

MS-A0502 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi

1B Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Jukka Kohonen

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Perustieteiden korkeakoulu
Aalto-yliopisto

Lukuvuosi 2020–2021
Periodi II

Sisältö

Satunnaismuuttujan käsite

Jakauma ja kertymäfunktio

Jakauman tiheysfunktio

Monen muuttujan yhteisjakauma

Ehdollinen jakauma

Esimerkkejä

Satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttuja (lyh. **sm**) on suure, jonka arvo määräytyy satunnaisilmiön toteumasta:

- Sattuma määrää satunnaisilmiön toteuman $s \in S$
- Toteuma s määrää satunnaismuuttujan arvon $X(s)$
- Tapahtuma $\{X = a\} := \{s \in S : X(s) = a\}$
- Sm:n arvoja vastaavat tapahtumat ovat perusjoukon ositus

Esim (Kaksi nopanheittoa)

Perusjoukossa $S = \{(s_1, s_2) : s_1, s_2 = 1, \dots, 6\}$

- Silmälukujen summa $N(s) = s_1 + s_2$ on satunnaismuuttuja
- Niiden maksimi $M(s) = \max(s_1, s_2)$ on satunnaismuuttuja
- Myös 1. silmäluku $X_1(s) = s_1$ on satunnaismuuttuja!

Usein sm:n arvoa $X(s)$ merkitään lyhyesti X .

Satunnaismuuttuja: Teoria ja käytäntö

Huomaa kaksi abstraktion askelta:

- Perusjoukko S ja todennäköisyysfunktio \mathbb{P} kuvaavat kaiken *satunnaisuuden* satunnaisilmiössä.
- Kun (satunnainen) toteuma $s \in S$ toteutuu, niin se määrää kaikkien satunnaismuuttujien arvot.

Yhdessä satunnaisilmiössä (esim. “jaetaan yksi kortti”, “jaetaan viisi korttia”) voimme määritellä mielivaltaisen paljon satunnaismuuttujia (funktioita toteumasta).

Matemaattisesti satunnaismuuttuja on (deterministinen) *kuvaus* eli *funktio* toteumasta s esim. reaalityyppiseksi $X(s)$.

Käytännössä satunnaismuuttujan arvoa $X(s)$ merkitään lyhyesti X , ja tapahtumaa, että X saa esim. arvon 5, merkitään $\{X = 5\}$ tai ilman sulkuja $X = 5$.

Eri tyypisiä satunnaismuuttujia

Usein satunnaismuuttujan arvot $X(s)$ ovat reaalilukuja, mutta ne voivat olla jotain muutakin.

Nimitys	Maalijoukko	Esim.
Satunnaisluku	\mathbb{R}	
Satunnaisvektori	\mathbb{R}^n	(X_1, X_2, X_3) kolmesta nopanheitosta; tai noppatulosten (Minimi, Maksimi)
Satunnaismatriisi	$\mathbb{R}^{m \times n}$	
Satunnaismerkkijono	A^n	DNA-sekvenssi, $A = \{A, C, T, G\}$
Stokastinen prosessi	\mathbb{R}^T	aikavälin T funktiot
Satunnaiskenttä	\mathbb{R}^U	alueen U funktiot
Satunnaisverkko	$\{0, 1\}^{V \times V}$	solmujoukon V verkot

Tällä kurssilla käsitellään lähes yksinomaan satunnaislukuja (eli reaaliarvoisia satunnaismuuttujia) ja \mathbb{R}^2 :n satunnaisvektoreita.

Satunnaismuuttuja on **diskreetti** jos sen arvojoukko on äärellinen kuten $\{1, 2, 3, 4\}$ tai numeroituvasti ääretön kuten \mathbb{N} .

Sisältö

Satunnaismuuttujan käsite

Jakauma ja kertymäfunktio

Jakauman tiheysfunktio

Monen muuttujan yhteisjakauma

Ehdollinen jakauma

Esimerkkejä

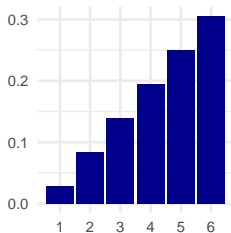
Esim. Kahden nopan maksimi

$M = \max(X_1, X_2)$, missä X_1 ja X_2 ovat kahden nopan tulokset.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M = k) &= \mathbb{P}(M \leq k) - \mathbb{P}(M \leq k - 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq k \text{ ja } X_2 \leq k) - \mathbb{P}(X_1 \leq k - 1 \text{ ja } X_2 \leq k - 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq k) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq k) - \mathbb{P}(X_1 \leq k - 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq k - 1) \\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{2k-1}{36}\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujan M jakauma:

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(M = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$



Uusia satunnaismuuttujia vanhoista

Yhdestä tai monesta satunnaismuuttujasta voi luonnollisesti laskea jollakin funktiolla uuden arvon, joka on taas satunnaismuuttuja.

