



Aalto-yliopisto  
Sähkötekniikan  
korkeakoulu

# Sähkötekniikka ja elektroniikka

60. tuotantokausi

## Luento 2 (3)

Kimmo Silvonen (X)

29.9.2021

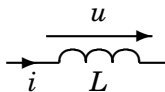
# Passiiviset peruskomponentit

Luento 29.9.2021

- ▶ Kondensaattori ja kapasitanssi  $C$ ; yhtälö  $i = f(u)$  perustuu varauksen häviämättömyyden lakiin (virran määritelmä)
- ▶ Kela ja induktanssi  $L$ ; yhtälö  $u = f(i)$  perustuu Faradayn induktiolakiin (yksi jännitteen määritelmistä)
- ▶ Muutosilmiöt eli transienttiansalyysi
- ▶ Diracin deltafunktio
- ▶ Eksponentiaaliset muutosilmiöt  $RC$ ,  $RL$
- ▶ Vaimeneva värähtely  $RLC$ ,  $RCC$ ,  $RLL$
- ▶ Laplace-muunnos (ei kuulu kurssiin)
- ▶ Teoriaa laajasti: *Elektroniikka ja sähkötekniikka*, 2018, erityisesti sivut 295–309.

# Kela ja induktanssi $L$ , Faradayn induktiolaki

Varastoi energiaa, mutta ei kuluta tehoa, jos käämissä ei ole resistanssia



$$\psi = Li = N\phi$$

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2$$

$$u = u(t) = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad \text{vrt. } u = Ri$$

$$i = i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + I_{L0} \quad \text{vrt. } i = Gu$$

Induktanssi [ $L$ ] = H = Vs/A = henry

Käämivuo [ $\psi$ ] = Vs = Wb = weber

Magneettivuo [ $\phi$ ] = Vs = Wb

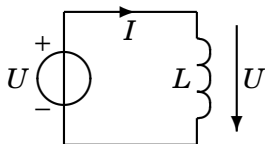
$I_{L0} = i(0)$  = kelan virta hetkellä  $t = 0$ , kierrosmäärä  $N$

$w_L$  = kelaan varastoitunut energia (J)

# Esimerkki: kela ja vakiojännite

Tavallinen tilanne esim. hakkuriteholähteissä

Jos kelaan kytketään vakiojännite, sen virta kasvaa lineaarisesti:



$$u = L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u \, dt + I_{L0} \quad (2)$$

$$i(t) = \frac{U}{L} \cdot t + I_{L0} \quad (3)$$

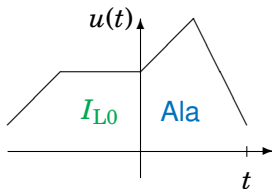
$$U \cdot t_1 = L \cdot i(t_1) \quad \text{jos } I_{L0} = 0 \quad (4)$$

## di- ja dt -jumbppaa

$$u = u(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$u dt = L di$$

$$\int_{-\infty}^t u dt = L \int_{-\infty}^t di$$



$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u dt + \frac{1}{L} \int_0^t u dt$$

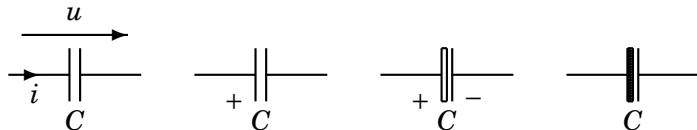
$$i = i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + I_{L0}$$

$$\frac{d}{dt}(i) = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} \left( \int_0^t u dt \right) + \frac{d}{dt}(\text{vakio})$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} u + 0$$

# Kondensaattori ja kapasitanssi $C$ , sähkövirran määritelmä

Ei ole vastusta; varastoi energiaa, mutta ei kuluta tehoa



$$q = Cu \quad w_C = \frac{1}{2} Cu^2$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad \text{vrt. } i = Gu$$

$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_{C0} \quad \text{vrt. } u = Ri$$

Kapasitanssi  $[C] = F = \text{As/V} = \text{faradi}$

Varaus  $[q] = \text{As} = \text{C} = \text{coulombi}$

$U_{C0} = u(0) = \text{kondensaattorin eli konkan jännite hetkellä } t = 0$

$w_C = \text{kondensaattoriin varautunut energia [J]}$

# Jännite ja virta kelassa ja konkassa, yhteenveto

Varastoitunut hetkellinen energia  $w = w(t)$

Kotitehtävä: etsi edellisen sivun kaavoille vastineet kelan puolelta, jotta näet yhtäläisyydet. Toista sivun 4 esimerkki kondensaattorille.

