MS-A0504 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi

3B Tilastolliset datajoukot

Jukka Kohonen

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Perustieteiden korkeakoulu
Aalto-yliopisto

Lukuvuosi 2021–2022
Periodi IV

Sisältö

Mitä tilastotiede on?

- Tilastotiede soveltaa ja kehittää menetelmiä, joita voidaan käyttää tutkittaessa reaalimaailman ilmiöitä, joiden tietoihin liittyy satunnaisuutta tai epävarmuutta.
  - Epävarmuuden lähteitä on monta: Fysikaalinen satunnaisuus, vajaa tietämys ilmiön lainalaisuuksista, satunnaisotanta, mittausvirheet, puuttuva data ...
  - Menetelmät perustuvat todennäköisyysteorian lainalaisuuksiin.

- Karkea luonnehdinta:
  - Tn-teoria kertoo, miten jokin prosessi tuottaa dataa.
  - Tilastotiede kertoo, mistä prosessista jokin data on syntynyt.

- Tilastotiedettä voidaan soveltaa aina, kun saatavilla on kvantifioitavaa dataa.
  - Mikä tahansa datajoukko, joka kuvaa jotakin reaalimaailman ilmiötä on potentiaalinen tilastotieteen tutkimuskohde.

Kaksi näkökulmaa tilastotieteeseen

- Datan kuvailemisen (engl. *descriptive statistics*) menetelmiä
  - Taulukot ("raaka data")
  - Erilaiset kuvat
  - Tunnusluvut, numeeriset "yhteenvedot" (esim. keskiarvo, kvantiilit, korrelaatio)

- Tilastollisen päättelyn (engl. *statistical inference*) menetelmiä, joilla pyritään yleistämään havaitun datan ulkopuolelle (koko populaatioon tai universaaliin lakiin)
  - Stokastiset mallit
  - Parametrien estimointi
  - Merkitsevyyden testaus

Sisältö

Tilastollinen data

Tilastollisen analyysin kohteena oleva data on usein tapana tallettaa taulukkoon eli datakehikkoon (“data frame”), jonka

- rivit vastaavat kohteesta tehtyjä havaintoja
- sarakkeet vastaavat tutkittavan ilmiön muuttujia

Muuttujat voivat olla laadullisia tai määrällisiä

- laadullisen muuttujan arvot jaotellaan luokkiin (esim. ’aurinkoista’, ’sateista’, ’pilvistä’)
- määrällisen muuttujan arvot ovat lukuja

Erilaisia mitta-asteikkoja

- luokka-asteikko (nominaaliasteikko): vain joukko eri arvoja
  sukupuoli: {mies, nainen}

  pääaine: {matematiikka, fysiikka, kemia}
- järjestysasteikko: luokilla on mielekäs järjestys
  vaatekoko: { XS $<$ S $<$ M $<$ L $<$ XL }
  Likert-asteikko:

  {täysin eri mieltä $<$ eri mieltä $<$ neutraali $<$ samaa mieltä $<$ täysin s. m.
  }
- numeerinen: muuttujan arvoilla on aritmeettinen merkitys
  - intervalliasteikko: erotuksilla $x - y$ on merkitystä
    päivämäärät, Celsius-lämpötila
  - suhdeasteikko: myös osamäärät x/y ovat mielekkäitä
    pituus, paino, etäisyys, Kelvin-lämpötila

- Kaikki muuttujat voi *esittää* lukuina, esim. mat=1, fys=2, kem=3, mutta aritmetiikka ei aina ole mielekästä.
- luokka-asteikko="laatuasteikko" ($\neq$ "laadullinen tutkimus")
- tämä ei täysin vastaa erottelua diskreetti/jatkuva. Numeerinen data voi hyvin olla diskreettiä (esim. jonkun lukumäärät)

Datajoukko

Datajoukko = Järjestetty lista keskenään samantyyppisiä alkioita, esim. lukuja, merkkijonoja tai näistä muodostettuja listoja

Esim. Kurssipalaute: ((12345A, 5, 1, 5), (98759K, 1, 5, 2), (33312K, 4, 4, 3), (23453B, 4, 4, 3), (21453U, 3, 3, 3))

Yksi merkkijonoarvoinen muuttuja (opiskelijanumero) ja kolme lukuarvoista muuttujaa (yleisarvio, työläys, hyödyllisyys)

Opiskelijanumero	Yleisarvio	Työläys	Hyödyllisyys
12345A	5	1	5
98759K	1	5	2
33312K	4	4	3
23453B	4	4	3
21453U	3	3	5

5 havaintoyksikköä, 4 muuttujaa

Datajoukon keskiarvo ja keskihajonta

Lukuarvoinen yhden muuttujan datajoukko $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

Keskiarvo $m(\vec{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Varianssi $\mathrm{var}(\vec{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m(\vec{x}))^2$

Keskihajonta $\mathrm{sd}(\vec{x}) = \sqrt{\mathrm{var}(\vec{x})}$

Esim. $\vec{y} = (0, 0, 1, 1, 2, 2)$

$$m(\vec{y}) \;=\; \frac{1}{6}\Big(0+0+1+1+2+2\Big) \;=\; 1$$

$$\mathrm{var}(\vec{y}) \;=\; \frac{1}{6}\Big((0-1)^2+(0-1)^2+(1-1)^2+(1-1)^2+(2-1)^2+(2-1)^2\Big) \;=\; \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{sd}(\vec{y}) \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}} \;\approx\; 0.8165$$

Huom: Joskus varianssin laskennassa käytetään jakajaa $n-1$ eikä n. Tämä liittyy tilanteeseen, jossa datan varianssilla halutaan estimoida suuremman populaation varianssia. Tästä lisää myöhemmin.

Esimerkki

Laske keskiarvo ja keskihajonta seuraaville datajoukoille:

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= (1,1,1,1,1),\\
\vec{y} &= (0,0,1,1,2,2),\\
\vec{z} &= (0,2,0,2,0,2,0,2,0,2),\\
\vec{w} &= (\underbrace{0,0,0,0,\ldots,0,0,0,0}_{\text{666666 kpl}},1000000,\underbrace{0,0,\ldots,0,0}_{\text{333333 kpl}}).
\end{aligned}
$$

Datajoukko	Keskiarvo	Keskihajonta
$\vec{x}$	1	0.0000
$\vec{y}$	1	0.8165
$\vec{z}$	1	1.0000
$\vec{w}$	1	999.9995

Keskiarvo ja keskihajonta ovat datan *yhteenvetoja*, ja kertovat datasta vain jotakin, eivät kaikkea. (Kuten todennäköisyysjakaumissakin.)

Tunnuslukujen laskeminen

Merkintä	Nimitys	R	Python	Excel
$m(\vec{x})$	Keskiarvo	`mean()`	`np.mean()`	`AVERAGE()`
$\mathrm{sd}(\vec{x})$	Keskihajonta	`sqrt(1-1/n)*sd()`	`np.std()`	`STDEV.P()`
$\mathrm{sd}_s(\vec{x})$	Otoskeskihajonta	`sd()`	`np.std( ,ddof=1)`	`STDEV.S()`
$\mathrm{var}(\vec{x})$	Varianssi	`(1-1/n)*var()`	`np.var()`	`VAR.P()`
$\mathrm{var}_s(\vec{x})$	Otosvarianssi	`var()`	`np.var( ,ddof=1)`	`VAR.S()`
$\mathrm{cov}(\vec{x},\vec{y})$	Kovarianssi	`(1-1/n)*cov()`	`np.cov( ,ddof=0)[0][1]`	`COVARIANCE.P()`
$\mathrm{cov}_s(\vec{x},\vec{y})$	Otoskovarianssi	`cov()`	`np.cov( ,ddof=1)[0][1]`	`COVARIANCE.S()`
$\mathrm{cor}(\vec{x},\vec{y})$	Korrelaatio	`cor()`	`np.corrcoef()[0][1]`	`CORREL()`
$q_{0.5}(\vec{x})$	Mediaani	`median()`	`np.median()`	`MEDIAN()`
$q_{0.25}(\vec{x})$	Alakvartiili	`quantile( ,.25)`	`np.quantile( ,.25)`	`PERCENTILE.INC( ,.25)`
$q_{0.75}(\vec{x})$	Yläkvartiili	`quantile( ,.75)`	`np.quantile( ,.75)`	`PERCENTILE.INC( ,.75)`

$$\text{Otoskeskihajonta } \mathrm{sd}_s(\vec{x}) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/2} \mathrm{sd}(\vec{x})$$

Huom. Joissakin ohjelmissa voit itse valita, lasketaanko ns. varianssi vai otosvarianssi eli onko jakajana n vai $n-1$. Vaihtoehtoisesti luvun voi aina skaalata.

