Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Sähkötekniikka ja elektroniikka

60. tuotantokausi

Luento 3 (4)

Kimmo Silvonen (X)

6.10.2021

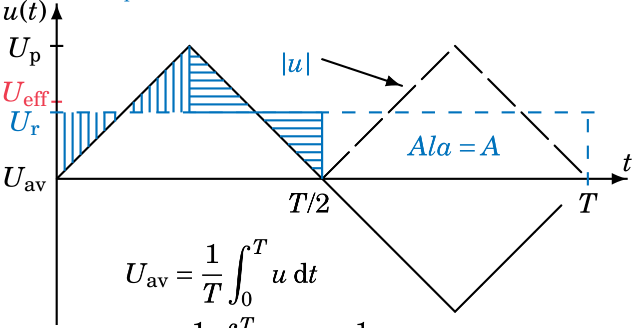
Vaihtovirta ja osoitinlaskenta

Luento 6.10.2021

- Sinimuotoinen virta ja jännite
- Tehollisarvo, huippuarvo, vaihekulma
- Ajan funktiona vai jatkuvalla siniaallolla (1 taajuus)?
- Viime viikon kytkentäilmiöt ajan funktioita
- Osoitinlaskenta vain jatkuvassa tilassa!
- Kompleksiluvut, summamuoto vs. kulmamuoto
- Impedanssi ja admittanssi, yleistetty Ohmin laki
- Opit hienon laskumenetelmän ja tulevan koetehtävän!
- Lisätietoa: Elektroniikka ja sähkötekniikka, sivut 316–343.

Keskiarvo, tehollisarvo, *Average or Effective*

r = rectified U_r = **tasasuuntauskeskiarvo**



$$U_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T u \, dt$$

$$U_r = \frac{1}{T}\int_0^T |u| \, dt = \frac{1}{T} A$$

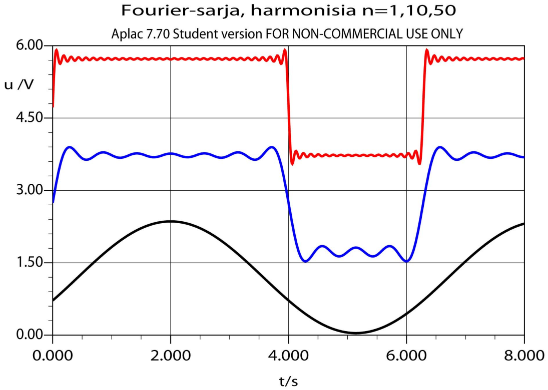
$$U = U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 \, dt}$$

root mean square

Jaksollisen aaltomuodon Fourier-sarja

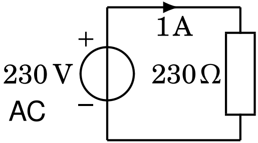
koostuu sinimuotoisista osista; kuvassa $n_{\mathrm{MAX}} = 1, 10, 50$, nollataso vaihtelee

$$u(t) = U_{\mathrm{DC}} + U \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin 4n\omega}{n\pi} \cos n\omega t + \frac{(1-\cos 4n\omega)}{n\pi} \sin n\omega t \right]$$



Verkkojännite, *Mains AC Voltage*

Tehollisarvon fysikaalinen merkitys



$P = 230\,\mathrm{W}$

$U = 230\,\mathrm{V} = U_{\mathrm{eff}}$

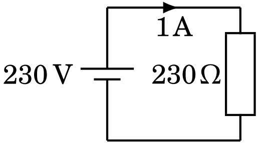
$\hat{u} = 325\,\mathrm{V}$ $\quad u_{\mathrm{pp}} = 650\,\mathrm{V}$

$U_{\mathrm{av}} = 0\,\mathrm{V}$ $\quad U_{\mathrm{r}} = 207\,\mathrm{V}$

$f = 50\,\mathrm{Hz}$ $\quad T = 20\,\mathrm{ms}$

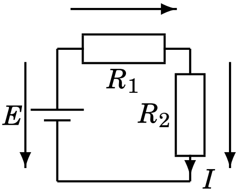
$\omega = 314\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

vrt. DC



$P = 230\,\mathrm{W}$

Vertailutesti, *Introduction*

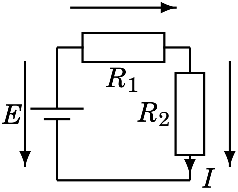


$$E = 10\,\mathrm{V}$$
$$R_1 = 4\,\Omega$$
$$R_2 = 2\,\Omega$$

$$-E + R_1 I + R_2 I = 0$$
$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$
$$I = \frac{10}{6}$$
$$= 1{,}67$$

Vertailutesti: DC vs. AC

Voit oppia asian ytimen jo tästä, selitykset tuonnempana!