Esim (Tunnusluvut)

Nopan tulokset X_1, X_2, X_3 , niistä suurin $Y = \max(X_1, X_2, X_3)$, pienin $A = \min(X_1, X_2, X_3)$. Määritellään uusi sm $L = Y - A$, joka kuvaa, miten **leveälle** välille tulokset ovat asettuneet.

Jos tulokset ovat $(4, 2, 5)$, niin $Y = 5$, $A = 2$, ja edelleen $L = 5 - 2 = 3$.

- L on myös satunnaismuuttuja ja sillä on jokin jakauma, ts. eri arvojen todennäköisyydet.
- Tällaisia toteutunutta lukujonoa (dataa) kuvailevia **tunnuslukuja** käytetään paljon tilastotieteessä. Myös lukujonon **keskiarvo** on tunnusluku.

Uusia vanhoista: Yhden sm:n muunnos

Esim (Satunnaisen kokoinen neliö)

Kone tekee neliölaattoja, joiden sivu X määräytyy nopanheitolla.

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Laatan pinta-ala $A = X^2$ on myös sm. Mikä on sen jakauma? Otettava selville (1) **mitä arvoja** X^2 voi yleensäkin saada ja (2) **millä tn:llä**.



k	?	?	?	?	?	?
$\mathbb{P}(A = k)$?	?	?	?	?	?

Uusia vanhoista: Yhden sm:n muunnos

Esim (Satunnaisen kokoinen neliö)

Kone tekee neliölaattoja, joiden sivu X määräytyy nopanheitolla.

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Laatan pinta-ala $A = X^2$ on myös sm. Mikä on sen jakauma? Otettava selville (1) **mitä arvoja** X^2 voi yleensäkin saada ja (2) **millä tn:llä**.

k	1	4	9	16	25	36
$\mathbb{P}(A = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(Muunnoksista tulee lisää luennossa 2A.)

Esim. Metron odotusaika (reaaliluku)

X = seuraavan metron odotusaika (min) asemalla, jonne metroja saapuu 10 min välein. Mikä on satunnaismuuttujan X jakauma?

- $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3) = \frac{1}{10} = 0.1$
- $\mathbb{P}(2.9 \leq X \leq 3) = \frac{0.1}{10} = 0.01$
- $\mathbb{P}(2.999999 \leq X \leq 3) = \frac{0.000001}{10} = 0.0000001$
- $\mathbb{P}(X = 3) = 0$

Vastaavasti päätellen havaitaan, että $\mathbb{P}(X = t) = 0$ kaikilla t .

Menikö yllä olevassa päättelyssä jotain väärin?

Ei mennyt. Koska X :n arvojoukko on *jatkuva* väli $[0, 5]$, tarkoittaa $\{X = 3\}$ tapahtumaa, että X :n arvo on 3 äärettömän monen desimaalin tarkkuudella. Tällaisen tapahtuman todennäköisyys on nolla.

Tarvitaan vaihtoehtoinen tapa esittää odotusajan jakauma.

Esim. Metron odotusaika

X = seuraavan metron odotusaika (min) asemalla, jonne metroja saapuu 10 min välein. Mikä on satunnaismuuttujan X jakauma?

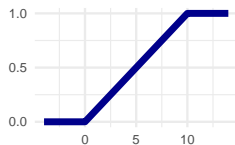
Yksittäisten arvojen todennäköisyyksistä $\mathbb{P}(X = t) = 0$ ei ole hyötyä laskennassa, joten keskitymme välien todennäköisyyksiin.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}(a < X \leq b) \\ &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) \\ &= F_X(b) - F_X(a),\end{aligned}$$

missä

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{10}, & 0 < t < 10, \\ 1, & t \geq 10. \end{cases}$$

on odotusajan jakauman kertymäfunktio.



