



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

Sähkötekniikka ja elektroniikka

Laskuharjoitus 6

Kimmo Silvonen (X)

3.11.2021

Laskuharjoitus 6. Diodi. Piensignaalianalyysi

Johdanto (vrt. Kako)

Diodin ominaiskäyrä:

$$I = I_S \left(e^{\frac{U}{nU_T}} - 1 \right) \quad (1)$$

$$U_T = 25 \text{ mV} \quad (2)$$

Lämpöjännite (terminen ekvivalentti) U_T on eräänlainen lämpötilasta riippuva luonnonvakio(kerroin) – ei varsinaisesti mikään jännite.

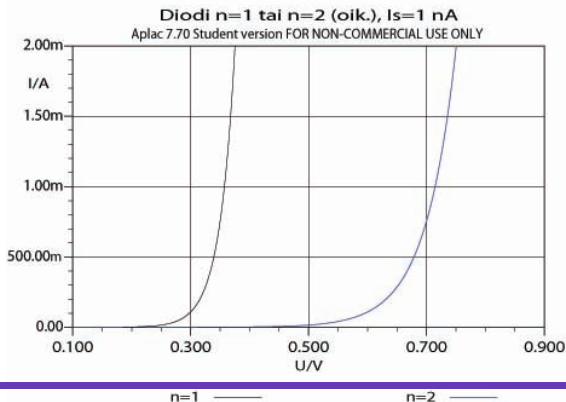
Diodin virtayhtälö on epälineaarinen: virta ei ole suoraan verrannollinen jännitteeseen. Vrt. lineaarinen vastus:

$$I = \frac{1}{R} U \quad (3)$$

Diodin ominaiskäyrä

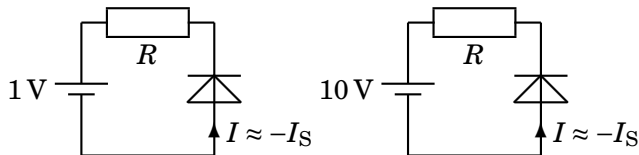
Emissiokerroin: $n \approx 1$ vs. $n \approx 2$

Ideaalisuusvakio eli emissiokerroin n on irrallisilla piidiodeilla yleensä $n \approx 2$, mikropiireissä ja transistoreilla $n \approx 1$. Suurelle ei ole selvää fysikaalista perustelua.

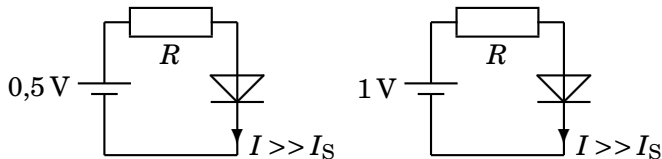


Vuotovirta $I_S \approx 0$ & estosuunta vs. päästösuunta

Reverse biased vs. Forward biased



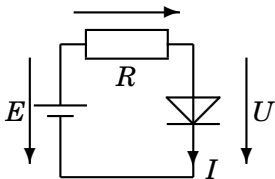
Kerroin I_S tarkoittaa diodin kyllästys- eli vuotovirtaa. Virta kyllästyy (saturation) tähän arvoon, kun jännite vieään selvästi negatiiviseksi. Kyllästysvirran lukuarvo on hyvin pieni, mutta se kasvaa nopeasti lämpötilan noustessa. Alla päästösuunta:



61. Laske likimain parametrit I_S ja n .

Oheisesta piiristä mitataan diodin jännite U kahden eri vastuksen kanssa.