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2 \qquad w_C = \frac{1}{2} Cu^2$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \qquad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0)$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} \qquad u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$$

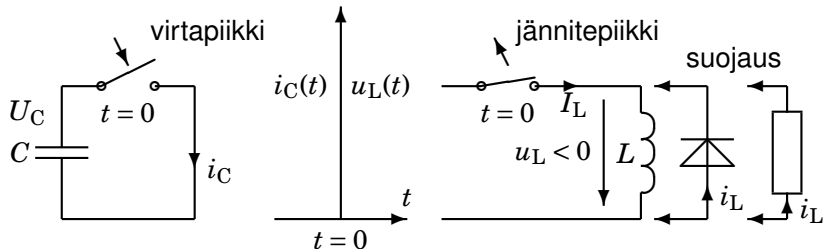
# Diracin deltafunktio $\delta(t)$ , nopea muutosilmiö

Jännite- tai virtapiikki, korkeus  $\infty$ , leveys nolla (vrt. Laplace-muunnos)

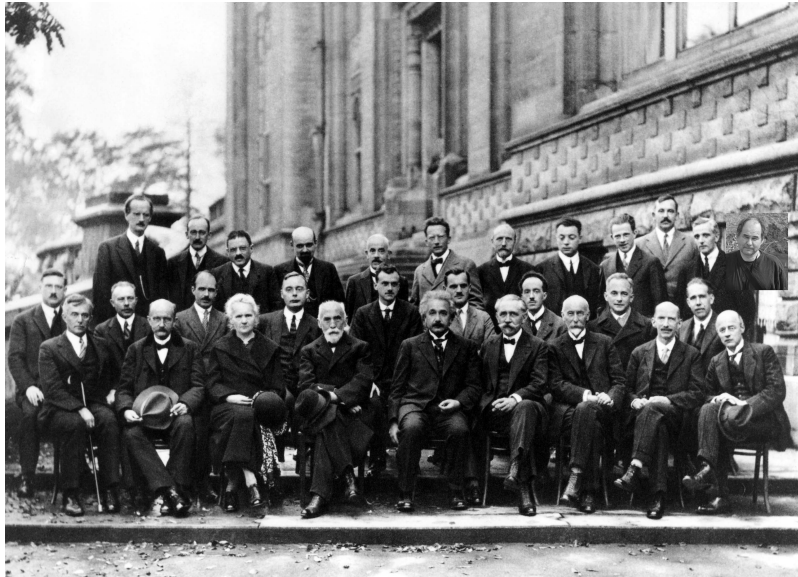
Kelan virta tai kondensaattorin jännite katkaistaan brutaalisti:

$$u_L = L \frac{di}{dt} \approx L \frac{0 - I_L}{0} \approx -\infty \quad |u_L| = L\delta(t)$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} \approx C \frac{0 - U_C}{0} \approx -\infty \quad |i_C| = C\delta(t)$$







Ylärivi: 6. vasemmalta Schrödinger, 8. Pauli, 9. Heisenberg, 12. X  
Keskirivi: 5. **Dirac** (keskimm.), 6. Compton, 7. de Broglie, 9. Bohr  
Alarivi: 2. Planck, 3. MC (2xNP), 4. Lorentz, 5.  $mc^2$  [Solvay 1927]

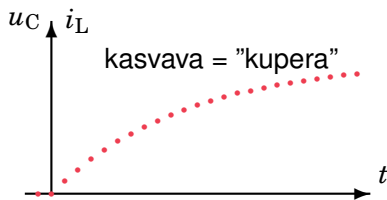
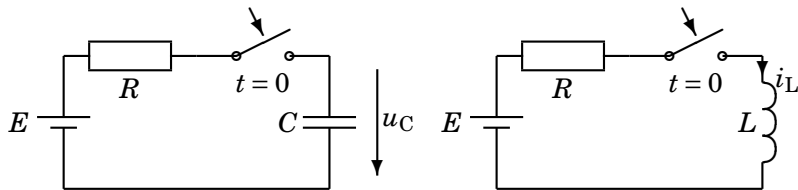
# Muutosilmiöt *Circuit Transients*

## Transienttianalyysi

- ▶ L ja C varastoivat energiaa
- ▶ Energiavarastot verrannollisia virtaan ( $L$ ) ja jännitteeseen ( $C$ )
- ▶ Varastot eivät voi muuttua äkkijyrkästi:  $i_L$  ja  $u_C$  jatkuvia
- ▶ Muutosilmiöt ovat eksponenttifunktioita
- ▶ RC ja RL  $\Rightarrow$  1. kertaluvun differentiaaliyhtälöt
- ▶ Munat ja jauhot -menetelmä
- ▶ LC, RLC, RCC ja RLL  $\Rightarrow$  2. kertaluvun d. y.