Kertymäfunktio

Satunnaisluvun (eli reaaliarvoisen satunnaismuuttujan) jakauman **kertymäfunktio** on funktio $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

Fakta

*Kertymäfunktio määrää jakauman: funktion $F_X(t)$ avulla voidaan laskea **kaikkien** tapahtumien $\{X \in B\}$ todennäköisyydet.*

Esim (Metron odotusaika)

Millä todennäköisyydellä odotusaika osuu välille (1, 2) tai (3, 4)?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in (1, 2) \text{ tai } X \in (3, 4)) &= \mathbb{P}(X \in (1, 2)) + \mathbb{P}(X \in (3, 4)) \\ &= (F_X(2) - F_X(1)) + (F_X(4) - F_X(3)) \\ &= \left(\frac{2}{10} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\right) \\ &= 0.2.\end{aligned}$$

Sisältö

Satunnaismuuttujan käsite

Jakauma ja kertymäfunktio

Jakauman tiheysfunktio

Monen muuttujan yhteisjakauma

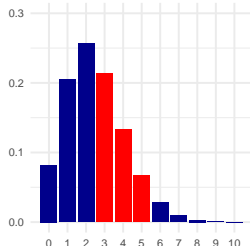
Ehdollinen jakauma

Esimerkkejä

Tiheysfunktio

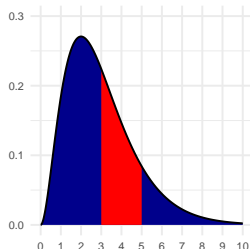
X on **diskreetti**, jos sen jakauma voidaan esittää funktion $f_X(x) \geq 0$ avulla muodossa

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} f_X(x).$$



X on **jatkuva**, jos sen jakauma voidaan esittää funktion $f_X(x) \geq 0$ avulla muodossa

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx.$$



Molemmissa tapauksissa funktiota f_X voidaan kutsua X :n **tiheysfunktiksi** (tf). Alaindeksi X voidaan jättää pois jos siitä ei tule sekaannusta.

Diskreetin jakauman tiheysfunktio

Diskreetin satunnaismuuttujan tiheysfunktio voidaan kirjoittaa muodossa $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ ja se toteuttaa ehdot

$$f_X(x) \geq 0 \quad \text{ja} \quad \sum_x f_X(x) = 1.$$

Vastaavasti mikä tahansa yo. ehdot toteuttava funktio on jonkin diskreetin jakauman tiheysfunktio.

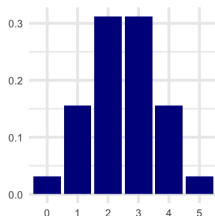
Diskreetin satunnaismuuttujan tiheysfunktion arvoja kutsutaan myös **pistetodennäköisyyksiksi** (= todennäköisyys, että sm:n arvo osuu tiettyyn pisteeseen).

Diskreetin jakauman tiheysfunktio

Kun satunnaismuuttujan arvojoukko on pieni, jakauman voi esittää taulukkona, jossa on sm:n kaikki mahdolliset arvot ja niiden tn:t.

Esim (Kruunien lukumäärä 5:llä kolikonheitolla)

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$



Suuren arvojoukon tapauksessa jakauma kannattaa esittää tiheysfunktion avulla jonkinlaisena lausekkeena.

Esim (Kruunien lukumäärä $n = 5\,000\,000$:lla kolikonheitolla)

$$f_X(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Tämä on **binomijakauma** parametreilla $n = 5\,000\,000$ ja $p = \frac{1}{2}$.

Jatkuvan jakauman tiheysfunktio

Jatkuvan jakauman tiheysfunktio toteuttaa ehdot

$$f_X(x) \geq 0 \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1,$$

Vastaavasti mikä tahansa yo. ehdot toteuttava funktio on jonkin jatkuvan jakauman tiheysfunktio.

Jatkuvan jakauman tiheysfunktioita *ei* voi kirjoittaa pistetodennäköisyyksien avulla, sillä $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Jatkuva tiheysfunktio ilmaisee, millä *tiheydellä* todennäköisyyttä ("massaa") on pisteen x ympäristössä. Jos f_X on jatkuva x :n ympärillä ja $h > 0$ on pieni, niin

$$\mathbb{P}(X = x \pm h/2) \approx f_X(x) \cdot h$$

(Huom. Tiheysfunktion arvo voi olla miten suuri tahansa, kunhan se on sitä vain lyhyellä välillä.)

