MS-A0502 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi

2B Keskihajonta ja korrelaatio

Emilia Blåsten

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Perustieteiden korkeakoulu
Aalto-yliopisto

Lukuvuosi 2021–2022
Periodi II

Sisältö

Mitä odotusarvo kertoo jakaumasta?

Satunnaismuuttujan odotusarvo $\mathbb{E}(X)$:

- on X:n mahdollisten arvojen todennäköisyyksillä painotettu summa, $\sum_x x\, f(x)$ tai $\int x\, f(x) dx$
- kertoo likiarvon keskiarvolle, joka saadaan suuresta määrästä riippumattomia X:n tavoin jakautuneita satunnaislukuja
- ei kerro mitään jakauman leveydestä

Esim

Diskreettejä satunnaismuuttujia, joilla sama odotusarvo 1:

k	1
$\mathbb{P}(X = k)$	1

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

k	0	1000000
$\mathbb{P}(W = k)$	0.999999	0.000001

Miten mitata satunnaismuuttujan poikkeamaa odotusarvosta? (Ensimmäinen yritys)

Satunnaisluvun (itseis)poikkeama odotusarvosta $\mu = \mathbb{E}(X)$ on satunnaisluku $|X - \mu|$. Sekin on satunnaisluku.

Jos nopanheitossa ($\mu = 3.5$) sattuu $X = 2$, niin $X - \mu = -1.5$.

Poikkeaman odotusarvo $\mathbb{E}|X - \mu|$:

- esim. nopalle $\frac{1}{6}(2.5 + 1.5 + 0.5 + 0.5 + 1.5 + 2.5) = 1.5$.
- kertoo likiarvon keskiarvolle $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|$ suuresta määrästä riippumattomia X:n tavoin jakautuneita satunnaislukuja
- on optimoinnin kannalta hankala suure, koska funktio $x \mapsto |x|$ ei ole derivoituva nollassa.
- (ja eräitä muita matemaattisia hankaluuksia)

Entä jos korvataan $|X - \mu|$ luvulla $(X - \mu)^2$?

Varianssi (engl. *variance*)

Satunnaisluvun neliöpoikkeama odotusarvosta $\mu = \mathbb{E}(X)$ on satunnaisluku $(X - \mu)^2$. Sekin on satunnaisluku.

Esim. jos nopanheitossa ($\mu = 3.5$) sattuu $X = 2$, niin silloin neliöpoikkeama on $(2 - 3.5)^2 = (-1.5)^2 = 2.25$.

Neliöpoikkeaman odotusarvo eli satunnaisluvun X varianssi $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$:

- esim. nopassa $\frac{1}{6}(2.5^2 + 1.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 + 1.5^2 + 2.5^2) \approx 2.917$
- kertoo likiarvon keskiarvolle $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ suuresta määrästä riippumattomia X:n tavoin jakautuneita sat.lukuja
- on optimoinnin kannalta mukava suure, koska funktio $x \mapsto x^2$ on äärettömän monta kertaa derivoituva

Varianssin tulkinta

Varianssi on yksiköltään neliö-jotain

	X	$\mathrm{Var}(X)$
Pituus	m	m^2
Aika	s	s^2
Tuotto	EUR	EUR^2

Tulos palautetaan alkuperäisiin mittayksiköihin ottamalla neliöjuuri. Varianssin neliöjuurta kutsutaan keskihajonnaksi, merk. $\mathrm{SD}(X)$.

Esim. nopanheittotuloksen keskihajonta

$$\sqrt{\frac{1}{6}(2.5^2 + 1.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 + 1.5^2 + 2.5^2)} \approx \sqrt{2.917} \approx 1.708.$$

(Vertaa itseispoikkeaman odotusarvoon 1.5.)

Keskihajonta (engl. *standard deviation*)

Satunnaisluvun keskihajonta $\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}$ on alkuperäisiin yksiköihin normitettu odotusarvoinen neliöpoikkeama odotusarvosta $\mu = \mathbb{E}(X)$.

Myös muita merkintöjä kuten $\mathbb{D}(X)$.