Kun $R_1 = 170 \Omega$, on diodin jännite $U_1 = 0,7 \text{ V}$, ja arvolla $R_2 = 9,5 \text{ k}\Omega$ on $U_2 = 0,5 \text{ V}$. Lähdejännite $E = 10 \text{ V}$ (tasajännite).



$$-E + RI + U = 0 \Rightarrow I = \dots \quad (4)$$

Usein tarkastelu voidaan rajata selvästi päästösuuntaan ($U \gg nU_T$) tai estosuuntaan ($U \ll 0$), jolloin yhtälö yksinkertaistuu.

$$I = I_S(e^{\frac{U}{nU_T}} - 1) \approx \begin{cases} I_S(e^{\frac{U}{nU_T}}) & (U \gg nU_T) \\ I_S(-1) & (U \ll 0) \end{cases}$$

U_T riippuu siis vain lämpötilasta, n :ää ei voi suoraan mitata. I_S voi olla niin pieni, että sen suora mittaus olisi mahdotonta. Tässä esitetään yksinkertainen menetelmä parametrien määrittämiseen. Lasketaan virrat molemmilla lukuarvoilla ja sovitetaan tulokset diodiyhtälöihin (huom. $\log e^x = x \log e$ & $\ln e = 1$):

$$\begin{cases} I_1 = \frac{E-U_1}{R_1} = 54,7 \text{ mA} = I_S \left(e^{\frac{U_1}{nU_T}} - 1 \right) \approx I_S e^{\frac{U_1}{nU_T}} \\ I_2 = \frac{E-U_2}{R_2} = 1,0 \text{ mA} \approx I_S e^{\frac{U_2}{nU_T}} \end{cases} \quad (5)$$

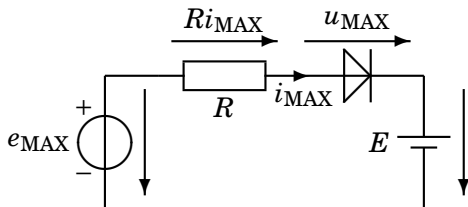
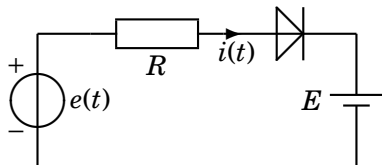
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{54,7}{\underbrace{1}_{\Rightarrow \log 54,7}} = \frac{e^{\frac{U_1}{nU_T}}}{e^{\frac{U_2}{nU_T}}} = \underbrace{e^{\frac{U_1-U_2}{nU_T}}}_{\Rightarrow \log e^x} \Rightarrow \frac{U_1 - U_2}{nU_T} = \ln 54,7 \Rightarrow n = 1,999 \approx 2$$

$$I_S \approx \frac{I_1}{e^{\frac{U_1}{nU_T}}} = 45 \text{ nA} \quad (6)$$

Tehtävän olisi voinut laskea myös numeerisesti iteroimalla.

62. Laske virran maksimiarvo iteroimalla.

$$e(t) = 10 \sin(\omega t) \text{ V}, E = 5 \text{ V}, R = 500 \ \Omega, I_S = 1 \text{ nA}, nU_T = 50 \text{ mV}.$$



$$-e_{\text{MAX}} + Ri_{\text{MAX}} + u_{\text{MAX}} + E = 0 \quad (7)$$

$$Ri_{\text{MAX}} + u_{\text{MAX}} = \overbrace{e_{\text{MAX}}}^{\text{kun } \omega t = 90^\circ} - E = 10 \cdot \sin 90^\circ - 5 = 5 \quad (8)$$

Epälineaarinen yhtälö

$$i_{\text{MAX}} = I_S(e^{u_{\text{MAX}}/nU_T} - 1) \approx I_S e^{20u_{\text{MAX}}}$$

$$R \overbrace{i_{\text{MAX}}}^{I_S e^{20u_{\text{MAX}}}} + u_{\text{MAX}} = 5 \quad (9)$$

$$u_{\text{MAX}} = 5 - RI_S e^{20u_{\text{MAX}}} \Rightarrow u_{\text{MAX}} = \dots \quad (10)$$

Koska hyvin monet elektroniikan komponentit ovat epälineaarisia, ei tehtävän ratkaisu aina ole mahdollista lineaaristen yhtälöryhmien avulla. Usein ratkaisua ei edes löydy (tai sitä ei ainakaan jakseta etsiä) suljetussa muodossa eli matemaattisena lausekkeena.

