusarvo vs. keskiarvo: Yhteenveto

Satunnaismuuttujan X odotusarvolle ja todennäköisyyksille on saatu tulkinnat

$$\mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n X_s,$$

$$\mathbb{P}(X = x) \approx \frac{\#\{s \leq n : X_s = x\}}{n},$$

missä X_1, X_2, \dots ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita.

Entä jos riippumattomia toistoja ei ole saatavilla?

- X = startup-yhtiön seuraavan vuoden liikevaihto
- X = taloyhtiön materiaalivahingot tulipaloista

Tällöinkin odotusarvolla on jokin merkitys, mutta “pitkän ajan keskiarvo” ei kovin mielekäs.

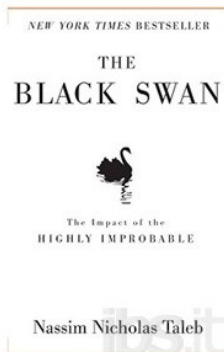
Esimerkki: “Musta joutsen”

Taulukon

k	0	1000000
$\mathbb{P}(X = k)$	0.999999	0.000001

mukaan jakautuneen satunnaisluvun odotusarvo on

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \times 0.999999 + 1000000 \times 0.000001 \\ &= 1.\end{aligned}$$



Odotusarvo $\mathbb{E}(X) = 1$ kertoo hyvin vähän satunnaisilmiöstä?

Jos X :n tavoin jakautuneita satunnaislukuja generoidaan toisistaan riippumattomasti, niin 10000 ensimmäistä satunnaislukua ovat kaikki nolliä todennäköisyydellä $0.999999^{10000} \approx 99\%$.

<http://www.fooledbyrandomness.com/>

Sisältö

Diskreetin satunnaisluvun odotusarvo

Suurten lukujen laki

Jatkuvan satunnaisluvun odotusarvo

Satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Kahden sm:n summan odotusarvo

Lisäesimerkkejä

Jatkuvan satunnaisluvun diskretointi

Diskreetti satunnaisluku $\lfloor X \rfloor_k = \frac{\lfloor 10^k X \rfloor}{10^k}$ on X :n arvo pyöristettynä alaspäin k desimaalin tarkkuuteen (esim. $\lfloor 1.52793 \rfloor_3 = 1.527$).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lfloor X \rfloor_k) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{10^k} \mathbb{P}\left(\lfloor X \rfloor_k = \frac{i}{10^k}\right) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{10^k} \mathbb{P}\left(\frac{i}{10^k} \leq X < \frac{i+1}{10^k}\right) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{10^k} \int_{\frac{i}{10^k}}^{\frac{i+1}{10^k}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lfloor x \rfloor_k f(x) dx.\end{aligned}$$

Koska $\lfloor X \rfloor_k \rightarrow X$ kun tarkkuus $k \rightarrow \infty$, määritellään

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\lfloor X \rfloor_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lfloor x \rfloor_k f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Jatkuvan satunnaisluvun odotusarvo

Jatkuvan satunnaisluvun X odotusarvo **määritellään** kaavalla

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Kyseessä on jatkuva versio ideasta “mahdollisten arvojen tiheyspainotettu keskiarvo”.

Esim (Metro)

Jos seuraavan metron saapumiseen kuluva aika X noudattaa välin $[0, 10]$ tasajakaumaa tiheysfunktiona

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & x \in (0, 10), \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

niin

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{10} x \frac{1}{10} dx = 5.$$

Jatkuva odotusarvo — Lisäesimerkkejä

Esim (Polynomi tiheysfunktiona)

Printterin korjausaika X (tunteina) on jatkuvasti jakautunut tiheysfunktioilla $f(x) = 2x$, kun $0 < x < 1$.

Korjausaika on siis aina välillä 0—1 tuntia, mutta todennäköisemmin lähellä välin yläpäättä (tiheys on siellä suurempi).

Korjausajan odotusarvo on

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2/3.$$

Jatkuva odotusarvo — Lisäesimerkkejä

Esim (Eksponenttijakauma)

Hyönteisiä osuu tuulilasiin siten, että osumien väliajat X ovat eksponenttijakautuneet taajuusparametrilla $\lambda = 1$ kpl minuutissa.

Tiheysfunktio on

$$f(x) = e^{-x}$$

kun $x > 0$, ja nolla muualla.