Sisältö

Esiintyvyystaulukko

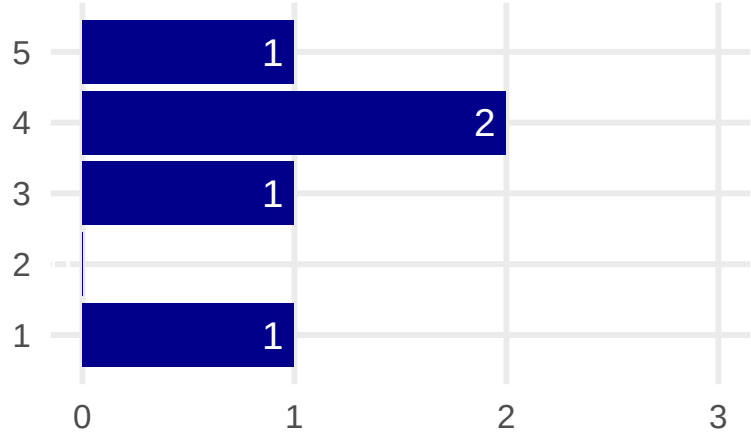
Arvon x esiintyvyys eli frekvenssi

$$n_{\vec{x}}(x) \;=\; \#\{i : x_i = x\}$$

on datajoukossa $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ arvoltaan x olevien alkioiden lukumäärä

Kurssipalautteen muuttujaa “Yleisarvio” vastaavan datajoukon $(5, 1, 4, 4, 3)$ esiintyvyystaulukko ja palkkikaavio:

x	1	2	3	4	5
$n_{\vec{x}}(x)$	1	0	1	2	1



Suhteelliset esiintyvyydet

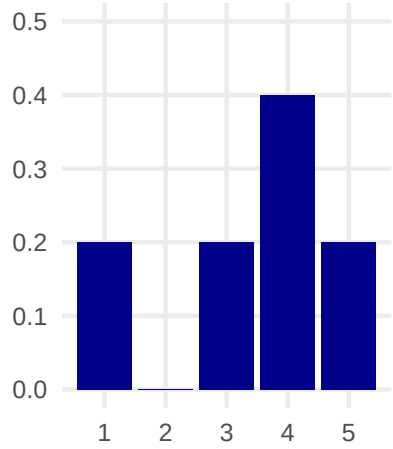
Arvon x suhteellinen esiintyvyys

$$f_{\vec{x}}(x) = \frac{n_{\vec{x}}(x)}{n} = \frac{\#\{i : x_i = x\}}{n}$$

on datajoukossa arvoltaan x olevien alkioiden suhteellinen osuus

Kurssipalautteen muuttujaa "Yleisarvio" vastaavan datajoukon $(5, 1, 4, 4, 3)$ esiintyvyystaulukko ja pylväskaavio (engl. *bar chart*):

x	1	2	3	4	5
$f_{\vec{x}}(x)$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$



Huomataan: $\sum_x f_{\vec{x}}(x) = 1 \implies f_{\vec{x}}(x)$ on eräs todennäköisyysjakauma!
$f_{\vec{x}}(x)$ on datajoukon $\vec{x}$ empiirinen jakauma.

Empiirinen jakauma

Lause

Datajoukosta $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *tasaisen satunnaisesti valittu alkio* X *on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa datajoukon* $\vec{x}$ *empiiristä jakaumaa tiheysfunktiona* $f_X(x) = f_{\vec{x}}(x)$ *ja toteuttaa*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= m(\vec{x}), && (1) \\ \mathrm{SD}(X) &= \mathrm{sd}(\vec{x}), && (2) \\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{var}(\vec{x}). && (3) \end{aligned}$$

Lisäksi mielivaltaiselle funktiolle g *pätee*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i). \quad (4)$$

Esimerkki

Määritä empiirinen jakauma ja laske sen avulla keskiarvo ja keskihajonta datajoukolle $\vec{y} = (0, 0, 1, 1, 2, 2)$.

Arvojen suhteelliset esiintyvyydet ovat

y	0	1	2
$f_{\vec{y}}(y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Tiheysfunktion $f_{\vec{y}}(y)$ mukaan jakautuneelle satunnaismuuttujalle Y pätee

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \sum_{y=0}^{2} y f_{\vec{y}}(y) \;=\; 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} \;=\; 1,$$

$$\mathrm{Var}(Y) \;=\; \sum_{y=0}^{2} (y-1)^2 f_{\vec{y}}(y) \;=\; (0-1)^2 \times \frac{1}{3} + (1-1)^2 \times \frac{1}{3} + (2-1)^2 \times \frac{1}{3} \;=\; \frac{2}{3}$$

$$\implies \; m(\vec{y}) = \mathbb{E}(Y) = 1$$

$$\implies \; \mathrm{sd}(\vec{y}) = \sqrt{\mathrm{var}(\vec{y})} = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \approx 0.8165$$

Sisältö

Luokittelu ja histogrammi

Esim. Suomalaisten ikärakenne 31.12.2015.
$n = 5\ 487\ 308$ miljoonaa datapistettä
Ei ole järkeä piirtää jokaista pistettä kuvaajaan
Jaetaan datapisteet luokkiin.

Ikä (v)	Lukumäärä
0–14	896 023
15–24	640 387
25–44	1 363 155
45–64	1 464 640
65–74	642 428
75–	480 675

Luokittelu ja histogrammi

Histogrammi piirretään yleensä näin:

- Yksi palkki per luokka
- Palkin leveys = luokkavälin leveys (yksikkönä vuosi)
- Palkin korkeus = datapisteiden suhteellinen osuus jaettuna palkin leveydellä (yksikkönä % per vuosi)