# Jännitelähteen kytkeminen *Switching On*

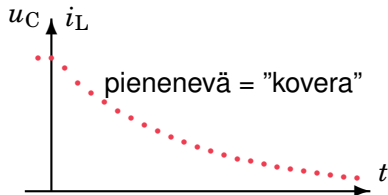
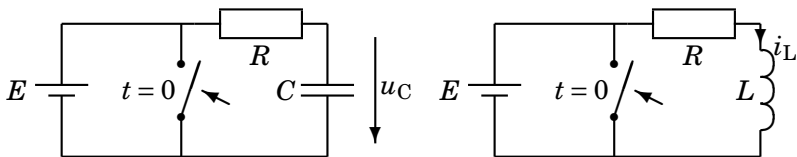
Jännite  $u_C$  ja virta  $i_L$  muuttuvat eksponenttikäyrää pitkin



# Jännitteen katkaisu *Switching Off*

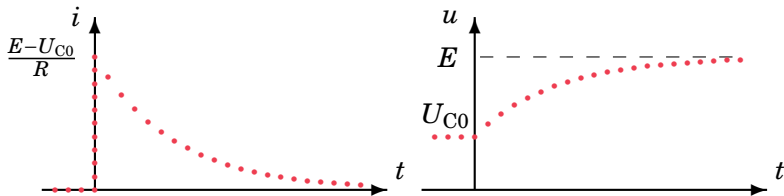
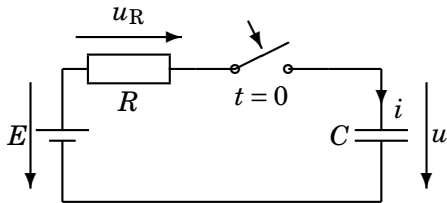
Lähde nolldataan. Huom. todellista jännitelähdettä ei saa oikosulkea!

toteaa nimimerkki "Coke musta on!"



# Kondensaattorin lataaminen *Charging the C*

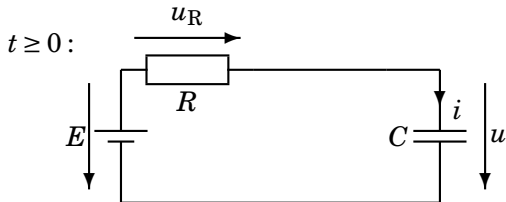
Alkujännitteestä  $U_{C0}$  alkaen. Tulos on johdettu tuonnempana.



$$u(t \geq 0) = E - (E - U_{C0})e^{-t/(RC)}$$

# Differentiaaliyhtälö *Differential Equation*

Yrite on yhtälön tunnettu ratkaisu, jonka **vakioita** ei vielä tunneta.



$$-E + Ri + u = 0 \quad \leftarrow i = C \frac{du}{dt}$$

$$E = RC \frac{du}{dt} + u \quad \leftarrow u(t) = \underbrace{B + Ae^{-t/\tau}}_{\text{yrite}}$$

differentiaaliyhtälö

$$\text{tai} \quad E = Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u(0)$$

# Vakioiden määrittäminen *Coefficients*

Sijoitetaan yrite alkuperäiseen yhtälöön

$$E = RC \underbrace{\frac{du}{dt}}_{-\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}} + \underbrace{u}_{B+ Ae^{-t/\tau}}$$
$$\underbrace{E}_{mnt} + \underbrace{RC \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}}_{jht} = \underbrace{B}_{mnt} + \underbrace{Ae^{-t/\tau}}_{jht}$$

”Munat ja jauhot”-menetelmä (*mnt*, *jht*): yhtälön on oltava voimassa kaikilla  $t$ :n arvoilla; jauhoilla ei voi kompensoida munia!