$E = 10\,\mathrm{V}$

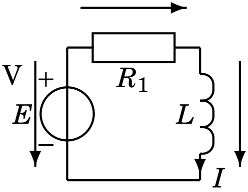
$R_1 = 4\,\Omega$

$R_2 = 2\,\Omega$

$E = 10\angle 0^\circ\,\mathrm{V}$

$R_1 = 4\,\Omega$

$\omega L = 2\,\Omega$

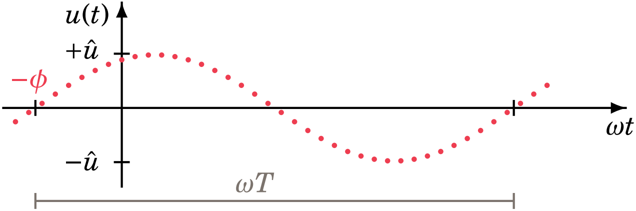


$$
\begin{aligned}
-E + R_1 I + R_2 I &= 0 \\
I &= \frac{E}{R_1 + R_2} \\
I &= \frac{10}{6} \\
&= 1{,}67
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-E + R_1 I + Z I &= 0 \\
I &= \frac{E}{R_1 + Z} \\
I &= \frac{10}{4 + \mathrm{j}2} = \frac{10}{\sqrt{20}\angle 26{,}6^\circ} \\
&= \sqrt{5}\angle -26{,}6^\circ
\end{aligned}
$$

Siniaalto

AC (a.c.)



$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad U_{\mathrm{av}} = 0 \qquad U_{\mathrm{r}} = \frac{2\hat{u}}{\pi} \qquad U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

ω = kulmataajuus (rad/s = 1/s)

T = jaksonaika (s)

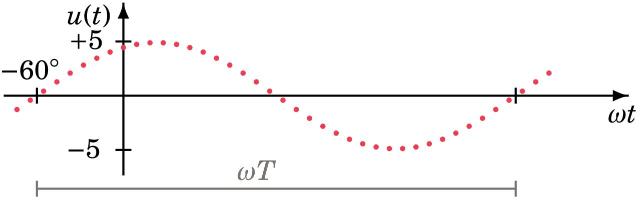
ϕ = (nolla)vaihekulma (°)

$\hat{u}$ = huippuarvo

$u = u(t)$ = hetkellisarvo

$u_{\mathrm{pp}} = 2\hat{u}$ huipusta huippuun (peak-to-peak)

Osoitinlaskenta, jatkuva sini, *Phasor Calculus*



$$u(t) = 5\sin(\omega t + 60^\circ)\,\mathrm{V} \quad = \quad 5\cos(\omega t - 30^\circ)\,\mathrm{V}$$

$$\underline{U} = \frac{5}{\sqrt{2}}\angle + 60^\circ\,\mathrm{V} \quad \text{tai} \quad \underline{U} = 5\angle - 30^\circ\,\mathrm{V}$$

Tällä kurssilla: sinimuotoinen tehollisarvon osoitin

Usein muualla: kosinimuotoinen huippuarvon osoitin

- Pienet kirjaimet ⇒ ajan funktioita
- Isot kirjaimet ⇒ jännite ja virta kompleksilukuina
- Alaviiva ⇒ kompleksiluvun tunnus (en käytä)

Kulmamuoto ja summamuoto

Osoitinlaskenta perustuu merkintäsopimukseen: sinifunktio vs. kompleksiluku

- Eulerin kaavan imaginaariosa:

$$i(t) = \hat{i}\sin(\omega t + \phi) = \mathrm{Im}\left[\hat{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}\right]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}\angle + \phi = \underbrace{I_\mathrm{R}}_{\mathrm{Re}} + \mathrm{j}\,\underbrace{I_\mathrm{X}}_{\mathrm{Im}}$$