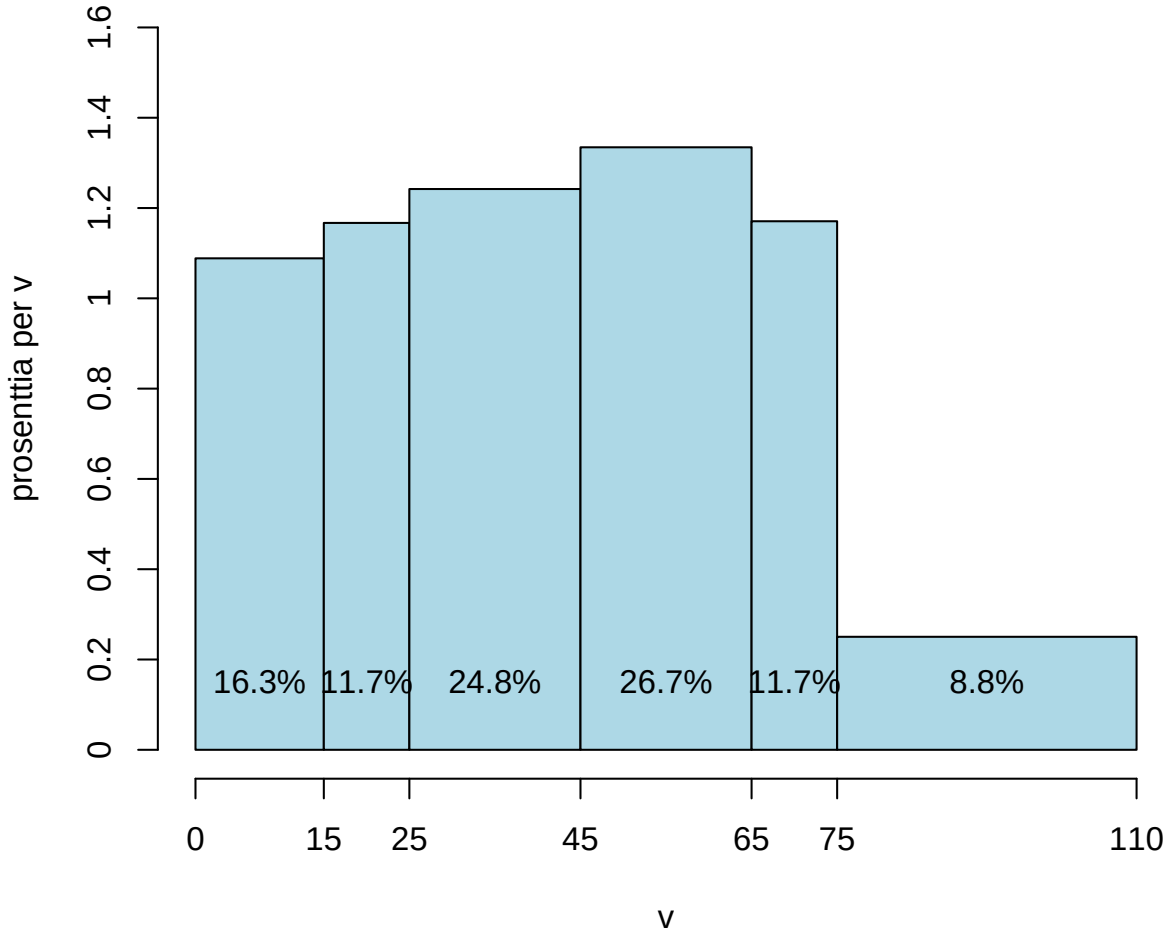
Esim: Suomalaiset

- 1. palkki käsittää suomalaiset, joiden ikä on 0–14 vuotta
- 1. palkin leveys = 15 v
- Datapisteiden lkm luokassa 1 on 896023 ja suhteellinen osuus $896023/5487308 \approx 16.3\%$
- Palkin korkeus = $16.3/15 \approx 1.09$ (yksikkönä % per vuosi).

Huom: Luokkavälit voivat olla samanlevyisiä, mutta niiden ei tarvitse olla.

Luokittelu ja histogrammi

Suomen väestörakenne ikäluokittain 31.12.2015 [Lähde: Tilastokeskus]



Ikä (v)	Lukumäärä
0–14	896 023
15–24	640 387
25–44	1 363 155
45–64	1 464 640
65–74	642 428
75–	480 675

Palkin leveys $\propto$ luokkavälin leveys. Entä jos palkit olisivat samanlevyisiä?
Arvioi mikä osuus väestöstä kuuluu ikäluokkaan 13–14 v.
Entä ikäluokkaan 109–110 v? Kuinka luotettavia arviot ovat?

Sisältö

Kahden muuttujan datajoukko

Kahden muuttujan datajoukko = järjestetty lista pareja

$$\vec{xy} = ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)).$$

Voidaan tulkita myös parina $(\vec{x}, \vec{y})$, jossa $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ ovat samankokoisia yhden muuttujan datajoukkoja

Kurssipalautteen muuttujat "Yleisarvio" ja "Hyödyllisyys" voidaan koostaa datajoukoksi ((5,5), (1,2), (4,3), (4,3), (3,3))

Tunnuslukuja: $m(\vec{x}), m(\vec{y}), \mathrm{sd}(\vec{x}), \mathrm{sd}(\vec{y})$
Nämä eivät kerro mitään muuttujien riippuvuuksista
Muuttujien yhteisvaihtelua kuvaavat kovarianssi ja korrelaatio.

$$\mathrm{cov}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m(\vec{x}))(y_i - m(\vec{y}))$$

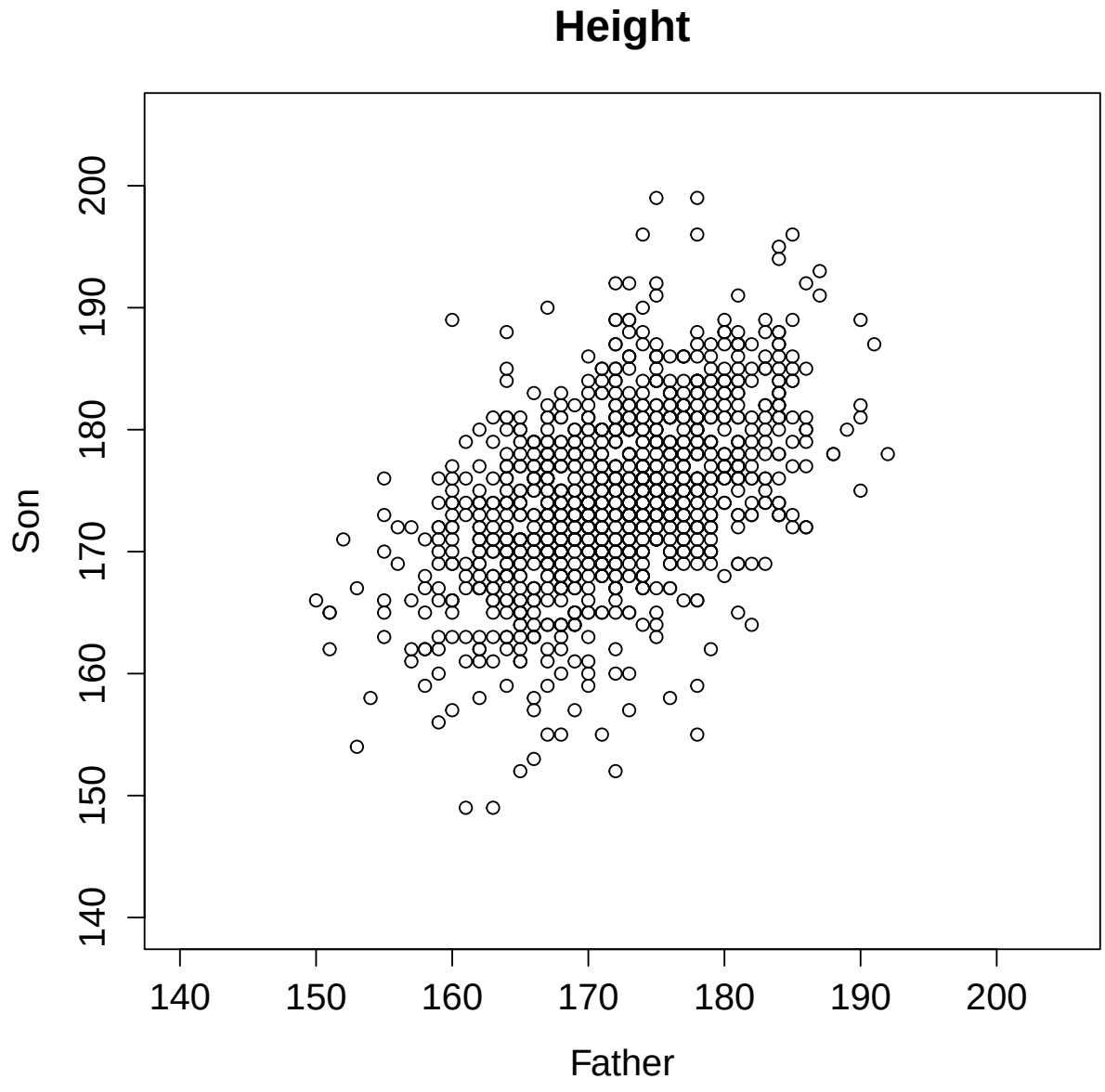
$$\mathrm{cor}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\mathrm{cov}(\vec{x}, \vec{y})}{\mathrm{sd}(\vec{x})\,\mathrm{sd}(\vec{y})}$$