Nyt väliajan odotusarvo on

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

(Integraalin laskemiseen tarvittiin osittaisintegrointia.)

Tulkinta pitkän ajan keskiarvona: Jos odotetaan, että hyönteisiä on kertynyt 50 kpl, niin keskimääräinen väliaika on SLL:n nojalla *noiin* 1 minuutti, ja aikaa on siis yhteensä kulunut *noiin* 50 minuuttia.

Satunnaisluvun odotusarvo: Yhteenveto

Diskreetti satunnaisluku

- Esim. joukon $\{1, \dots, 6\}$ tasajakauma, binomijakauma

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{i \in A} f(i)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x f(x)$$

Jatkuva satunnaisluku

- Esim. välin $[0, 10]$ tasajakauma, eksp. jakauma

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Sisältö

Diskreetin satunnaisluvun odotusarvo

Suurten lukujen laki

Jatkuvan satunnaisluvun odotusarvo

Satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Kahden sm:n summan odotusarvo

Lisäesimerkkejä

Esimerkki: Diskreetin satunnaisluvun neliö

Tehtävä (Vrt. viime luennon neliölaatat)

Laske $\mathbb{E}(X^2)$, kun X :n jakauma on

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	0.2	0.5	0.3

Ratkaisu

$Y = X^2$ on diskreetti satunnaisluku arvojoukkona $\{0, 1, 4\}$ ja jakaumana

k	0	1	4
$\mathbb{P}(Y = k)$	0.2	0.5	0.3

Näin ollen

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.5 + 4 \times 0.3 = 1.7.$$

Esimerkki: Jatkuvan satunnaisluvun kuutio

Kone tekee kuutioita, joiden sivu on tasaisesti jakautunut 0 ja 10 cm välillä.

Tehtävä

Laske $\mathbb{E}(X^3)$, kun X noudattaa välin $[0, 10]$ tasajakaumaa.

Ratkaisu

Satunnaisluvun $Y = X^3$ arvojoukon pisteissä $t \in [0, 1000]$,

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^3 \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^{1/3}) = \frac{t^{1/3}}{10}.$$

$$\text{Tiheysfunktio } f_Y(t) = \begin{cases} \frac{t^{-2/3}}{30}, & 0 < t < 1000, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^3) &= \mathbb{E}(Y) = \int_0^{1000} t \frac{t^{-2/3}}{30} dt = \frac{1}{30} \int_0^{1000} t^{1/3} dt \\ &= \frac{1}{30} \Big|_0^{1000} \frac{3}{4} t^{4/3} = \frac{1000^{4/3}}{40} = 250. \end{aligned}$$

Odotusarvon muunnoskaava

Jos g on funktio satunnaismuuttujan X arvojoukosta reaaliluvuille, niin $Y = g(X)$ on satunnaisluku, joka liittyy satunnaisilmiön toteumaan s luvun $g(X(s))$.

Fakta

- *Diskreetille satunnaismuuttujalle*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x) f(x).$$

- *Jatkuvalle satunnaismuuttujalle*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Esimerkki: Diskreetin satunnaisluvun neliö

Tehtävä

Laske $\mathbb{E}(X^2)$, kun X :n jakauma on

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	0.2	0.5	0.3

Ratkaisu

Soveltamalla odotusarvon muunnoskaavaa funktioon $g(k) = k^2$,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_k k^2 f(k) = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.5 + 2^2 \times 0.3 = 1.7.$$

Esimerkki: Jatkuvan satunnaisluvun kuutio

Tehtävä

Laske $\mathbb{E}(X^3)$, kun X noudattaa välin $[0, 10]$ tasajakaumaa.

Ratkaisu

Soveltamalla odotusarvon muunnoskaavaa funktioon $g(t) = t^3$,

$$\mathbb{E}(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} t^3 f(t) dt = \int_0^{10} t^3 \frac{1}{10} dt = \frac{1}{10} \Big|_0^{10} \frac{1}{4} t^4 = 250.$$

Huom. Sama tulos kuin aiemmin, mutta muunnoskaavan avulla paljon helpommin.

Siirretty ja skaalattu satunnaisluku

Tässä pienet kirjaimet ovat vakioita ja isot kirjaimet satunnaislukuja.

Fakta

- (i) $\mathbb{E}(a) = a$.
- (ii) $\mathbb{E}(bX) = b\mathbb{E}(X)$.
- (iii) $\mathbb{E}(X + a) = \mathbb{E}(X) + a$.