$\mathrm{SD}(X)$ mittaa:

- paljonko X yleensä poikkeaa odotusarvostaan (hiukan kiertotietä: neliöpoikkeaman odotusarvon neliöjuurena)
- X:n jakauman leveyttä

Diskreetti jakauma:

$$\mu = \sum_x x\, f(x)$$

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\sum_x (x-\mu)^2 f(x)}$$

Jatkuva jakauma:

$$\mu = \int x\, f(x)\, dx$$

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\int (x-\mu)^2\, f(x)\, dx}$$

Esimerkki: Erilaisia satunnaislukuja, joilla odotusarvo 1

Laske satunnaislukujen X, Y, Z keskihajonnat:

k	1
$\mathbb{P}(X = k)$	1

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

k	0	2
$\mathbb{P}(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\sum_k (k-\mu)^2 f_X(k)} = \sqrt{(1-1)^2 \times 1} = 0.$$

$$\mathrm{SD}(Y) = \sqrt{(0-1)^2 \times \frac{1}{3} + (1-1)^2 \times \frac{1}{3} + (2-1)^2 \times \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.82.$$

$$\mathrm{SD}(Z) = \sqrt{(0-1)^2 \times \frac{1}{2} + (1-1)^2 \times 0 + (2-1)^2 \times \frac{1}{2}} = 1.$$

Keskihajonta: Vaihtoehtoinen laskentakaava

Fakta

Jos satunnaisluvun X odotusarvo on $\mu = \mathbb{E}(X)$, niin pätee

$$\mathrm{SD}(X) \;=\; \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \;=\; \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mu^2}.$$

(Tämä on joskus laskuissa kätevämpi, jos $\mathbb{E}(X^2)$ on helppo laskea. Siihen voi käyttää odotusarvon muunnoskaavaa.)

Todistus.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) \;=\; \mathbb{E}[(X-\mu)^2] \;&=\; \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
&=\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2\mu X] + \mathbb{E}[\mu^2] \\
&=\; \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\mathbb{E}[X] + \mu^2 \\
&=\; \mathbb{E}[X^2] - \mu^2
\end{aligned}$$

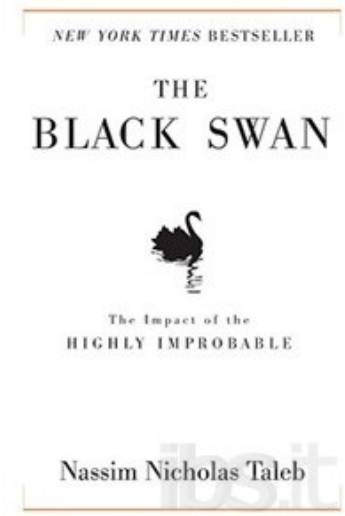
$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{SD}(X) \;=\; \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \;=\; \sqrt{\mathbb{E}[X^2] - \mu^2}$$

□

Esimerkki: Musta joutsen — Kahden arvon jakauma

k	0	10^6
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - 10^{-6}$	10^{-6}

$$\mu = \mathbb{E}(X) = 1$$



Laske keskihajonta.

Tapa 1 (määritelmästä):

$$\begin{aligned} \mathrm{SD}(X) &= \sqrt{\sum_x (x-\mu)^2 f(x)} \\ &= \sqrt{(0-1)^2 \times (1-10^{-6}) + (10^6-1)^2 \times 10^{-6}} \approx 1000. \end{aligned}$$

Tapa 2 (laskentakaavan avulla):

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = 0^2 \times (1-10^{-6}) + (10^6)^2 \times 10^{-6} = 10^6.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mu^2} = \sqrt{10^6 - 1^2} \approx 1000.$$

Esimerkki: Metro, jatkuva jakauma

Odotusaika X jatkuvasti tasajakautunut välillä $[0, 10]$. Sen odotusarvo $\mu = 5$ (minuuttia). Laske keskihajonta.