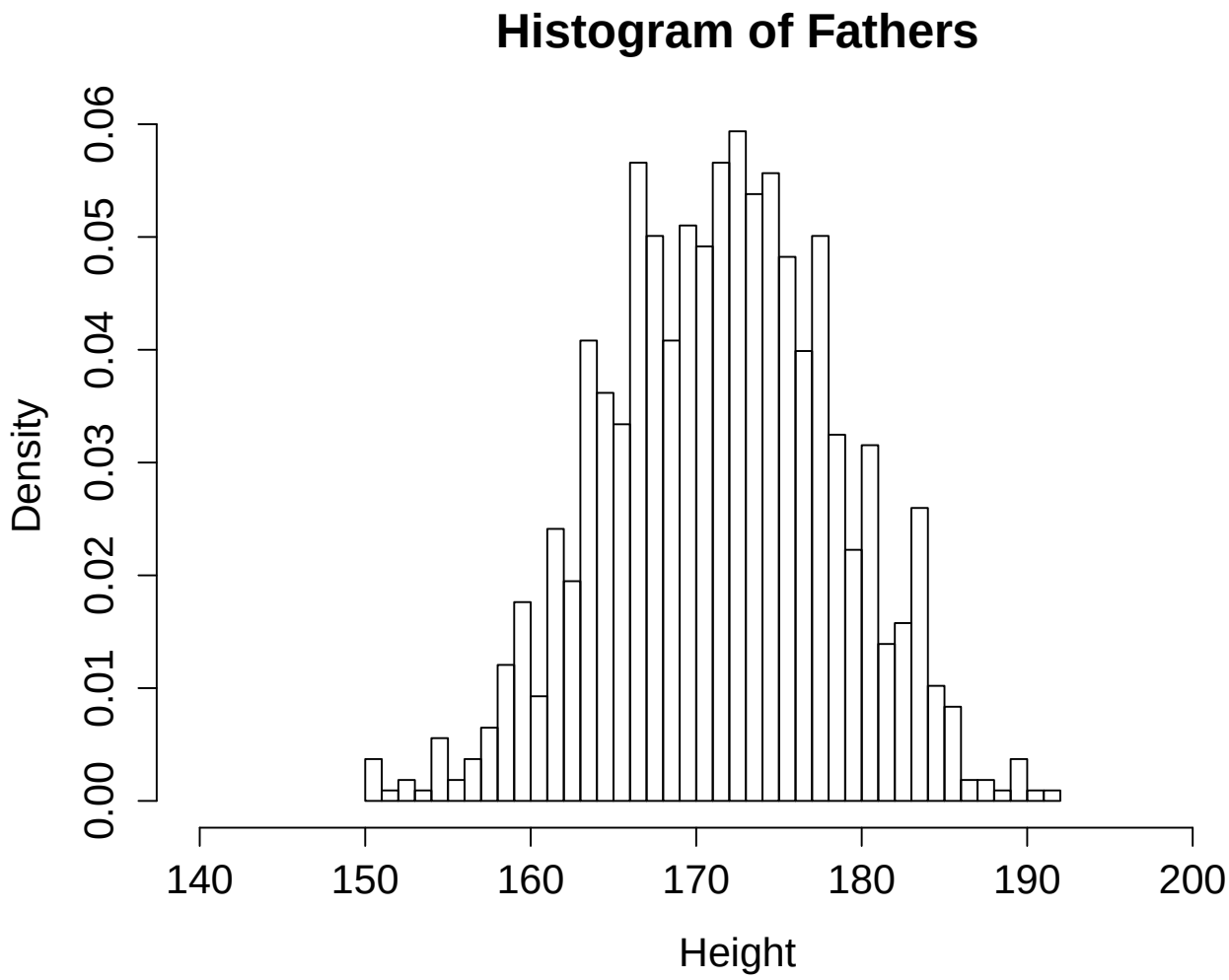
Esimerkki: Isien ja poikien pituudet

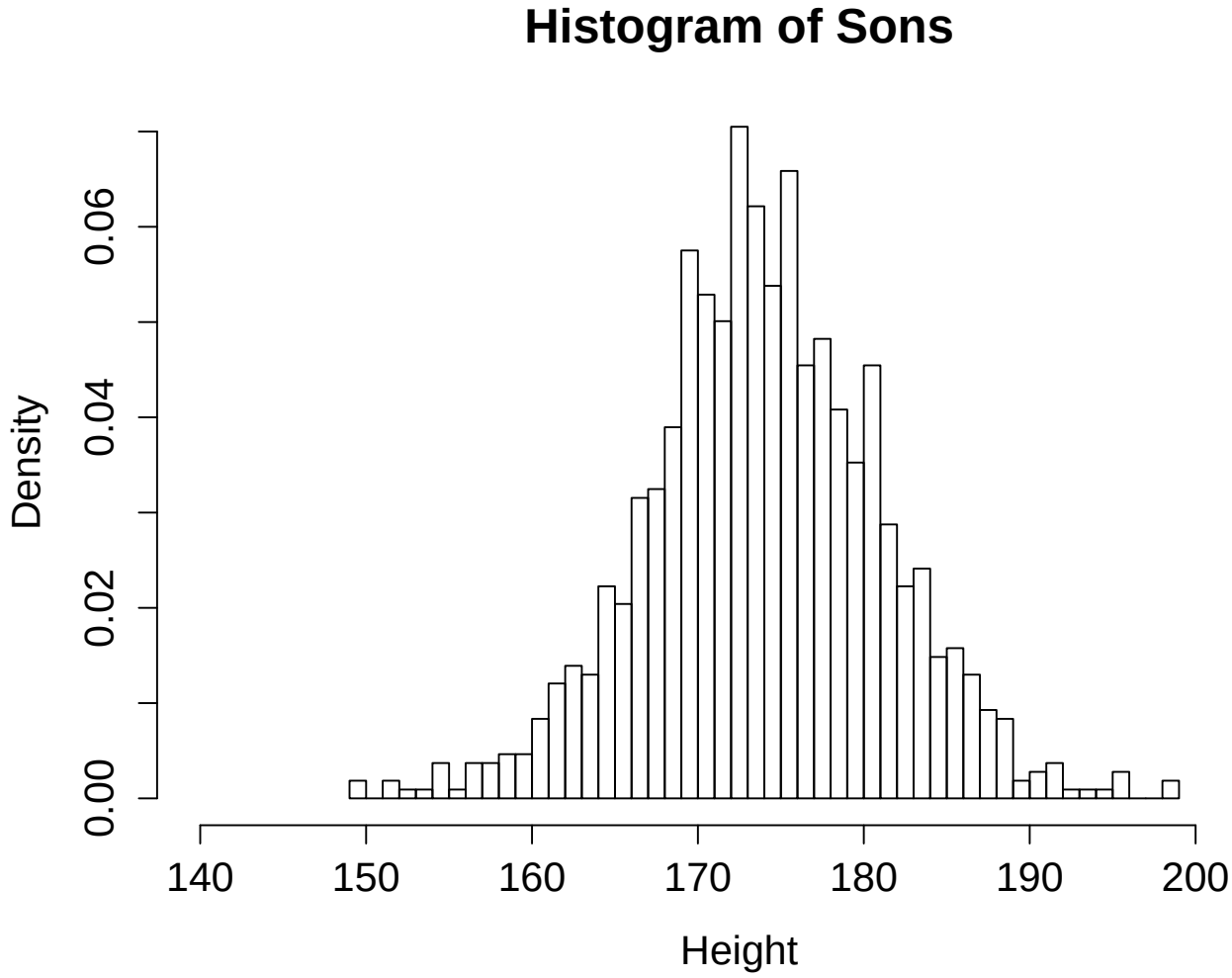
I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P
165	152	165	171	179	174	178	178	184	187	174	168	171	174	165	178	178	184	173	165	178	170	172	176	178	181	170	161	168	170	182	173	179	179	175	199	180	168	173	173
161	161	166	171	181	172	177	178	173	192	173	168	169	172	169	178	181	183	175	165	177	170	175	175	178	182	158	162	167	170	185	173	179	179	178	155	157	172	173	172
165	161	167	170	180	174	179	177	172	192	174	167	170	172	168	177	183	182	158	168	156	172	175	175	177	180	161	163	167	171	161	176	184	178	184	184	160	171	173	173
167	159	167	171	182	173	180	178	185	196	181	169	169	173	167	177	184	182	160	169	160	174	175	175	177	182	166	164	167	170	163	176	186	179	151	165	163	170	173	174
155	163	167	172	186	172	181	178	159	156	159	170	173	173	169	178	170	186	164	169	163	172	175	176	182	181	165	163	171	170	165	175	163	181	186	185	162	171	173	173
160	163	167	171	160	175	183	179	173	189	160	170	172	172	169	179	172	187	162	168	162	172	175	176	183	181	169	164	169	171	166	176	164	180	173	182	166	171	174	173
166	163	167	170	162	177	183	178	165	180	163	171	173	172	174	177	175	186	164	167	165	173	176	175	184	180	169	164	171	171	167	177	167	182	160	166	164	171	174	173
164	163	170	172	166	177	192	178	187	191	162	172	173	174	173	178	177	186	164	168	164	173	177	176	184	182	151	165	171	170	168	175	170	180	168	155	164	171	176	173
168	164	169	171	164	176	164	181	160	157	165	171	175	173	173	178	177	186	168	169	167	174	177	177	164	184	160	166	171	171	167	176	170	181	181	183	171	173	176	173
170	163	171	170	169	177	169	180	159	163	166	171	176	172	173	180	179	185	168	168	168	172	178	176	170	184	163	167	173	170	167	177	174	182	173	180	170	159	176	174
150	166	171	171	167	176	167	181	178	159	165	171	175	174	175	179	184	185	167	169	167	173	178	175	172	182	163	167	173	170	170	176	174	181	166	157	165	169	176	174
160	166	169	171	167	176	170	181	181	187	174	175	175	174	175	179	185	186	170	168	168	172	181	177	173	183	164	165	173	170	170	175	173	182	179	171	176	167	178	173
162	167	173	172	168	177	170	182	181	169	166	158	176	173	175	179	173	188	171	169	168	173	181	175	176	183	166	167	174	170	171	176	174	182	174	164	162	174	177	172
163	166	172	171	169	176	173	181	176	158	163	163	177	173	176	178	174	190	171	168	171	173	182	176	175	184	168	167	175	171	173	176	174	181	157	161	164	172	179	173
164	166	174	172	169	177	171	180	178	166	168	168	179	172	177	177	181	188	174	169	170	172	163	179	178	183	168	167	177	171	172	176	175	181	165	161	168	171	181	173
165	165	173	171	169	175	172	181	166	163	175	167	178	174	177	178	183	189	172	169	170	173	166	178	178	183	170	165	178	172	174	176	175	182	168	162	168	171	183	174
169	165	175	172	172	176	175	180	158	159	164	170	180	174	179	179	190	189	172	169	169	173	168	179	180	184	173	165	177	171	174	175	178	180	151	162	169	171	184	173
167	166	175	171	174	176	176	181	162	161	168	170	179	173	178	179	181	191	174	168	171	174	167	178	181	184	174	167	178	172	174	176	177	182	159	162	168	170	160	177
171	165	177	170	172	176	175	180	167	161	167	170	184	173	180	177	174	196	178	169	170	173	166	177	183	182	156	169	155	173	175	176	178	180	162	162	167	172	162	174
170	166	179	169	172	177	177	181	173	160	169	171	184	174	181	179	153	154	155	170	173	174	169	179	185	184	161	168	159	174	175	175	178	181	164	163	170	170	164	175
172	165	178	170	173	176	179	182	157	162	167	170	159	176	181	178	162	158	159	172	173	174	171	178	173	186	162	167	163	174	176	175	181	181	167	164	170	169	166	175
177	166	185	172	176	175	178	181	162	162	169	171	162	175	182	177	160	169	163	171	172	173	171	178	175	186	163	168	163	173	175	176	179	181	168	164	169	170	167	175
159	169	160	173	174	176	178	180	165	164	171	172	164	176	186	177	163	149	163	170	173	173	173	177	175	186	165	168	165	174	175	175	184	181	179	162	170	171	168	175
162	169	160	174	174	176	180	181	167	162	170	171	165	175	162	180	188	178	162	171	174	172	172	180	177	186	164	168	165	174	177	175	186	180	158	165	170	170	167	175