Kertymäfunktio ja tiheysfunktio

Jatkuvan satunnaisluvun

- kertymäfunktio saadaan tiheysfunktion **integraalina**

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

- tiheysfunktio saadaan kertymäfunktion **derivaattana**

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

kertymäfunktion derivoituvuuspisteissä.

Esim. Jatkuva tasajakauma

Funktio

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < t < b, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$



on erään jatkuvan jakauman tiheysfunktio: lukuvälin $[a, b]$ **jatkuva tasajakauma**.

Kertymäfunktio saadaan integraalina

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds = \begin{cases} 0, & t < a, \\ \frac{t-a}{b-a}, & a \leq t \leq b, \\ 1, & t > b. \end{cases}$$



Sijoittamalla $a = 0$ ja $b = 10$ saadaan metron odotusajan jakauma.

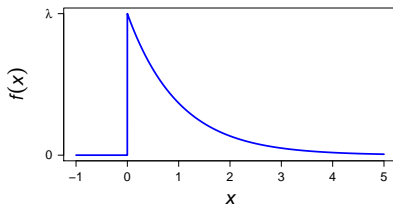
Eksponttijakauma

Tyypillinen käyttö: Ilmiö, jota tapahtuu toistuvasti satunnaisin väliajoin, keskimäärin λ kertaa aikayksikössä. Odotusaika on eksponenttijakautunut. (Esim. hyönteisiä tuulilasiin tai alkeishiukkasten hajoamisia.)

Eksponttijakauman parametrilla

$\lambda > 0$ tiheysfunktio on

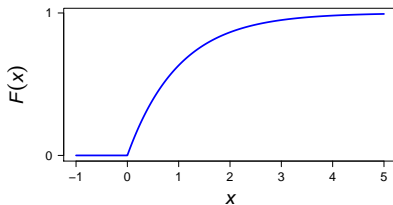
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



Integroimalla tiheysfunktioita

\implies kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$



Eksponenttijakauman muistittomuus

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > s + t | X > s) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t \text{ ja } X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t)\end{aligned}$$

Siis $\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$ kaikilla $s, t \geq 0$.

Tulkinta

Riippumatta siitä onko edellisen hyönteisen jälkeen ajettu 1 vai 5 minuuttia, on odotusaika seuraavaan hyönteiseen edelleen samalla tavoin eksponenttijakautunut.

Satunnaisluvut — yhteenveto

Diskreetti jakauma

X :n arvot sisältyvät äärelliseen tai numeroituvasti äärettömään arvojoukkoon

$$\mathbb{P}(X = x) = f_X(x)$$

Jakauma määräytyy tiheysfunktioista kaavalla

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} f_X(x)$$

Tiheysfunktion arvot ovat tarkkoja todennäköisyyksiä

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

Jatkuva jakauma

X :n arvot sisältyvät ylinumeroituvasti äärettömään lukujoukkoon

$$\mathbb{P}(X = x) = 0 \text{ kaikilla } x$$

Jakauma määräytyy tiheysfunktioista kaavalla

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx$$

Tiheysfunktion arvot ovat suhteellisia likiarvoisia todennäköisyyksiä

$$f_X(x) \approx h^{-1} \mathbb{P}(X = x \pm h/2)$$

Sisältö

Satunnaismuuttujan käsite

Jakauma ja kertymäfunktio

Jakauman tiheysfunktio

Monen muuttujan yhteisjakauma

Ehdollinen jakauma

Esimerkkejä

Satunnaismuuttujien yhteisjakauma

Samaan satunnaisilmiöön liittyvien satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma on taulukko tai funktio, josta voidaan määrittää parin (X, Y) mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet.

Esim (Kaksi noppaa)

Noppien silmälukujen X_1 ja X_2 yhteisjakauma on

	X_2					
X_1	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

eli tulojoukon $\{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$ tasajakauma.