$$B = E \quad \tau = RC$$

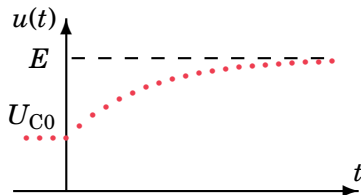
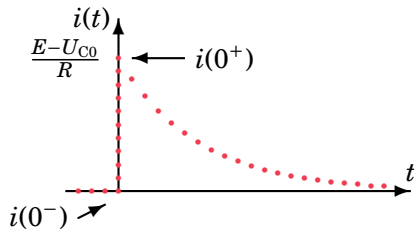
$A$  saadaan Alkuehdosta ( $t = 0$ ):

$$u(0) = U_{C0} = B + Ae^{-0/\tau} = B + A \Rightarrow A = U_{C0} - B$$

# Raja-arvot *Limit Values*

Nollaa lähestytään miinus- tai pluspuolelta

Samanlaista merkintää käytetään matematiikassa.



$$i(0^-) = 0 \quad i(0^+) = \frac{E - U_{C0}}{R}$$
$$u(0^-) = u(0^+) = u(0) = U_{C0}$$



# Yleinen esitysmuoto *General Form*

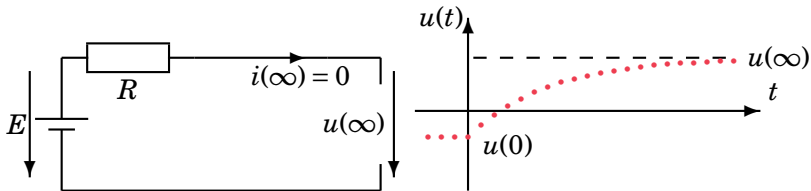
Ei tarvita differentiaaliyhtälöä — ainoastaan alku- ja loppuarvot!

Silmäile tätä kertausvaiheessa!

$$u(\infty) = B + Ae^{-\infty/\tau} = B + 0 = B$$

$$u(0) = B + Ae^{-0/\tau} = B + A$$

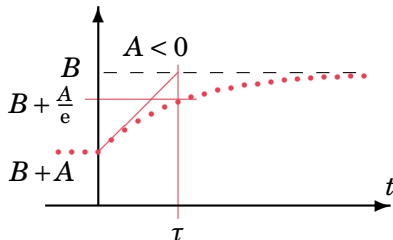
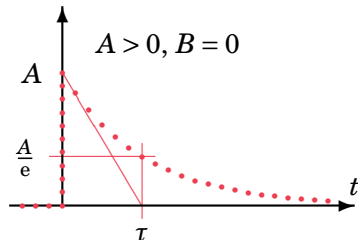
$$u(t) = \underbrace{u(\infty)}_B + \underbrace{[u(0) - u(\infty)]}_A e^{-t/\tau}$$



# Aikavakio *Time Constant*

Määrittäminen graafisesti tai matemaattisesti on triviaalia

Silmäile tätä kertausvaiheessa!



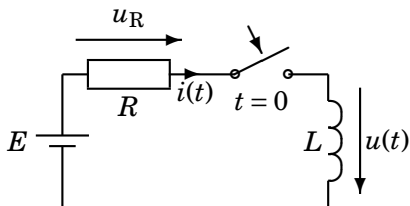
Vino viiva on käyrän tangenti

$$\frac{1}{e} \approx 0,37$$

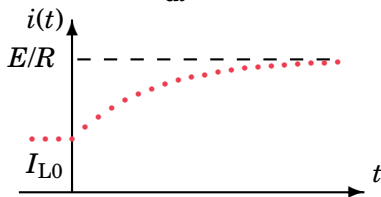
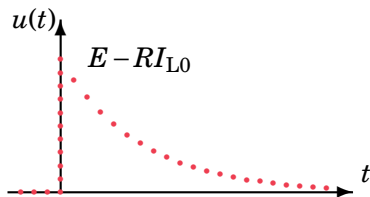
$$1 - \frac{1}{e} \approx 0,63$$