164	168	162	173	174	176	181	182	169	164	169	172	166	176	168	181	183	180	164	170	174	174	173	178	181	187	168	168	168	172	177	176	164	185	164	166	172	171	169	175
165	168	164	174	174	175	184	181	175	163	171	170	167	176	168	181	155	165	164	170	175	173	176	177	183	185	169	168	168	173	179	176	170	183	163	166	172	170	171	176
164	168	164	174	179	176	186	180	157	166	171	170	168	175	171	180	166	179	173	173	175	173	175	179	185	185	169	167	169	173	179	175	172	184	165	166	171	170	171	175
167	169	168	174	178	175	190	182	163	165	173	171	167	177	169	180	183	176	164	162	176	173	176	178	167	190	171	169	168	174	180	176	174	184	166	166	173	170	170	175
166	167	167	173	178	176	171	184	162	167	172	171	170	176	173	181	181	165	168	160	174	173	174	177	174	188	171	169	167	174	181	176	176	184	166	166	174	170	174	177
167	168	168	174	178	176	171	183	165	165	173	170	171	177	172	180	166	175	166	167	178	174	176	178	180	189	171	168	170	174	183	175	174	183	168	167	174	171	172	176
170	167	166	173	181	177	172	184	166	165	173	170	171	175	173	180	175	177	177	171	177	174	178	178	184	188	172	169	171	174	161	179	177	182	168	164	176	172	173	176
169	167	167	174	180	176	176	183	165	166	175	171	172	175	174	180	164	159	166	171	178	172	177	179	184	188	174	168	170	174	165	179	178	184	171	165	177	172	172	175
169	169	170	173	183	176	175	184	167	167	176	170	172	175	176	181	163	161	166	172	182	174	178	179	175	192	172	167	169	174	167	178	179	184	172	167	178	171	172	175
172	167	169	174	190	175	178	183	168	167	176	170	174	176	176	181	169	161	168	171	184	174	180	177	187	193	176	169	171	172	168	177	180	183	178	166	179	172	176	176
173	169	170	173	165	177	177	184	170	165	179	170	172	177	177	181	170	160	168	170	183	174	180	177	178	199	177	169	170	173	169	178	182	184	161	169	160	172	175	177
172	168	170	173	167	178	179	184	172	166	178	172	174	175	178	181	158	162	168	170	155	176	181	179	173	157	152	171	172	173	168	179	185	184	162	167	161	173	175	176
174	168	170	174	167	178	181	184	175	164	179	170	174	176	177	182	162	163	168	170	160	176	184	178	164	177	158	171	174	174	170	177	173	186	163	168	164	174	175	177
176	169	170	172	167	178	184	183	158	167	159	172	175	176	178	180	166	163	168	170	164	177	185	179	154	158	162	171	172	173	170	178	172	187	164	168	163	174	175	176
182	169	172	173	167	179	184	183	159	167	160	172	174	175	180	181	167	164	170	170	166	176	164	181	190	181	162	170	173	173	172	179	176	186	165	169	164	172	175	175
159	171	173	173	171	179	172	185	162	169	161	174	176	176	179	181	168	163	170	170	165	177	165	181	179	182	164	170	172	174	173	178	179	186	167	169	164	174	178	175
164	171	172	173	171	177	173	186	166	169	162	174	174	176	184	181	172	162	171	172	166	176	167	180	155	166	164	170	175	172	174	177	181	187	167	169	168	173	179	176
164	170	174	172	172	179	175	185	164	169	164	174	174	175	182	180	153	167	171	172	167	176	171	180	166	183	166	170	176	174	173	178	184	187	168	168	167	173	178	175
162	170	172	174	174	178	178	186	167	168	165	174	177	176	185	181	160	165	171	172	168	175	171	180	181	181	165	173	176	174	176	179	183	185	171	169	167	173	177	175
166	170	175	173	174	177	182	187	168	168	167	174	179	175	168	183	161	167	173	171	171	176	172	182	182	164	176	171	176	174	176	178	164	188	169	168	167	173	181	176
165	170	176	173	173	180	180	185	168	169	168	174	178	175	171	183	165	164	174	170	169	175	173	182	159	166	172	160	175	173	174	179	172	189	169	168	169	173	181	177
167	176	175	173	176	178	183	186	167	169	169	173	178	176	172	183	165	165	172	170	171	175	174	180	181	177	165	171	177	174	175	179	178	188	170	169	170	174	185	177
174	175	176	174	175	178	160	189	171	168	166	173	181	176	175	182	165	165	173	170	171	176	172	180	169	165	176	175	177	173	177	179	180	188	173	168	170	174	166	179
169	157	176	173	176	178	173	189	170	169	170	173	181	177	176	183	168	167	175	171	173	175	176	182	171	155	165	170	178	172	177	177	185	189	172	168	171	174	168	178
165	167	174	174	176	179	178	187	171	169	170	173	184	176	177	183	168	166	175	171	172	175	176	181	159	160	165	171	179	173	179	179	175	191	174	167	170	174	166	179
177	175	177	173	177	177	180	188	172	167	170	174	164	178	178	184	169	165	179	172	173	175	176	182	165	162	167	171	184	173	181	179	184	194	176	167	170	172	167	179