Tapa 1 (määritelmästä):

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx} = \sqrt{\int_0^{10} (x-5)^2 \frac{1}{10}\,dx} = \cdots$$

Tapa 2 (laskentakaavan avulla):

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{10} x^2 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\Big|_0^{10} \left(\frac{1}{3}x^3\right) \approx 33.33.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mu^2} = \sqrt{33.33 - 5^2} \approx 2.89 \text{ minuuttia.}$$

Esimerkki: Tulon jakautuminen ikäryhmiin Suomessa

(Livedemo)

Siirretyn ja skaalatun satunnaisluvun keskihajonta

Fakta (Viime luento)

(i) $\mathbb{E}(a) = a$.

(ii) $\mathbb{E}(bX) = b\mathbb{E}(X)$.

(iii) $\mathbb{E}(X + a) = \mathbb{E}(X) + a$.

Fakta

(i) $\mathrm{SD}(a) = 0$.

(ii) $\mathrm{SD}(bX) = |b|\,\mathrm{SD}(X)$.

(iii) $\mathrm{SD}(X + a) = \mathrm{SD}(X)$.

Todistus.

(i) on helppo. Todistetaan (ii). Merkitään $\mu = \mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(bX) &= \mathbb{E}[\big(bX - \mathbb{E}(bX)\big)^2] = \mathbb{E}[\big(bX - b\mu\big)^2] \\ &= \mathbb{E}[b^2\,(X-\mu)^2] = b^2\,\mathbb{E}[(X-\mu)^2] = b^2\,\mathrm{Var}(X),\end{aligned}$$

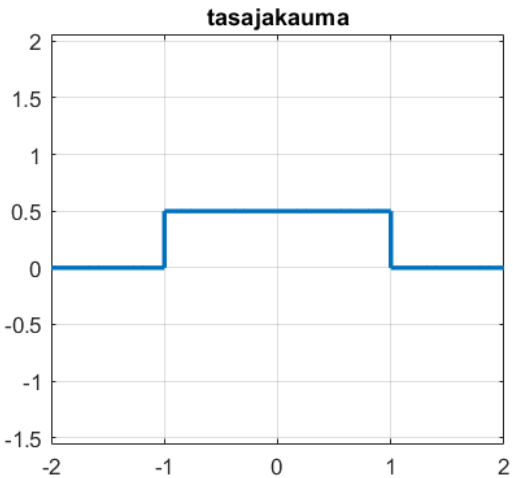
joten

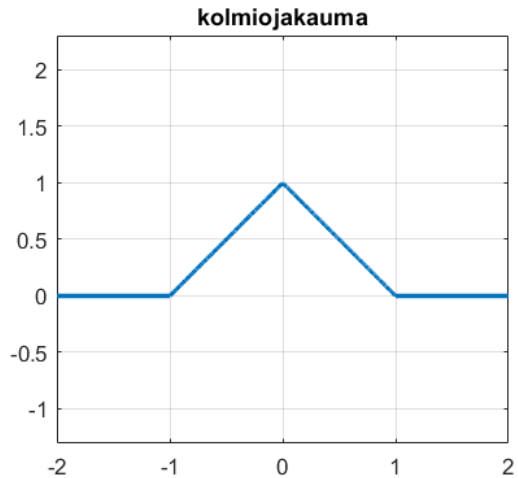
$$\mathrm{SD}(bX) = \sqrt{\mathrm{Var}(bX)} = \sqrt{b^2}\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = |b|\,\mathrm{SD}(X).$$

(iii) samaan tapaan, kokeile itse! □

Laskutehtävä: Tasa- ja kolmiojakauma

X on tasajakautunut välillä $[-1, 1]$, tiheys $f_X(x) = 0.5$ tällä välillä.
Y on kolmiojakautunut samalla välillä, tiheys $f_Y(y) = 1 - |y|$ tällä välillä.





Poll: Arvaa onko keskihajonnoissa eroa.
Tehtävä: Laske molemmat keskihajonnat kaavalla

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]}.$$

Huomaa että tässä on $\mu_X = \mu_Y = 0$. Tarvitset integrointia.