Ensimmäisen nopan ja noppien maksimin yhteisjakauma

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, M = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{36}$$

Yleisesti:

- $k < i \implies \mathbb{P}(X_1 = i, M = k) = 0$
- $k = i \implies \mathbb{P}(X_1 = i, M = k) = \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 \leq i) = \frac{k}{36}$
- $k > i \implies \mathbb{P}(X_1 = i, M = k) = \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = k) = \frac{1}{36}$

Satunnaismuuttujien X_1 ja M yhteisjakauma:

	<hr/> M <hr/>					
X_1	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$

Indikaattorifunktio

Joukon A **indikaattorifunktio** määritellään kaavalla

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Sen avulla voidaan yhden muuttujan jakaumien esityskaavat kirjoittaa muodossa

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in S_X} 1_A(x) f_X(x)$$

ja

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(x) f_X(x) dx.$$

Diskreetti ja jatkuva yhteisjakauma

Satunnaismuuttujilla X ja Y on **diskreetti yhteisjakauma**, jos niiden todennäköisyydet voidaan esittää funktion $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ avulla muodossa

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} 1_A(x, y) f_{X,Y}(x, y),$$

missä joukot S_X ja S_Y ovat numeroituvia, ja **jatkuva yhteisjakauma**, jos niiden todennäköisyydet voidaan esittää funktion $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ avulla muodossa

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Yhteisjakauman reunajakaumat

Rivi- ja sarakesummia kutsutaan yhteisjakauman **reunajakaumiksi**.

X_1	M						Yht
	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{6}$
Yht	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

Rivisummista saadaan X_1 :n jakauma

Sarakesummista saadaan M :n jakauma

Silmälukujen yhteisjakauman reunajakaumat

		X_2						
X_1	1	2	3	4	5	6	Yht	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	
Yht	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		

Rivisummista saadaan X_1 :n jakauma

Sarakesummista saadaan X_2 :n jakauma

Reunajakaumat

Diskreettiä yhteisjakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien X ja Y tiheysfunktiot saadaan yhteisjakauman tiheysfunktioista kaavoilla

$$f_X(x) = \sum_{y \in S_Y} f_{X,Y}(x, y)$$
$$f_Y(y) = \sum_{x \in S_X} f_{X,Y}(x, y).$$

Jatkuvan yhteisjakauman tapauksessa

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx.$$

Esim. Yksikköneliön tasajakauma

Yksikköneliön $(0, 1)^2$ tasajakaumaa noudattavan satunnaisvektorin (U_1, U_2) tiheysfunktio on

$$f_{U_1, U_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x_1 \in (0, 1) \text{ ja } x_2 \in (0, 1), \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Yhteisjakauman reunatiheysfunktiot ovat

$$f_{U_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_1, U_2}(x_1, x_2) dx_2 = \begin{cases} 1, & \text{kun } x_1 \in (0, 1), \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

$$f_{U_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_1, U_2}(x_1, x_2) dx_1 = \begin{cases} 1, & \text{kun } x_2 \in (0, 1), \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

U_1 ja U_2 noudattavat siis välin $(0, 1)$ tasajakaumaa.

Sisältö

Satunnaismuuttujan käsite

Jakauma ja kertymäfunktio

Jakauman tiheysfunktio

Monen muuttujan yhteisjakauma

Ehdollinen jakauma

Esimerkkejä

Ehdolliset jakaumat

Y :n ehdollinen tiheysfunktio X :n suhteen määritellään kaavalla

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}.$$

Diskreetissä tapauksessa $f_{Y|X}(y|x) \geq 0$ ja $\sum_{y \in S_Y} f_{Y|X}(y|x) = 1$,

Jatkuvassa tapauksessa $f_{Y|X}(y|x) \geq 0$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) dy = 1$.
 $\implies y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ on yhden muuttujan jakauman tiheysfunktio.

Tulkinta diskreetille:

$$f_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y = y | X = x).$$

Tulkinta jatkuvalle: yhteisjakauman tiheysfunktion jatkuvuuspisteissä pienillä $h > 0$ arvoilla pätee

$$f_{Y|X}(y|x) \approx \frac{\mathbb{P}(Y = y \pm h/2 | X = x \pm h/2)}{h}.$$

Satunnaismuuttujien riippuvuus ja riippumattomuus

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat **stokastisesti riippumattomat**, jos kaikilla A, B pätee

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

Yhtäpitävästi:

$$\mathbb{P}(Y \in B | X \in A) = \mathbb{P}(Y \in B)$$

tai

$$\mathbb{P}(X \in A | Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Tapahtuma $X \in A$ ei sisällä mitään informaatiota, josta olisi hyötyä Y :n arvon ennustamiseen.

Jos tapahtumat eivät ole riippumattomat, niin ne ovat (stokastisesti) **riippuvat**. Silloin Y :n ehdollinen jakauma on erilainen eri X :n arvoilla.