Taulukko: 1000 havaintoparia Pearsonin isä-poika pituusaineistosta.

Hajontakuvio (scatterplot)

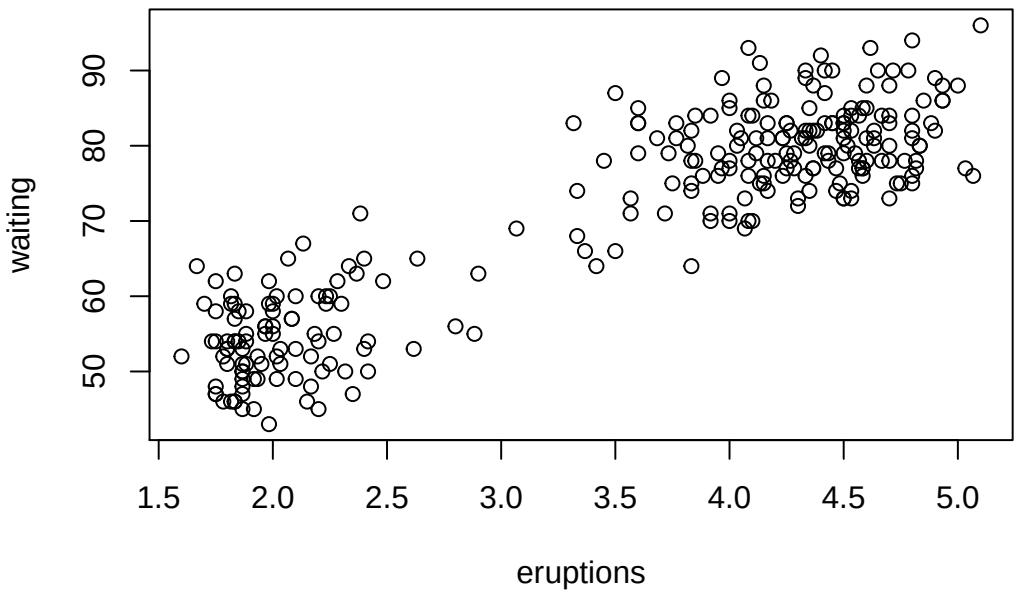



Histogram of Fathers
Density
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
140
150
160
170
180
190
200
Height


Histogram of Sons
Density
0.00
0.02
0.04
0.06
140
150
160
170
180
190
200
Height

Esimerkki: Old Faithful -geysirin purkaukset

Hajontakuvio, 272 purkausta, *Old Faithful* (Yellowstone).
2 muuttujaa: Purkauksen kesto ja väliaika seuraavaan purkaukseen.



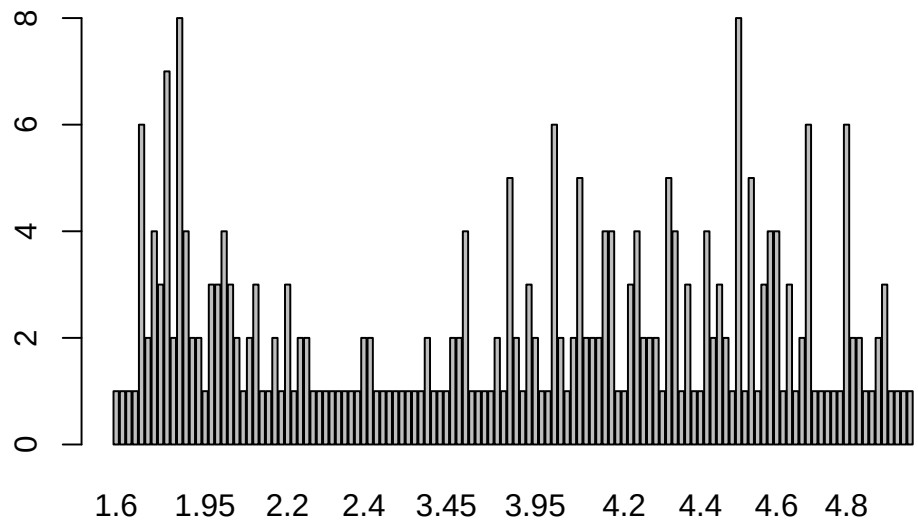
Datan silmäilystä (*eyeballing*) on hyvä aloittaa, jo se voi paljastaa ilmiön olennaisia piirteitä.

Kokeile R:ssä `faithful` ja `help("faithful")`

Old Faithful: yhden muuttujan pylväskaavio...