Todistus.

Jos X on diskreetti, (ii) saadaan käyttämällä muunnoskaavaa funktioon $g(x) = bx$:

$$\mathbb{E}(bX) = \sum_x (bx)f(x) = b \sum_x xf(x) = b\mathbb{E}(X).$$

Samoin (iii) käyttämällä funktiota $g(x) = x + a$ (taululla).

(i) saadaan yhdistämällä (ii) ja (iii) käyttäen arvoa $b = 0$.

Jos X on jatkuva, sama OK vaihtamalla summat integraaleiksi. \square

Monen satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Fakta

- *Diskreeteille satunnaismuuttujille X ja Y , joiden yhteisjakaumalla on tiheysfunktio $f(x, y)$,*

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y).$$

- *Jatkuville satunnaismuuttujille X ja Y , joiden yhteisjakaumalla on tiheysfunktio $f(x, y)$,*

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy.$$

Monen satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Example (Laatikko, jossa kaksi diskreettiä mittausta)

Kone tekee laatikoita, joiden pohja on X -sivuinen neliö ja korkeus on H . Laatikon tilavuus on siis $g(X, H) = X^2H$.

Pohjan sivu on 10 tai 20, ja korkeus on 3 tai 5, yhteisjakaumalla

	$H = 3$	$H = 5$
$X = 10$	0.4	0.3
$X = 20$	0.2	0.1

Tilavuuden odotusarvo on

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X, H)) &= g(10, 3)f(10, 3) + g(10, 5)f(10, 5) \\ &\quad + g(20, 3)f(20, 3) + g(20, 5)f(20, 5) \\ &= (300 \times 0.4) + (500 \times 0.3) + (1200 \times 0.2) + (2000 \times 0.1) \\ &= 710.\end{aligned}$$

Monen satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Example (Ellipsin pinta-ala jatkuvilla puoliakseleilla)

Ellipsin, jonka puoliakselit ovat A ja B , pinta-ala on πAB . Luvut A, B arvotaan tasajakaumasta välillä $(0, 1)$ toisistaan riippumattomasti. Mikä on pinta-alan odotusarvo?

Tasajakautuneiden muuttujien tiheysfunktiot ovat

$$f_A(a) = 1_{(0,1)}(a), \quad f_B(b) = 1_{(0,1)}(b).$$

Riippumattomuus antaa yhteisjakauman

$$f_{A,B}(a, b) = f_A(a)f_B(b) = 1_{(0,1)}(a)1_{(0,1)}(b).$$

Odotusarvo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\pi AB) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \pi ab f_{A,B}(a, b) da db \\ &= \pi \int_0^1 \int_0^1 ab da db = \pi \int_0^1 a da \int_0^1 b db = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Sisältö

Diskreetin satunnaisluvun odotusarvo

Suurten lukujen laki

Jatkuvan satunnaisluvun odotusarvo

Satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Kahden sm:n summan odotusarvo

Lisäesimerkkejä

Summan odotusarvo

Fakta

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Todistus.

Jos X ja Y ovat diskreettejä (jatkuva tapaus samaan tapaan), soveltamalla odotusarvon muunnoskaavaa funktioon $g(x, y) = x + y$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X + Y) &= \sum_x \sum_y (x + y) f(x, y) \\ &= \sum_x \sum_y x f(x, y) + \sum_x \sum_y y f(x, y) \\ &= \sum_x x \left(\sum_y f(x, y) \right) + \sum_y y \left(\sum_x f(x, y) \right) \\ &= \sum_x x f_X(x) + \sum_y y f_Y(y) \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$



Usean sm:n summa

Pidemmän summan odotusarvo saadaan käyttämällä kaavaa $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ monta kertaa.

Kolmen sm:n summa $X + Y + Z$. Annetaan sm:lle $X + Y$ lyhennysnimi U .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X + Y + Z) &= \mathbb{E}(U + Z) \\ &= \mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(Z) \\ &= \mathbb{E}(X + Y) + \mathbb{E}(Z) \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z).\end{aligned}$$

Jatkamalla samaan tapaan saadaan n -pituiselle summalle

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n).$$

Toisin sanoen: **odotusarvon voi ottaa termeittäin**. Tätä (ja skaalausta vakiokertoimella) kutsutaan **odotusarvon lineaarisuudeksi**.