Satunnaismuuttujien riippuvuus ja riippumattomuus

Fakta

Diskreettiä tai jatkuvaa yhteisjakaumaa noudattavat satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomat jos ja vain niiden yhteisjakauman tiheysfunktio voidaan esittää muodossa

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Tämä vastaa ehtoa

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y),$$

eli Y :n ehdollinen jakauma X :n suhteen on sama kuin Y :n jakauma sellaisenaan.

Esim. Satunnaisotanta

Kuinka moni opiskelijoista katsoi viime to *Salatut elämät*?

- $S =$ "Kaikki opiskelijat", $\#S = 80$
- $A =$ "Salkkarit katsoneet opiskelijat", $\#A = 3$.

($\#A$ olisi käytännön tilanteessa tuntematon)

Haastatellaan satunnaiset $n = 2$ opiskelijaa ja merkitään

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{jos 1. haastateltu opiskelija} \in A \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{jos 2. haastateltu opiskelija} \in A \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Mikä on X_1 :n ja X_2 :n yhteisjakauma?

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = ?$$

Satunnaisotanta palauttaen ja palauttamatta

- Palauttaen = toinen opiskelija valitaan taas koko joukosta
- Palauttamatta = toinen opiskelija valitaan jäljelläolevista

Palauttaen			
	X_2		
X_1	0	1	Yht
0	$\frac{77}{80} \times \frac{77}{80}$	$\frac{77}{80} \times \frac{3}{80}$	$\frac{77}{80}$
1	$\frac{3}{80} \times \frac{77}{80}$	$\frac{3}{80} \times \frac{3}{80}$	$\frac{3}{80}$
Yht	$\frac{77}{80}$	$\frac{3}{80}$	

Palauttamatta			
	X_2		
X_1	0	1	Yht
0	$\frac{77}{80} \times \frac{76}{79}$	$\frac{77}{80} \times \frac{3}{79}$	$\frac{77}{80}$
1	$\frac{3}{80} \times \frac{77}{79}$	$\frac{3}{80} \times \frac{2}{79}$	$\frac{3}{80}$
Yht	$\frac{77}{80}$	$\frac{3}{80}$	

Molemmissa tapauksissa saadaan samat reunajakaumat.

Yhteisjakaumaan vaikuttaa, miten otanta suoritetaan.

Satunnaisotanta palauttaen ja palauttamatta

Palauttaen

		X_2		
		0	1	Yht
X_1				
0		$\frac{77}{80} \times \frac{77}{80}$	$\frac{77}{80} \times \frac{3}{80}$	$\frac{77}{80}$
1		$\frac{3}{80} \times \frac{77}{80}$	$\frac{3}{80} \times \frac{3}{80}$	$\frac{3}{80}$
Yht		$\frac{77}{80}$	$\frac{3}{80}$	

$$f_{X_1, X_2}(i, j) = f_{X_1}(i)f_{X_2}(j)$$

Palauttamatta

		X_2		
		0	1	Yht
X_1				
0		$\frac{77}{80} \times \frac{76}{79}$	$\frac{77}{80} \times \frac{3}{79}$	$\frac{77}{80}$
1		$\frac{3}{80} \times \frac{77}{79}$	$\frac{3}{80} \times \frac{2}{79}$	$\frac{3}{80}$
Yht		$\frac{77}{80}$	$\frac{3}{80}$	

$$f_{X_1, X_2}(i, j) \neq f_{X_1}(i)f_{X_2}(j)$$

Molemmissa tapauksissa saadaan samat reunajakaumat.

Satunnaisotannassa palauttaen ovat X_1 ja X_2 riippumattomat.

Satunnaisotannassa palauttamatta X_1 ja X_2 ovat riippuvat.

Esim. Satunnaisotanta palauttaen

Mikä on satunnaismuuttujan X_2 ehdollinen jakauma tapahtuman $\{X_1 = 0\}$ sattuessa?

	X_2		
X_1	0	1	Yht
0	$\frac{77}{80} \times \frac{77}{80}$	$\frac{77}{80} \times \frac{3}{80}$	$\frac{77}{80}$
1	$\frac{3}{80} \times \frac{77}{80}$	$\frac{3}{80} \times \frac{3}{80}$	$\frac{3}{80}$
Yht	$\frac{77}{80}$	$\frac{3}{80}$	

$$f_{X_2|X_1}(0|0) = \frac{\frac{77}{80} \times \frac{77}{80}}{\frac{77}{80}} = \frac{77}{80}.$$

$$f_{X_2|X_1}(1|0) = \frac{\frac{77}{80} \times \frac{3}{80}}{\frac{77}{80}} = \frac{3}{80}.$$

Tässä tapauksessa X_2 :n ehdollinen jakauma tapahtuman $\{X_1 = 0\}$ sattuessa on sama kuin X_2 :n ehdoton jakauma.