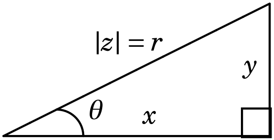
- Tehollisarvo $|\underline{I}| = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$ ja vaihekulma ϕ
  = kulmamuoto (Polar form)
- Reaali- ja imaginääriosa
  = summamuoto (Rectangular form)
- Sähkötekniikassa imaginääriyksikkö on j

Koordinaatistomuunnos, *Coordinate Transformation*

Tarvitaan käytännön laskuissa

- Summamuoto (rectangular) $x + jy$
- Kulmamuoto (polar) $r\angle\theta$
- Muunnos on ohjelmoitu laskimiin (X voi kaivaa sen laskimestasi)

$$z = 3 + j4 = 5\angle 53{,}13^\circ$$



$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Summamuoto ⇔ Kulmamuoto, *Calculators*

Eri laskimissa eri tavoin, alla esimerkkejä. Joskus vaaditaan sulut, toisinaan s. t. e.

$$\begin{array}{rccl}
\mathrm{POL}(x,y) & \mathrm{R} \to \mathrm{P} & \to r\theta & x(r) \to a\,,\ y(\theta) \to b \\
\mathrm{REC}(r,\theta) & \mathrm{P} \to \mathrm{R} & \to xy & r,\theta \to \mathrm{REC} \\
\mathrm{REC}(r\angle\theta) & & \multicolumn{2}{l}{x + y\mathrm{i} \leftrightarrow r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta[\mathrm{t.l.\,luulee\,rad,\,vaikka\,deg\,valittu}]}} \\
x \leftrightarrow y & \Updownarrow & \mathrm{INV\,RV} & \mathrm{RCL\,tan} \\
\mathrm{math}- & \mathrm{angle}- & \multicolumn{2}{l}{\mathrm{cmplx} - \mathrm{menu}}
\end{array}$$

Kulmaa saa pyörittää $\pm 360°$

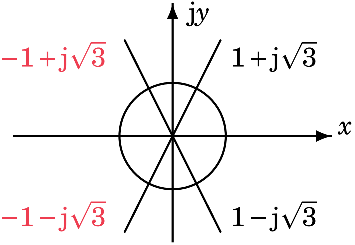
$$2\angle 240° = 2\angle -120°$$

t.l. = typerä laskin!

Koordinaatiston neljännekset, *Quadrants*

Ongelmia arcus-tangentin kanssa ($x < 0$). *Why does tan^{-1} suck?!*

$$
\begin{aligned}
1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3} &= 2\angle \pm 60^\circ \\
-1 + \mathrm{j}\sqrt{3} &= 2\angle(180^\circ - 60^\circ) = 2\angle 120^\circ \\
-(1 - \mathrm{j}\sqrt{3}) &= 2\angle(180^\circ - 60^\circ) = 2\angle 120^\circ \\
-1 - \mathrm{j}\sqrt{3} &= 2\angle(180^\circ + 60^\circ) = 2\angle 240^\circ
\end{aligned}
$$



Peruslaskutoimitukset

Eulerin identiteetti: $e^{j\pi} + 1 = 0$

$$z_1 = 4 + 2j = \sqrt{20}\angle 26{,}6^\circ = \sqrt{20}e^{j26{,}6^\circ}$$

$$z_2 = 3 + 1j = \sqrt{10}\angle 18{,}4^\circ = \sqrt{10}e^{j18{,}4^\circ}$$

$$z_1 + z_2 = (4+3) + j(2+1)$$

$$j^2 = -1$$

$$z_1 - z_2 = (4-3) + j(2-1)$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$z_1 z_2 = (4\cdot 3 - 2\cdot 1) + j(4\cdot 1 + 2\cdot 3)$$

$$\sqrt{20}\sqrt{10}\angle(26{,}6^\circ + 18{,}4^\circ) = 10 + j10$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(4\cdot 3 + 2\cdot 1) + j(2\cdot 3 - 4\cdot 1)}{3^2 + 1^2}$$