# Induktanssin kytkeminen piiriin *Switching On*

eli "energisointi", vrt. kondensaattorin lataaminen

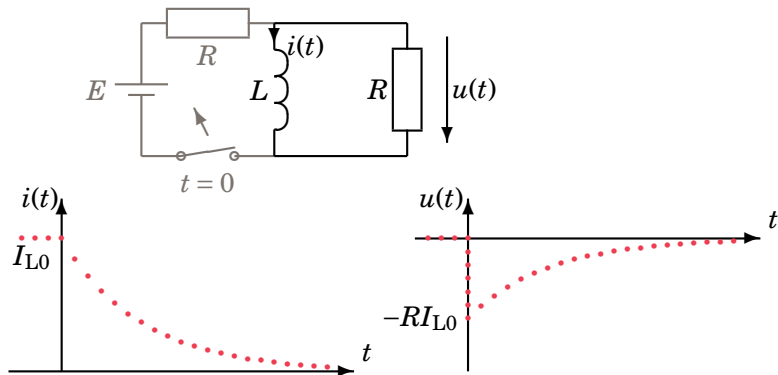


$$E = u_R + u = Ri + L \frac{di}{dt}$$



# Induktanssin tyhjentäminen *Switching Off*

Aluksi  $E$ :n tasavirta menee kokonaan vastuksettoman kelan läpi



$L$ :n ja  $C$ :n muutosilmiöt ovat matemaattisesti samanlaisia, jos  $u$ :t ja  $i$ :t vaihdetaan päikseen.

# RC- ja RL-piirit, yhteenvetoa

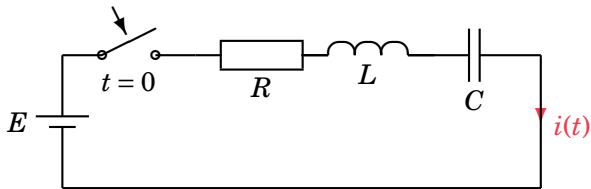
Kelan TAI konkan muuttuva virta ja jännite

Tyypillisiä tapauksia, silmäile tätä kertausvaiheessa – älä ennen!

$i_L$ tai $u_C$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$ tai $i_C = C \frac{du_C}{dt}$
Vakio (d.c.)	0
Lineaarisesti kasvava	positiivinen vakio
Lineaarisesti pienenevä	negatiivinen vakio
Kasvava eksponenttikäyrä	pienenevä eksponenttikäyrä
Pienenevä eksponenttikäyrä	kasvava eksponenttikäyrä

# LC- ja RLC-piirit: kela JA konkka

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö! Alinna eräs ratkaisu.



$$E = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + U_{C0}$$

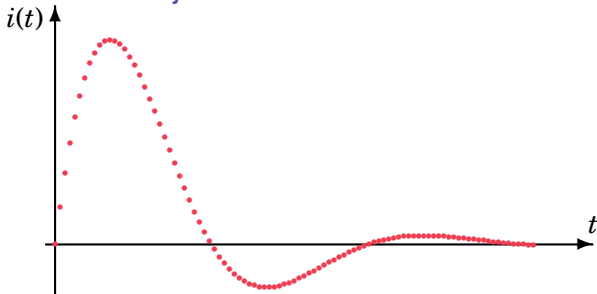
$$0 = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} + 0 \quad (\text{derivoitu})$$

$$\left[ \frac{E}{s} = RI(s) + L sI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} + \frac{U_{C0}}{s} \right] \quad (\text{Laplace - muunnettu})$$

$$i(t) = Ae^{-at} \sin(\omega t)$$

# Ekspontiaalisesti vaimeneva sini

## Ekspontiaalinen verhoikäyrä



$$i(t) = Ae^{-at} \sin(\omega t)$$

Vrt. Tacoma Narrows Bridge Seattlen lähellä; sillan värähtelyä (Youtube, 4 min. 13 s.) on simuloitu RLC-piirillä. Volgogradissa eräs silta suljettiin 22.5.2010 vastaavan värähtelyn takia.

# Osoitinlaskenta *Phasor Calculus*

## Vaihtovirrat ja kompleksiluvut

Käsitellään kahdella seuraavalla viikolla.

Esitietoja ei vaadita.

Yksi kurssin pääaiheista, muista tulla paikalle!

Ota laskin mukaan (tavallinen funktiolaskin on hyvä)!

Opit rakastetun kompleksiaritmetiikan jo ennen kuin olet läpäissyt kurssin, esim.:

$$\sqrt{2}j = \sqrt{2\sqrt{-1}} = 1 + \sqrt{-1} = 1 + j = \sqrt{2}\angle 45^\circ = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\angle 90^\circ$$

Korota mikä tahansa edellisistä toiseen, saat "juurenalusen":

$$\sqrt{2}\angle 45^\circ \cdot \sqrt{2}\angle 45^\circ = 2\angle 90^\circ$$