Yritetään laskea montako kertaa kukin *eri arvo* esiintyy (purkauksen pituudessa) ja piirretään lukumääristä pylväskaavoi

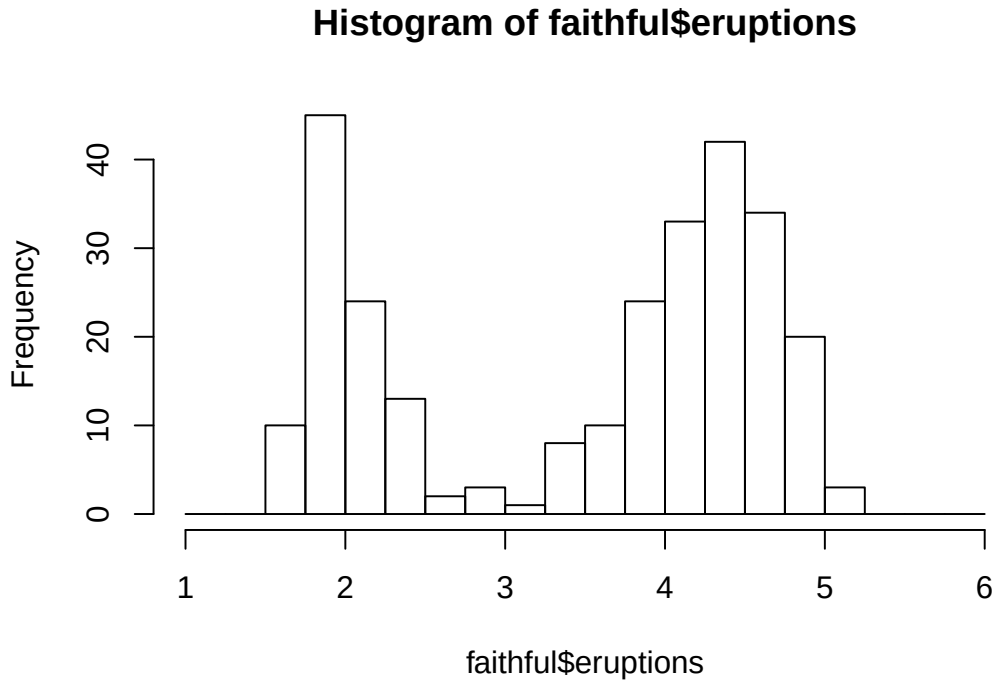
x	1.6	1.667	1.7	1.733	1.75	...	5.1
$n_{\vec{x}}(x)$	1	1	1	1	6	...	1



Ei kovin informatiivista.

Old Faithful: histogrammi

Ryhmitellään havainnot 0.25 minuutin väleille kuten $[2.00, 2.25)$.
Piirretään *väleille* osumisen lukumäärät.



Kokeile itse erilaisia jakovälejä. Mitä tapahtuu hyvin pienillä tai isoilla jakoväleillä?

Esiintyvyyksien ristitaulukko

Arvoparin (x, y) esiintyvyys (engl. frequency)

$$n_{\vec{xy}}(x, y) \;=\; \#\{i \;:\; x_i = x \;\text{ ja }\; y_i = y\}$$

on datajoukossa arvoltaan (x, y) olevien alkioiden lukumäärä.

Kurssipalautteen muuttujat "Yleisarvio" ja "Hyödyllisyys" voidaan koostaa datajoukoksi ((5,5), (1,2), (4,3), (4,3), (3,3))

			y			
x	1	2	3	4	5	Yht
1	0	1	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	2	0	0	2
5	0	0	0	0	1	1
Yht	0	1	3	0	1	

Suhteellisten esiintyvyyksien ristitaulukko

Arvoparin (x, y) suhteellinen esiintyvyys

$$f_{\vec{xy}}(x, y) \;=\; \frac{\#\{i \;:\; x_i = x \;\text{ ja }\; y_i = y\}}{n}$$

on datajoukossa arvoltaan (x, y) olevien alkioiden suhteellinen osuus

	y					
x	1	2	3	4	5	Yht
1	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	0	0	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
Yht	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	

$\sum_{x,y} f_{\vec{xy}}(x, y) = 1 \implies f_{\vec{xy}}(x, y)$ on eräs todennäköisyysjakauma.
$f_{\vec{xy}}(x, y)$ on datajoukon $\vec{xy}$ empiirinen yhteisjakauma.

Empiirinen yhteisjakauma

Lause

Datajoukosta $\vec{xy} = ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ *tasaisen satunnaisesti valittu pari* (X, Y) *on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa datajoukon* $\vec{xy}$ *empiiristä jakaumaa tiheysfunktiona* $f_{X,Y}(x, y) = f_{\vec{xy}}(x, y)$ *ja toteuttaa*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= m(\vec{x}), & \mathbb{E}(Y) &= m(\vec{y}), \\ \mathrm{SD}(X) &= \mathrm{sd}(\vec{x}), & \mathrm{SD}(Y) &= \mathrm{sd}(\vec{y}), \\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{var}(\vec{x}), & \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{var}(\vec{y}), \end{aligned} \tag{5}$$

sekä

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \mathrm{cor}(\vec{x}, \vec{y}), \tag{6}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(\vec{x}, \vec{y}). \tag{7}$$

Lisäksi mielivaltaiselle kahden muuttujan funktiolle g *pätee*

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i, y_i). \tag{8}$$

Tunnuslukujen laskeminen

Merkintä	Nimitys	R	Python	Excel
$m(\vec{x})$	Keskiarvo	`mean()`	`np.mean()`	`AVERAGE()`
$\mathrm{sd}(\vec{x})$	Keskihajonta	`sqrt(1-1/n)*sd()`	`np.std()`	`STDEV.P()`
$\mathrm{sd}_s(\vec{x})$	Otoskeskihajonta	`sd()`	`np.std( ,ddof=1)`	`STDEV.S()`
$\mathrm{var}(\vec{x})$	Varianssi	`(1-1/n)*var()`	`np.var()`	`VAR.P()`
$\mathrm{var}_s(\vec{x})$	Otosvarianssi	`var()`	`np.var( ,ddof=1)`	`VAR.S()`
$\mathrm{cov}(\vec{x},\vec{y})$	Kovarianssi	`(1-1/n)*cov()`	`np.cov( ,ddof=0)[0][1]`	`COVARIANCE.P()`
$\mathrm{cov}_s(\vec{x},\vec{y})$	Otoskovarianssi	`cov()`	`np.cov( ,ddof=1)[0][1]`	`COVARIANCE.S()`
$\mathrm{cor}(\vec{x},\vec{y})$	Korrelaatio	`cor()`	`np.corrcoef()[0][1]`	`CORREL()`
$q_{0.5}(\vec{x})$	Mediaani	`median()`	`np.median()`	`MEDIAN()`
$q_{0.25}(\vec{x})$	Alakvartiili	`quantile( ,.25)`	`np.quantile( ,.25)`	`PERCENTILE.INC( ,.25)`
$q_{0.75}(\vec{x})$	Yläkvartiili	`quantile( ,.75)`	`np.quantile( ,.75)`	`PERCENTILE.INC( ,.75)`

$$\text{Otoskeskihajonta } \mathrm{sd}_s(\vec{x}) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/2} \mathrm{sd}(\vec{x})$$

Sisältö

Järjestystunnuslukuja

Järjestetyn muuttujan (määrällinen tai järjestetty laadullinen) havainnoista $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, voidaan laskea tason $p \in (0, 1)$ kvantiili $Q(p)$, eli piste, jonka alapuolella on (suunnilleen) osuus p havainnoista.

Esim.