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}\angle(26{,}6^\circ - 18{,}4^\circ) = 1{,}4 + j0{,}2$$

$$z_1^* = 4 - j2 = \sqrt{20}\angle -26{,}6^\circ = \sqrt{20}e^{-j26{,}6^\circ}$$

$$z_1 z_1^* = |z_1|^2 = 4^2 + 2^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2$$

Jakolasku kulmamuodossa ja kertominen j:llä

Lisäesimerkki

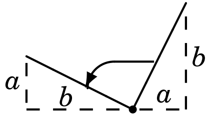
$$z_1 = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = a + \mathrm{j}b \tag{1}$$

$$z_2 = B\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta} \tag{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}}{B\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}} = \frac{A}{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\beta)} = \frac{A}{B}\angle\alpha-\beta \tag{3}$$

$$\mathrm{j}(a+\mathrm{j}b) = \underbrace{(0+1\mathrm{j})}_{1\angle 90^\circ}\underbrace{(a+\mathrm{j}b)}_{A\angle\alpha} = -b+\mathrm{j}a \tag{4}$$

$$1\angle 90^\circ \cdot A\angle\alpha = A\angle\alpha + 90^\circ \tag{5}$$



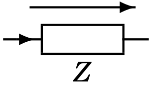
Impedanssi Z ja admittanssi Y

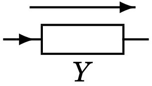
Reaali- ja imaginaariosineen, Ohmin laki

Onko impedanssi vaihtovirtavastus? Tarkkaan ottaen ei!

Pyörrevirrat kasvattavat tavallista resistanssia vaihtovirralla.

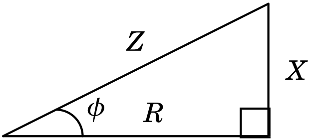
$$U = ZI \qquad\qquad I = YU$$





$$Z = R + \mathrm{j}X \qquad\qquad Y = G + \mathrm{j}B = \frac{1}{Z}$$

R = resistanssi (pätövastus) (Ω)
X = reaktanssi (loisvastus) (Ω)
G = konduktanssi (S)
B = suskeptanssi (S)



Vastus, kela, kondensaattori

Impedanssit Z_R, Z_L, Z_C, osoitinlaskennan ydin!

$$u_\mathrm{L} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\hat{i}\sin(\omega t+\phi)\right] = \omega L \underbrace{\hat{i}\cos(\omega t+\phi)}_{\hat{i}\sin(\omega t+\phi+90^\circ \leftarrow \mathrm{j})}$$

j:llä kertominen vastaa kompleksiluvun kulman kääntämistä 90°.

$$i = |I|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)} \qquad u = |U|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$$

$$u_\mathrm{L} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\mathrm{j}\omega L}_{Z_\mathrm{L}}\underbrace{|I|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}}_{i} \Rightarrow U_\mathrm{L} = Z_\mathrm{L} I$$

$$i_\mathrm{C} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\mathrm{j}\omega C}_{\frac{1}{Z_\mathrm{C}}}\underbrace{|U|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}}_{u} \Rightarrow I_\mathrm{C} = \frac{1}{Z_\mathrm{C}} U_\mathrm{C}$$

$$Z_\mathrm{R} = R \qquad Z_\mathrm{L} = \mathrm{j}\omega L \qquad Z_\mathrm{C} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$

Onko kompleksinen virta tai jännite järkevä?

Jaetaan eksponenttifunktio kahdeksi tulon tekijäksi:

$$\underline{i} = \hat{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \hat{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \sqrt{2}I_{\mathrm{eff}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right)$$

Viedään lauseke vastukseen kelaan tai kondensaattoriin:

$$u_{\mathrm{R}} = Ri = RI_{\mathrm{eff}}\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right)\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$u_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega L I_{\mathrm{eff}}\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right)\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

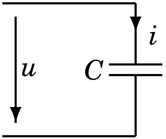
$$u_{\mathrm{C}} = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}I_{\mathrm{eff}}\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right)\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