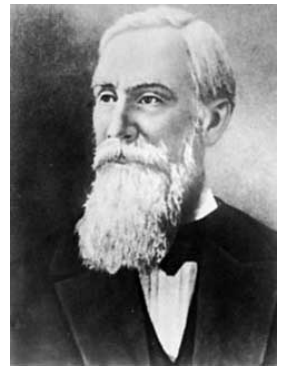
Sisältö

Tšebyšovin epäyhtälö: Poikkeamat odotusarvosta

Fakta (Tšebyšovin epäyhtälö, Chebyshev's inequality)

Jokaiselle satunnaisluvulle odotusarvona μ ja keskihajontana σ, tapahtuman
$\{X = \mu \pm 2\sigma\} = \{\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\}$
todennäköisyys on vähintään

$$\mathbb{P}(X = \mu \pm 2\sigma) \geq \frac{3}{4}.$$



Pafnuti Tšebyšov (engl. Pafnuty Chebyshev) 1821–1894

Yleisemmin $\mathbb{P}(X = \mu \pm r\sigma) \geq 1 - \frac{1}{r^2}$ kaikilla $r \geq 1$.

- X:n arvo sijaitsee melko todennäköisesti (tn $\geq 75\%$) kahden keskihajonnan sisällä odotusarvostaan
- X:n arvo sijaitsee hyvin todennäköisesti (tn $\geq 99\%$) kymmenen keskihajonnan sisällä odotusarvostaan

Tšebyšovin epäyhtälö antaa keskiosan tn:lle alarajan (ja häntätodennäköisyydelle ylärajan). Jos jakauman muoto tiedetään, voidaan saada tiukempiakin rajoja.

Esimerkki: Dokumenttien pituudet

Eräässä lehdessä artikkelien sanamäärällä on keskiarvo 1000 ja keskihajonta 200. Emme tunne jakaumaa sen tarkemmin. Onko todennäköistä, että satunnaisen artikkelin sanamäärä on

(a) välillä $[600, 1400]$? (2 keskihajonnan sisällä keskiarvosta)

(b) välillä $[800, 1200]$? (1 keskihajonnan sisällä keskiarvosta)

Ratkaisu

(a) Tšebyšovin epäyhtälöstä

$$\mathbb{P}(X \in [600, 1400]) \;=\; \mathbb{P}(X = \mu \pm 2\sigma) \;\geq\; 75\%,$$

joten sanamäärä on melko todennäköisesti välillä 600–1400.

(b) Tšebyšov ei tällä tarkkuudella kerro mitään hyödyllistä, sillä

$$\mathbb{P}(X \in [800, 1200]) \;=\; \mathbb{P}(X = \mu \pm \sigma) \;\geq\; 1 - \frac{1}{1^2} \;=\; 0.$$

Tarvitsisimme tarkempaa tiedon jakauman muodosta.

Esimerkki: Dokumenttien pituudet (jos normaalijakauma)

Eräässä lehdessä artikkelien sanamäärällä on keskiarvo 1000 ja keskihajonta 200. Tiedämme lisäksi, että jakauma on ns. normaalijakauma. Onko todennäköistä, että satunnaisen artikkelin sanamäärä on

(a) välillä $[600, 1400]$? (2 keskihajonnan sisällä keskiarvosta)
(b) välillä $[800, 1200]$? (1 keskihajonnan sisällä keskiarvosta)

Ratkaisu

(a) Normaalijakauman taulukoista (tai R:llä `1-2*pnorm(-2)`)

$$\mathbb{P}(X \in [600, 1400]) = \mathbb{P}(X = \mu \pm 2\sigma) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} = 0 \pm 2) \approx 95\%.$$

(b) Normaalijakauman taulukoista (tai R:llä `1-2*pnorm(-1)`)

$$\mathbb{P}(X \in [800, 1200]) = \mathbb{P}(X = \mu \pm \sigma) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} = 0 \pm 1\right) \approx 68\%.$$

Saimme paljon korkeampia rajoja, koska tiedämme jakauman.

Esimerkki: Dokumenttien pituudet (kolmas tapaus)

Eräässä lehdessä artikkelien sanamäärällä on keskiarvo 1000 ja keskihajonta 200. Onko todennäköistä, että satunnaisen artikkelin sanamäärä on

(a) välillä $[600, 1400]$? (2 keskihajonnan sisällä keskiarvosta)

(b) välillä $[800, 1200]$? (1 keskihajonnan sisällä keskiarvosta)

kun dokumenttien pituusjakauma on

k	750	1000	1250
$\mathbb{P}(X = k)$	32%	36%	32%

Ratkaisu

Suoraan jakauman taulukosta nähdään, että pituus on

(a) varmasti (tn $= 100\%$) välillä $\mu \pm 2\sigma = [600, 1400]$, mutta

(b) melko epätodennäköisesti (tn $= 36\%$) välillä $\mu \pm \sigma = [800, 1200]$.