Ratkaisun voi löytää kokeilemalla (kuten seuraavassa) tai jotain nopeampaa iteraatiomenetelmää käyttämällä.

Iterointi

Tässä kokeilemalla

Ekan sarakkeen arvot vedetään hatusta; 0,7 V on hyvä aloitus:

u_{MAX}/V	$5 - RI_{\text{se}}^{20u_{\text{MAX}}/\text{V}}$
0,7	4,4
0,8	0,56
0,79	1,36
0,795	0,98

u_{MAX}/V	$5 - RI_{\text{se}}^{20u_{\text{MAX}}/\text{V}}$
0,7970	0,816
0,7971	0,8073
0,7972	0,7989
0,7972	$\approx 0,7989$

Iterointia (kokeilua) jatkettiin, kunnes vasen ja oikea puoli olivat *riittävän* lähellä toisiaan (esim. kahden numeron tarkkuus).

$$\Rightarrow u_{\text{MAX}} \approx 0,7972 \quad (11)$$

$$i_{\text{MAX}} = \frac{e_{\text{MAX}} - u_{\text{MAX}} - E}{R} = 8,4 \text{ mA} \quad (12)$$

63. Mihin arvoon virta pienenee,

jos diodin jännite pienenee 10 mV ($u_d = -10$ mV)?

Erään diodin virta on $I_D = 0,59$ mA, kun $U_D = 0,7$ V. $k = \frac{1}{nU_T} = 20 \frac{1}{V}$.

$$i_D(U_D + u_d) \approx I_S e^{\frac{U_D + u_d}{nU_T}} \approx I_S e^{\frac{U_D}{nU_T}} \underbrace{\left[1 + ku_d + \frac{(ku_d)^2}{2!} + \frac{(ku_d)^3}{3!} + \dots \right]}_{e^{\frac{u_d}{nU_T}}}$$

Taylorin sarjan tulkinta: "1" on tasavirta, ku_d on (hyöty)signaali (se mitä yritetään siirtää) ja loput termit säröä eli signaalin vääristymistä. Piensignaalianalyysi (approksimaatio) käsittelee Taylorin sarjan 2. termiä.

Selvästi virrallisen diodin ominaiskäyrän yhtälöstä voidaan jättää termi -1 huoletta pois. Diodin virta on funktio jännitteestä:

$$I_D = I_D(U_D) \approx I_S e^{\frac{U_D}{nU_T}} \Rightarrow I_S = 490,6 \text{ pA} \quad (13)$$

$$I_{D2} \approx I_S e^{\frac{U_{D2}}{nU_T}} = I_S e^{20U_{D2}} = 483 \text{ } \mu\text{A} \quad (14)$$

Yllä oleva tulos on "tarkka" vastaus. Tämän helpon tehtävän tarkoitus on esitellä Taylorin sarjaan perustuvaa *neliölakia*, jolla saadaan approksimaatio edelliselle:

$$i_D(U_D + u_d) \approx I_S e^{\frac{U_D + u_d}{nU_T}} \approx \underbrace{I_S e^{\frac{U_D}{nU_T}}}_{I_D} \left[\underbrace{1 + ku_d + \frac{(ku_d)^2}{2!} + \frac{(ku_d)^3}{3!} + \dots}_{e^{\frac{u_d}{nU_T}}} \right] \quad (15)$$

missä

$$k = \frac{1}{nU_T} = 20 \quad (16)$$

$$u_d = -0,01 \text{ V} \quad u_d^3 \approx 0 \quad (17)$$

Elektroniikkainsinöörit rakastavat Brook Taylorin sarjaa – usein tietämättään!

$$i_D(U_D + u_d) \approx I_D \left[1 + 20u_d + \frac{(20u_d)^2}{2!} \right] = 483,8 \mu\text{A} \quad (18)$$