Esim. Satunnaisotanta palauttamatta

Mikä on satunnaismuuttujan X_2 ehdollinen jakauma tapahtuman $\{X_1 = 0\}$ sattuessa?

		X_2		
		0	1	Yht
X_1	0	$\frac{77}{80} \times \frac{76}{79}$	$\frac{77}{80} \times \frac{3}{79}$	$\frac{77}{80}$
	1	$\frac{3}{80} \times \frac{77}{79}$	$\frac{3}{80} \times \frac{2}{79}$	$\frac{3}{80}$
Yht		$\frac{77}{80}$	$\frac{3}{80}$	

$$f_{X_2|X_1}(0|0) = \frac{\frac{77}{80} \times \frac{76}{79}}{\frac{77}{80}} = \frac{76}{79}.$$

$$f_{X_2|X_1}(1|0) = \frac{\frac{77}{80} \times \frac{3}{79}}{\frac{77}{80}} = \frac{3}{79}.$$

Tässä tapauksessa X_2 :n ehdollinen jakauma tapahtuman $\{X_1 = 0\}$ sattuessa on eri kuin X_2 :n ehdoton jakauma.

Sisältö

Satunnaismuuttujan käsite

Jakauma ja kertymäfunktio

Jakauman tiheysfunktio

Monen muuttujan yhteisjakauma

Ehdollinen jakauma

Esimerkkejä

Ääretön diskreetti arvojoukko

Diskreetin sm:n mahdollisten arvojen joukko voi olla **ääretön**.

Esim (Kimblen alkuvaihe)

N = nopanheittojen lukumäärä, kunnes saadaan kuutonen.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(X_1 \neq 6, \dots, X_{k-1} \neq 6, X_k = 6) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \neq 6) \cdots \mathbb{P}(X_{k-1} \neq 6) \mathbb{P}(X_k = 6) \\ &= \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)\end{aligned}$$

Satunnaismuuttuja N noudattaa äärettömän arvojoukon $\{1, 2, \dots\}$ **geometrista jakaumaa** onnistumistodennäköisyytenä $p = \frac{1}{6}$. Tämä on numeroituvasti äärettömän joukon diskreetti jakauma, tiheysfunktiona

$$f_N(k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Esimerkki: Metron odotusaika

Y = odotusaika (min) asemalla, jonne metroja saapuu 10 min välein, ja jossa metrot pysähtyvät 1 min ajan. Y :n jakauma = ?

X = aika (min) edellisen metron saapumisesta noudattaa välin $[0, 10]$ tasajakaumaa. Kun $t \in [0, 9]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq t) &= \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(0 < Y \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X \leq 1) + \mathbb{P}(0 < 10 - X < t).\end{aligned}$$

$$\implies F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{10} + \frac{t}{10}, & 0 \leq t \leq 9, \\ 1, & t > 9. \end{cases}$$

Onko Y :n jakauma diskreetti vai jatkuva?

- Y saa arvoja jatkuvalla välillä $[0, 9] \implies$ ei diskreetti
- $\mathbb{P}(Y = 0) > 0 \implies$ ei jatkuva

Esimerkki: Metron odotusaika

Y = odotusaika (min) asemalla, jonne metroja saapuu 10 min välein, ja jossa metrot pysähtyvät 1 min ajan.

Kertymäfunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$F_Y(t) = \frac{1}{10}F_{Y_0}(t) + \frac{9}{10}F_{Y_1}(t),$$

missä

$$F_{Y_0}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \quad F_{Y_1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{t}{9}, & 0 \leq t < 9, \\ 1, & t \geq 9, \end{cases}$$

Y :n jakauma on *diskreetin ja jatkuvan jakauman sekoitus*:

- Y_0 on diskreetti sm, joka varmuudella saa arvon 0
(Y :n jakauma ehdolla, että metro on odottamassa asemalla)
- Y_1 on jatkuva sm, joka noudattaa välin $[0, 9]$ tasajakaumaa
(Y :n jakauma ehdolla, että metroa joudutaan odottamaan)

Seuraavalla kerralla puhutaan satunnaismuuttujien odotusarvoista. . .