Pohdittavaksi: Miten esimerkkiluvut valittiin? Haluttiin jakauma, jolla on SD=200, ja kaksi yhtä todennäköistä arvoa odotusarvon molemmin puolin. Miten valita niiden tn:t niin että SD on juuri se mitä haluttiin?

Tšebyšovin todistus (jatkuva; diskreetti samaan tapaan)

Valitaan mikä tahansa $r > 0$. Olkoon X:llä tiheys $f(x)$, odotusarvo μ ja keskihajonta σ. Olkoon MID väli $[\mu - r\sigma,\ \mu + r\sigma]$ ja TAIL sen komplementti. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 &= \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{\mathrm{MID}} (\ldots) + \int_{\mathrm{TAIL}} (\ldots) \\
&\geq \int_{\mathrm{TAIL}} (x-\mu)^2 f(x)dx \quad \geq \quad \int_{\mathrm{TAIL}} (r\sigma)^2 f(x)dx \\
&= r^2\sigma^2 \int_{\mathrm{TAIL}} f(x)dx = r^2\sigma^2\ \mathbb{P}(x \in \mathrm{TAIL}).
\end{aligned}$$

Kumotaan σ^2 ja siirretään r^2 toiselle puolelle:

$$\mathbb{P}(X \in \mathrm{TAIL}) \leq \frac{1}{r^2}.$$

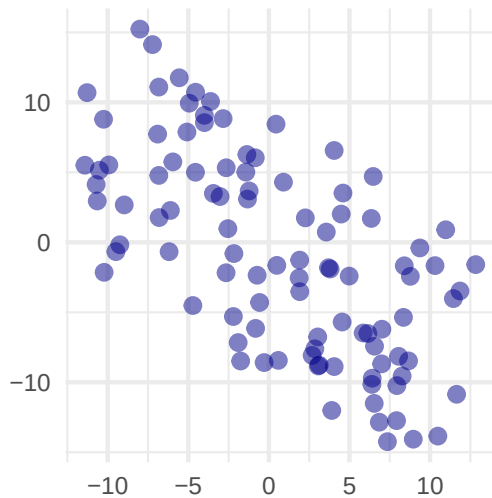
Huom. Tšebyšovin avulla voidaan todistaa suurten lukujen laki. Siihen tarvitaan vielä yksi väline, nimittäin satunnaismuuttujien summan varianssi; ks. seuraava luento ja https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_large_numbers

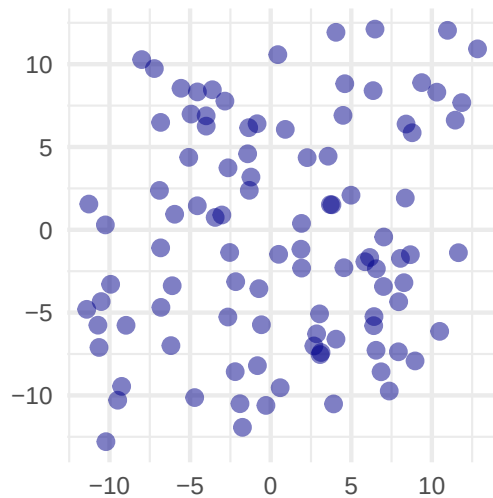
Sisältö

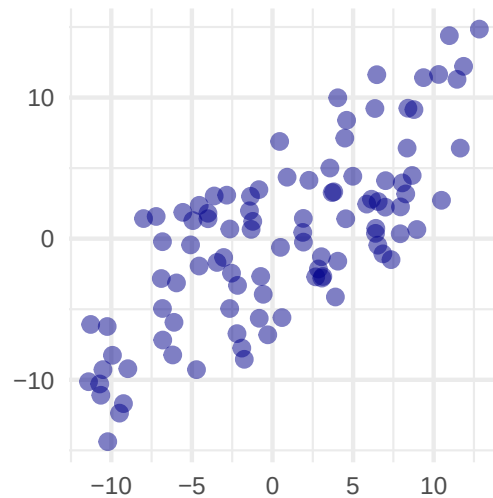
Yhteisvaihtelu

Keskihajonta mittaa yhden satunnaismuuttujan vaihtelua odotusarvonsa ympärillä.