Esimerkki: Binomijakauma

Olkoon n riippumatonta indikaattorimuuttujaa I_1, \dots, I_n , kukin indikoi onnistumista (1) tai epäonnistumista (0), onnistumisen tn $P(I_i = 1) = p$ ja epäonnistumisen $q = 1 - p$.

Silloin $X = \sum_{i=1}^n I_i$, eli onnistumisten lukumäärä, on **binomijakautunut**.

Miten laskea $\mathbb{E}(X)$? Voisit käyttää kaavaa $\sum_x xf(x)$, mutta se on työlästä. Helpompi tapa: odotusarvot indikaattorimuuttujista termeittäin.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(I_1 + I_2 + \dots + I_n) \\ &= \mathbb{E}(I_1) + \mathbb{E}(I_2) + \dots + \mathbb{E}(I_n) \\ &= p + p + \dots + p \\ &= np.\end{aligned}$$

Esim. $n = 100$ yritystä, $p = 0.20$ onnistumisten \implies onnistumisten lukumäärän odotusarvo on $np = 20$.

Odotusarvolle ei voi tehdä mitä tahansa

Edellä nähtiin, että joitakin “lineaarisia” operaatioita voi “siirtää” odotusarvon sisältä ulos ja päinvastoin: esim. $\mathbb{E}(bX) = b\mathbb{E}(X)$ ja $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Mitä tahansa operaatioita ei suinkaan voi näin siirrellä!

Example

Aiempi kuutioita tekevä kone, sivu X tasaisesti jakautunut 0 ja 10 cm välillä. Edellä laskimme, että $\mathbb{E}(X^3) = 250$.

Sen sijaan $(E(X))^3 = 5^3 = 125 \neq E(X^3)$.

(Odotusarvion kuutio **ei ole** kuution odotusarvo.)

Yhteenveto

Satunnaismuuttujan odotusarvo $\mathbb{E}(X)$ antaa likiarvon keskiarvolle, joka lasketaan suuresta määrästä X :n kanssa samoin jakautuneita riippumattomia satunnaislukuja.

Diskreetti satunnaisluku

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x f(x)$$

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x) f(x)$$

Jatkuva satunnaisluku

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

$$\mathbb{E}\left(a + \sum_{i=1}^n b_i X_i\right) = a + \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{E}(X_i)$$

Sisältö

Diskreetin satunnaisluvun odotusarvo

Suurten lukujen laki

Jatkuvan satunnaisluvun odotusarvo

Satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Kahden sm:n summan odotusarvo

Lisäesimerkkejä

Pietarin paradoksi

Kasinolla on tarjolla uhkapeli, jossa kolikkoa heitetään kunnes saadaan klaava. Pelin tuotto on

- 2 EUR, jos ensimmäinen klaava ilmestyy 1. heitolla
- 4 EUR, jos ensimmäinen klaava ilmestyy 2. heitolla
- 8 EUR, jos ensimmäinen klaava ilmestyy 3. heitolla
- ...

Paljonko olisit valmis maksamaan oikeudesta osallistua peliin?

Pelin tuotto on $g(T) = 2^T$, missä pelin kesto T on diskreetti satunnaisluku jakaumana $f_T(k) = (1/2)^k, k = 1, 2, 3, \dots$

Pelin odotusarvoinen tuotto on

$$\mathbb{E}[g(T)] = 2^1(1/2)^1 + 2^2(1/2)^2 + 2^3(1/2)^3 + \dots = \infty.$$

Vaikka tuotto on varmasti äärellinen, sen odotusarvo on ääretön.

https://en.wikipedia.org/wiki/St._Petersburg_paradox

*Lisätehtävä (yli kurssialueen)

Y = odotusaika (min) asemalla, jonne metroja saapuu 10 min välein, ja jossa metrot pysähtyvät 1 min ajan.

Viime luennolla johdettiin Y :n kertymäfunktio

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{10} + \frac{t}{10}, & 0 \leq t \leq 9, \\ 1, & t > 9. \end{cases}$$

ja todettiin, että Y :n jakauma ei ole diskreetti eikä jatkuva vaan niiden sekoitus.

Tehtävä

Kehitä luonteva odotusarvon määritelmä diskreetin ja jatkuvan jakauman sekoituksille ja laske $\mathbb{E}(Y)$.

Seuraavalla kerralla puhutaan keskihajonnasta ja korrelaatiosta. . .