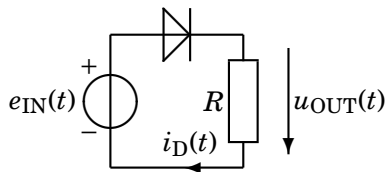
Tulos ei poikkea paljon tarkasta arvosta; nyt kuitenkin vältyttiin eksponenttifunktion käytöltä. Ajattele, jos eksponentissa olisi esim. sinimuotoinen signaali. Vaikka osaisit käsitellä sen matemaattisesti, tulos olisi epähavainnollinen. Taylorin sarja pystyy erottelemaan tasavirran, ajan funktiona muuttuvan signaalin ja viime mainittuun epälineaarisuuden takia syntyvän vääristymän.

Neliölaki, johon piensignaalianalyysi perustuu, pätee silloin, kun jännitteen muutos u_d on pieni. Näin voidaan lisäksi käsitellä myös esim. sinisignaalin säröytymistä.

64. Piirissä on lähdejännite, jossa pieni sinisignaali ratsastaa suuremman tasajännitteen päällä

DC- ja piensignaalianalyysi: $e_{IN}(t) = (4 + 0,067 \sin \omega t) \text{ V}$

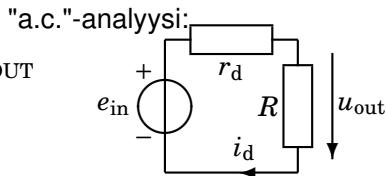
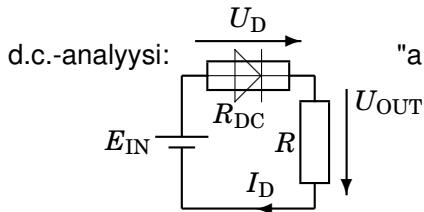
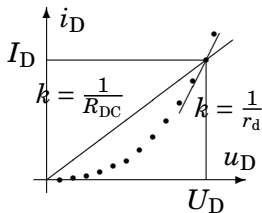
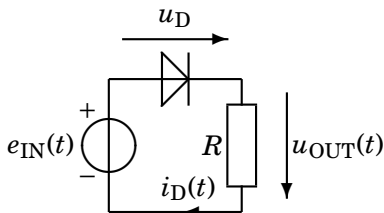
Laske diodin toimintapisteen virta I_D sekä tasavirtaresistanssi R_{DC} , kun $U_D = 0,7 \text{ V}$. Laske vielä dynaamisen resistanssin r_d avulla vastuksen jännite $u_{OUT}(t)$. $R = 5600 \ \Omega$, $I_S = 0,49 \text{ nA}$, $nU_T = 50 \text{ mV}$.



Aaltomuodon vähäistä muuttumista ei oteta huomioon. Tämä on normaali käytäntö piensignaalianalyysissä: ei siis oteta huomioon Taylorin sarjan korkeampia potensseja, koska niitä vastaavat termit ovat mitättömän pieniä (vrt. kirjan esimerkkilukuarvot).

Tasavirta-analyysi ja piensignaalianalyysi

Oikealla ominaiskäyrä, kuormitussuora ja niiden leikkauspiste eli toimintapiste.



Case-sensitiivisyys

Kansainvälisesti sovittu merkintätapa

Huom.! Piensignaalianalyysiin liittyvät tehtävät ovat "*case-sensitiivisiä*". Yllä merkintä E_{IN} tarkoittaa tasajännitettä, e_{in} tasajännitteeseen summautunutta ajan funktiona vaihtelevaa signaalia. Tällöin kokonaisjännite muodostuu edellisten summana

$$e_{IN} = E_{IN} + e_{in} \quad (19)$$

Samaa merkintätapaa sovelletaan johdonmukaisesti ainakin diodi-, transistori, ja fet-laskuharjoituksissa. Muissa harjoituksissa asiaan ei tarvitse kiinnittää huomiota, koska tasajännitettä ja vaihtojännitettä tai signaalia ei käsitellä samassa tehtävässä.