Miten mitataan kahden satunnaismuuttujan X ja Y yhteisvaihtelua (suunta ja voimakkuus)?







Kovarianssi (engl. *covariance*)

$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$, mittaa satunnaismuuttujien X:n ja Y:n yhteisvaihtelun suuntaa ja voimakkuutta.

Diskreetti yhteisjakauma:

$$\sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y)\, f(x, y)$$

Jatkuva yhteisjakauma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f(x, y) dx dy.$$

Kovarianssi

- on > 0, kun $X - \mu_X$ ja $Y - \mu_Y$ ovat usein samanmerkkiset
- on < 0, kun $X - \mu_X$ ja $Y - \mu_Y$ ovat usein erimerkkiset
- yksiköltään alkup. muuttujien yksiköiden tulo (esim. m^2, kg·m, ...)

Kovarianssia ei normiteta ottamalla neliöjuurta (miksi)?
(Voi olla negatiivinen, eikä sen yksikkökään välttämättä ole neliö)

Huom. erikoistapaus:

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(X - \mu_X)] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \mathrm{Var}(X).$$

Kovarianssi: Vaihtoehtoinen laskentakaava

Tämä on usein laskuissa kätevämpi kuin määritelmän kaava.
Tämänkin voi laskea odotusarvon muunnoskaavalla.

Fakta

$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Todistus.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\
&= \mathbb{E}[XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mathbb{E}[Y] - \mu_Y \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[\mu_X \mu_Y] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y - \mu_Y \mu_X + \mu_X \mu_Y \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y.
\end{aligned}
$$

□

Kovarianssin bilineaarisuus

Fakta

Kovarianssioperaattori $(X, Y) \mapsto \mathrm{Cov}(X, Y)$ *on symmetrinen ja bilineaarinen (lineaarinen molempien argumenttiensa suhteen):*

$\mathrm{Cov}(Y, X) = \mathrm{Cov}(X, Y)$

$\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$.

$\mathrm{Cov}(X, Y_1 + Y_2) = \mathrm{Cov}(X, Y_1) + \mathrm{Cov}(X, Y_2)$.

$\mathrm{Cov}(aX, Y) = a\,\mathrm{Cov}(X, Y)$

Yleisesti:

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \,\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

Kovarianssin bilineaarisuus: Todistus

Merkitään $Y = \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j$. (i) Kovarianssin laskentakaavasta ja odotusarvon lineaarisuudesta

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left(\sum_i a_i X_i, Y\right) &= \mathbb{E}[(\sum_i a_i X_i) Y] - \mathbb{E}[(\sum_i a_i X_i)]\mathbb{E}[Y] \\
&= \sum_i a_i \mathbb{E}[X_i Y] - \left(\sum_i a_i \mathbb{E}[X_i]\right) \mathbb{E}[Y] \\
&= \sum_i a_i \mathbb{E}[X_i Y] - \sum_i a_i \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[Y] \\
&= \sum_i a_i \left(\mathbb{E}[X_i Y] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[Y]\right) = \sum_i a_i \operatorname{Cov}(X_i, Y).
\end{aligned}$$

Symmetrian ja kohdan (i) avulla

$$\begin{aligned}
\sum_i a_i \operatorname{Cov}(X_i, Y) &= \sum_i a_i \operatorname{Cov}(Y, X_i) \\
&= \sum_i a_i \operatorname{Cov}(\sum_j b_j Y_j, X_i) \\
&= \sum_i a_i \sum_j b_j \operatorname{Cov}(Y_j, X_i) \\
&= \sum_i \sum_j a_i b_j \operatorname{Cov}(X_i, Y_j).
\end{aligned}$$

Kovarianssi: Yhteenveto

Satunnaislukujen X ja Y kovarianssi on

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \;=\; \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

missä $\mu_X = \mathbb{E}(X)$ ja $\mu_Y = \mathbb{E}(Y)$.