- $Q(0.25)$ on alakvartiili, sen alla 25% havainnoista
- $Q(0.5)$ on mediaani, sen alla 50% havainnoista
- $Q(0.75)$ on yläkvartiili, sen alla 75% havainnoitsa

R: `quantile(x,p)`, `summary(x)`, `median(x)`

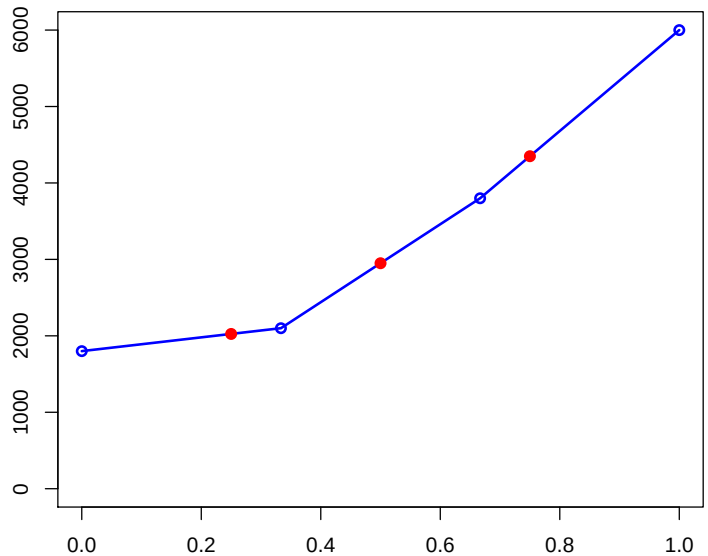
Äärellisellä datalla vain "suunnilleen", koska esim. 9:stä havainnosta ei voi ottaa tasan puolta. Tähän on erilaisia ratkaisuja, esim. seuraavaksi esitettävä kvantiilifunktio.

Kvantiilifunktio

Datajoukon $(x_1, \ldots, x_n)$ kvantiilifunktio voidaan määrittää näin:

- Järjestetään datapisteet muotoon $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$
- Jaetaan vaaka-akselin yksikköväli tasamittaisiin väleihin, reunapisteinä luvut $p_k = (k-1)/(n-1)$, $k = 1, \ldots, n$
- Piirretään tasoon pisteet $(p_k, x_{(k)})$ ja yhdistetään ne viivoilla

Esim. Neljä bruttopalkkaa (eur/kk): $3800, 1800, 2100, 6000$



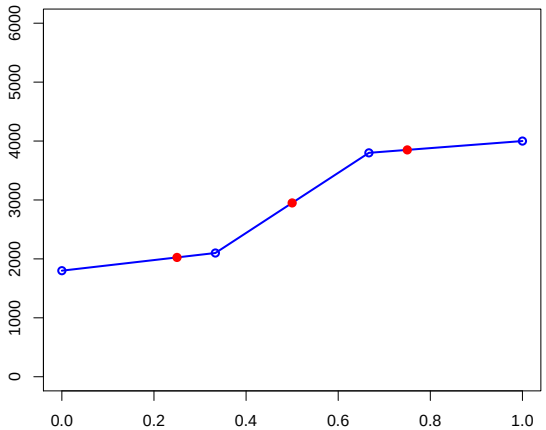
Kvartiilit = Kvantiilifunktion arvot pisteissä 0.25, 0.50, 0.75

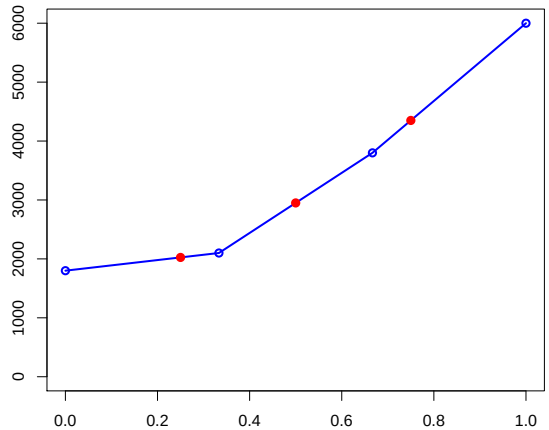
Esimerkki: Kolme datajoukkoa

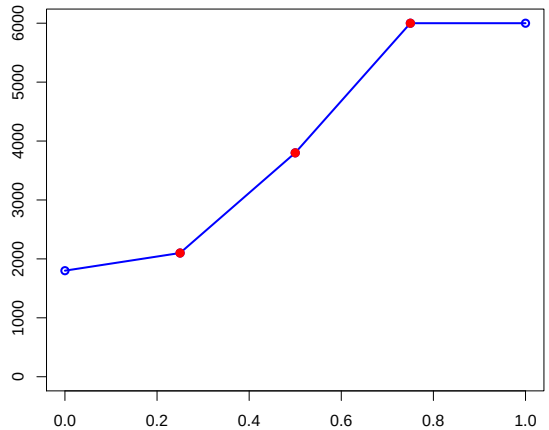
Esim. Piirrä seuraavien datajoukkojen kvantiilifunktiot ja määritä niiden mediaanit ja keskiarvot:

$$\vec{x} = (1800, 2100, 3800, 4000)$$
$$\vec{y} = (1800, 2100, 3800, 6000)$$
$$\vec{z} = (1800, 2100, 3800, 6000, 6000)$$

(Huom. Viimeisen joukon koko ei ole neljällä jaollinen.)







$Q_x(0.50) = 2950$,
$m(x) = 2925$

$Q_y(0.50) = 2950$,
$m(x) = 3425$

$Q_z(0.50) = 3800$,
$m(x) = 3940$

Sisältö

Datajoukko vs. yleistäminen

Havaitun datajoukon tarkoituksena on usein *esittää* yleisempää ilmiötä, "populaatiota".

data	populaatio
Pearsonin 1000 isää ja poikaa	Kaikki isät ja pojat (missä? milloin?)
1000 gallup-vastausta	5 miljoonan suomalaisen mielipide (nyt)
272 geysirin purkausta	Kaikki Old F:n purkaukset (menneet/tulevat?)
Lääkkeen vaikutus 30 potilaalla	Vaikutus tulevilla potilailla
100 nopanheittotulosta	Potentiaalinen ääretön heittojono

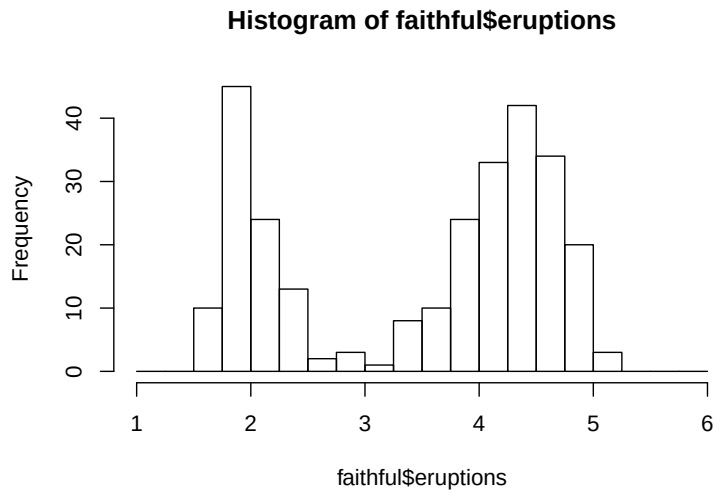
Populaatio on tilastotieteen terminologiaa, ja tarkoittaa

- mistä/miten data on syntynyt (generoiva mekanismi; datalähde)
- se mitä datan perusteella yritetään ymmärtää

"Populaatio" ei välttämättä ole mikään konkreettinen kokoelma (esim. ihmisiä).

Old Faithful vielä kerran

Olemme *havainneet* of 272 eruption lengths. Fysikaalinen mekanismi on ehkä monimutkianen, mutta ajatellaan pituuksien käyttäytyvän kuten satunnaismuuttuja, jolla on eräs jakauma f. Mutta mikä jakauma?



Voidaan ajatella, että "kaikki" (historian aikana *toteutuvat* tai fysikaalisesti *mahdolliset*) purkauspituudet muodostavat "populaation" tai generoivan jakauman, josta havaitut pituudet ovat satunnainen otos.

Empiirinen jakauma approksimoi generoivaa jakaumaa. Miksi?
Vastaus: Ajattele esim. tapahtuman $\{2.0 \leq X < 2.25\}$ todennäköisyyttä ja suurten lukujen lakia. Tiedämme, että *suhteellinen esiintyvyys* $\approx$ *todennäköisyys*.

Seuraavalla kerralla puhutaan parametrien estimoinnista . . .