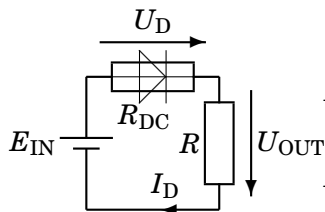
Koska diodin parametrit tunnetaan, olisi toimintapisteen jännite (ja siten myös virta) voitu laskea iteroimalla. Tässä lukuarvot on mitoitettu niin, että iterointitulok on tasan 0,7 V.

DC-resistanssi riippuu virran voimakkuudesta

Tämä pätee epälinearisille komponenteille

Epälinearisuus on juuri sitä, mistä edellä puhuttiin.

Diodin tasavirtaresistanssi R_{DC} :



$$U_{OUT} = E_{IN} - U_D = 3,3 \text{ V} \quad (20)$$

$$I_D = \frac{U_{OUT}}{R} = 0,5893 \text{ mA} \quad (21)$$

$$R_{DC} = \frac{U_D}{I_D} = 1188 \Omega \quad (22)$$

$$\left(U_{OUT} = \frac{R}{R + R_{DC}} \cdot 4 \right) \quad (23)$$

DC-resistanssi laskettiin vain vertailun vuoksi; sillä ei ole juuri käyttöä.

Dynaaminen resistanssi

riippuu toimintapisteestä eli virran voimakkuudesta

Piensignaalianalyysissä oletetaan ac-signaali pieneksi tasajännitteeseen verrattuna: $e_{in} \ll E_{IN}$, koska $0,067 \ll 4$. Tällöin diodin ominaiskäyrää voidaan approksimoida suoralla (kulmakerroin $1/r_d$) toimintapisteiden lähellä. Kakossa on dynaamisen resistanssin r_d kaava, joka johdetaan seuraavassa:

$$r_{ac} = r_d = \frac{\Delta U_D}{\Delta I_D} = \frac{1}{k} = \left. \frac{1}{\frac{\partial i}{\partial u}} \right|_{i=I_D, u=U_D}, \quad i = I_S(e^{\frac{u}{nU_T}} - 1) \quad (24)$$

$$r_d = \left. \frac{1}{\frac{I_S}{nU_T} e^{\frac{u}{nU_T}}} \right|_{I_D, U_D} = \frac{nU_T}{I_D + I_S} \approx \frac{nU_T}{I_D} = 84,8 \, \Omega \quad (25)$$

Osittaisderivaatta ($\frac{\partial}{\partial u}$ yllä) ei kaiketi koskaan eroa tavallisesta derivaatasta. Pystyviivan alakulmassa määritellään, millä kohdalla olevaa derivaattaa tarkoitetaan.

Signaalijännite vastuksessa

sekä vastuksen kokonaisjännite $u_{\text{OUT}}(t) = U_{\text{DC}} + u_{\text{ac}}$

$$u_{\text{out}} = Ri_{\text{d}} = \frac{R}{R + r_{\text{d}}} \cdot 0,067 \sin \omega t \quad (26)$$

Kyseessä on oikeastaan kerrostamismenetelmä; lasketaan erikseen eri lähteiden vaikutukset kokonaisjännitteeseen.

$$u_{\text{OUT}}(t) = U_{\text{DC}} + u_{\text{ac}} = U_{\text{OUT}} + u_{\text{out}} = (3,3 + 0,066 \sin \omega t) \text{ V} \quad (27)$$

4 voltin tasajännite pieneni diodin tasajännitehäviön verran 3,3 volttiin, mutta samalla signaalin jännitehäviö diodissa oli vain 1 mV.

Piensaaliapproksimaatio

Kaikkien transistori-, FET- ja putkivahvistimien toiminta perustuu vastaavanlaiseen piensignaalmalliin, missä alunperin käyrää ominaiskäyrää approksimoidaan likimain suoralla suoralla. Yllä oleva vastus r_d voisi yhtä hyvin olla signaalin näkemä resistanssi transistorin kannan ja emitterin välillä (r_π).