Diskreetti yhteisjakauma:

$$\sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f(x,y)$$

Jatkuva yhteisjakauma:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f(x,y)\,dx\,dy.$$

Kovarianssi on symmetrinen ja bilineaarinen:

$$\mathrm{Cov}(Y,X) \;=\; \mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \,\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

Korrelaatio (engl. *correlation*)

Kovarianssia ei normiteta ottamalla neliöjuurta (mm. koska se voi olla negatiivinen, ja yksikkökin voi olla esim. kg m)

Lisäksi haluaisimme luvun, joka kuvaa kovarianssia *suhteessa* siihen, paljonko X ja Y yleensäkään vaihtelevat. Siksi toisenlainen normitus ...

Korrelaatio

$$\mathrm{Cor}(X, Y) \;=\; = \; \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{SD}(X)\,\mathrm{SD}(Y)}$$

mittaa satunnaislukujen X ja Y yhteisvaihtelun suuntaa ja voimakkuutta normitetuissa yksiköissä.

Voidaan osoittaa, että aina on $-1 \leq \mathrm{Cor}(X, Y) \leq +1$.
(Todistus Cauchy-Schwarzin epäyhtälöllä, ei tällä kurssilla.)

Riippumattomattomat satunnaisluvut eivät korreloi

Fakta

Jos X *ja* Y *ovat stokastisesti riippumattomat, niin*
$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ *ja* $\mathrm{Cor}(X, Y) = 0$.

Todistus.

Diskreetti.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_x \sum_y xy\ f_{X,Y}(x, y) \\
&= \sum_x \sum_y xy\ f_X(x) f_Y(y) \\
&= \left(\sum_x x\ f_X(x) \right) \left(\sum_y y\ f_Y(y) \right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

Kovarianssin laskukaavasta
$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$
Siis myös $\mathrm{Cor}(X, Y) = 0$. □

Esimerkki: Kaksi binaarista satunnaismuuttujaa

X ja Y ovat joukossa $\{-1, +1\}$ tasajakautuneita.

Lisäksi $c = \mathbb{P}(X = +1, Y = +1)$.

Määritä X:n ja Y:n yhteisjakauma ja korrelaatio.

	Y		
X	-1	$+1$	Yht
-1	c	$\frac{1}{2} - c$	$\frac{1}{2}$
$+1$	$\frac{1}{2} - c$	c	$\frac{1}{2}$
Yht	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$\mathbb{E}(X) = 0$
$\mathbb{E}(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + (+1)^2 \times \frac{1}{2} = 1$
$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2} = \sqrt{1 - 0^2} = 1$

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{SD}(Y) = \mathrm{SD}(X) = 1$.

$\mathbb{E}(XY) = (-1)^2 \times c + 2 \times (-1)(+1) \times (\frac{1}{2} - c) + (+1)^2 c = 4c - 1$
$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 4c - 1$

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{SD}(X)\,\mathrm{SD}(Y)} = 4c - 1$$

Esimerkki: Asuntokunnat huone- ja henkilöluvun mukaan

(X=henkilöluku, Y=huoneluku)

		X						
		1	2	3	4	5	6	yht
Y	1	0.126	0.013	0.002	0.001	0.000	0.000	0.142
	2	0.196	0.086	0.012	0.005	0.001	0.000	0.301
	3	0.073	0.097	0.034	0.019	0.005	0.001	0.228
	4	0.038	0.079	0.031	0.030	0.010	0.003	0.191
	5	0.015	0.041	0.017	0.021	0.009	0.002	0.105
	6	0.004	0.012	0.006	0.007	0.003	0.001	0.032
	yht	0.453	0.328	0.101	0.082	0.029	0.008	1.000

(Enemmän käsittelyä videolla, ks. luentovideo.)

Esimerkki: Lineaarinen deterministinen riippuvuus

Oletetaan, että eräille sm:ille X ja Y pätee täsmälleen $Y = a + bX$, missä X noudattaa jotain (tunnettua tai tuntematonta) jakaumaa odotusarvona $\mathbb{E}(X) = \mu$ ja keskihajontana $\mathrm{SD}(X) = \sigma$. (Huom. deterministisyys.)

Laske tässä tilanteessa X:n ja Y:n korrelaatio.

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \;=\; \mathrm{Cov}(X, a + bX) \;=\; \mathrm{Cov}(X, a) + \mathrm{Cov}(X, bX) \;=\; b\,\mathrm{Var}(X).$$

$$\mathrm{SD}(Y) \;=\; \mathrm{SD}(a + bX) \;=\; |b|\,\mathrm{SD}(X)$$

$$\mathrm{Cor}(X, Y) \;=\; \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{SD}(X)\,\mathrm{SD}(Y)} \;=\; \frac{b\,\mathrm{Var}(X)}{|b|\,\mathrm{SD}(X)^2} \;=\; \frac{b}{|b|}.$$

$$\mathrm{Cor}(X, Y) \;=\; \begin{cases} +1, & b > 0, \\ 0, & b = 0, \\ -1, & b < 0. \end{cases}$$

Varianssin laskusääntöjä riippumattomien summalle

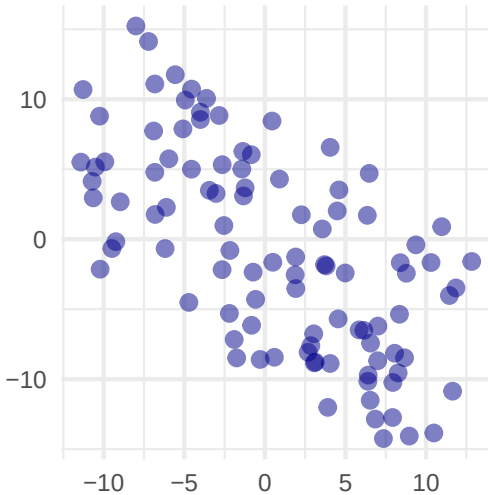
Jos X ja Y ovat stokastisesti riippumattomat, pätee lisäksi

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

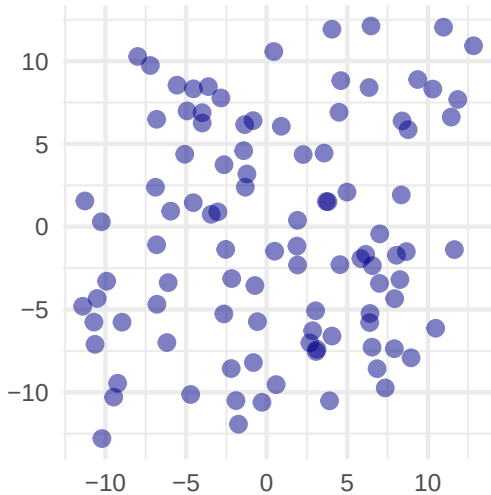
Yleisemmin, jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat stokastisesti riippumattomat, pätee

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \,\mathrm{Var}(X_i).$$

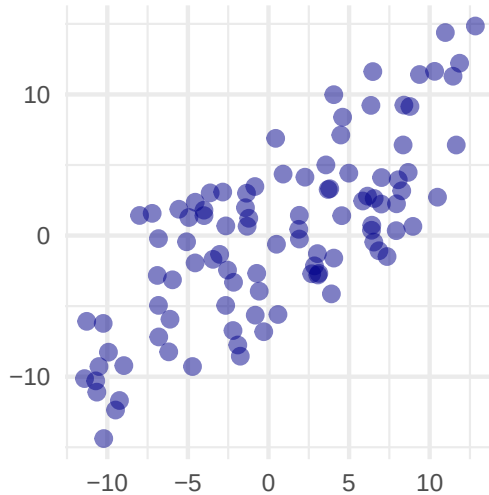
Yhteisjakaumasta simuloituja lukupareja (x, y)



$\rho = -0.60$



$\rho = 0.28$



$\rho = 0.80$

Seuraavalla kerralla puhutaan satunnaismuuttujien summista ja normaaliapproksimaatiosta. . .