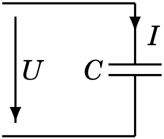
Aina toistuva $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ voidaan "jättää" yhteisenä tekijänä pois. Osoitinlaskenta perustuu pohjimmiltaan tällaiseen sopimukseen. Summamuoto ja kulmamuoto:

$$\underline{I} = I_{\mathrm{eff}}\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right) = \underbrace{\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}}_{1}\cdot I_{\mathrm{eff}}\angle\varphi$$

Ajan vai jω:n funktiona? *Function of: time vs.* jω

Valitset sen itse; katso myös seuraava sivu!





$$u = \hat{u}\,\sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$U = |U|\angle\varphi_u$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \omega C\hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$I = \mathrm{j}\omega C U$$

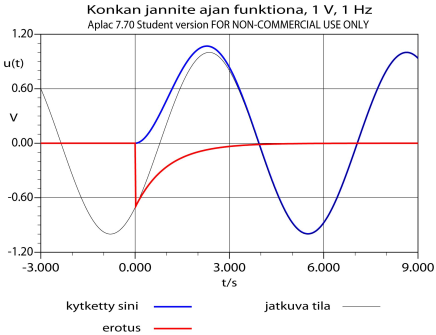
$$i = \omega C\hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ)$$

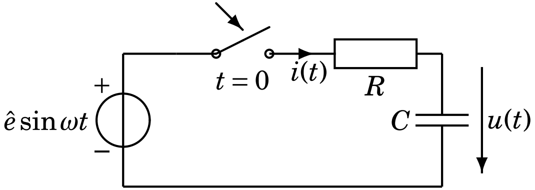
$$I = \omega C|U|\angle\varphi_u + 90^\circ$$

$$\hat{i} = \omega C\hat{u}$$

$$\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$$

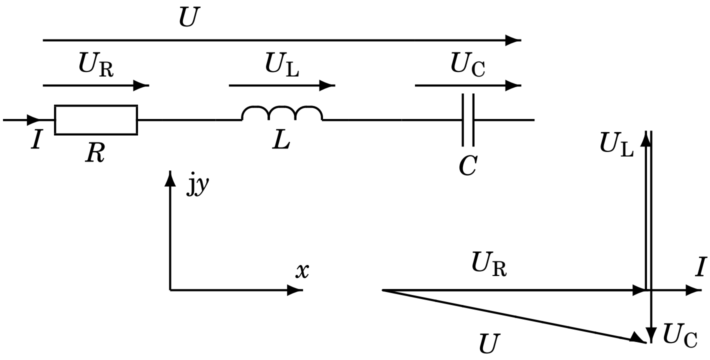
Kytkentäilmiö vs. jatkuva tila, *Steady State*





Osoitindiagrammi, *Phasor Diagram*

Havainnollistava graafinen esitys



$$U_{\mathrm{R}} = RI \qquad U_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega LI \qquad U_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}I = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}I$$

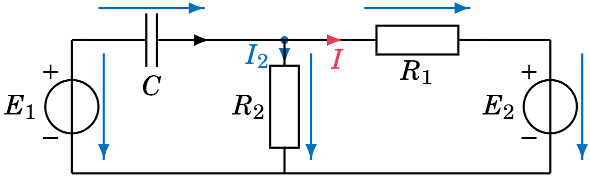
Tentti 20.12.2001

Tällainen tehtävä tulee jokaiseen ykkösvälikokeeseen ja tenttiin!

Laske virta I. $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $C = 0{,}1$ F, $\omega = 2\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.

$E_1 = 10\angle 0°$ V, $E_2 = 20\angle 90°$ V

$e_1(t) \approx 14 \sin \omega t$ V $\qquad$ $e_2(t) \approx 28 \sin(\omega t + 90°)$ V



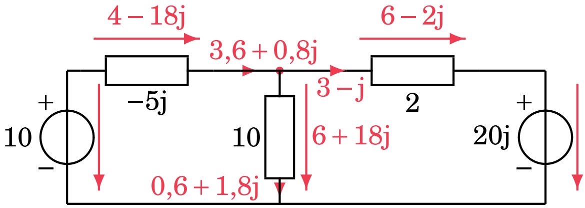
$$-E_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}(I_2 + I) + R_2 I_2 = 0 \qquad -R_2 I_2 + R_1 I + E_2 = 0$$

Tulokset

Kompleksiluvut ja sinimuotoiset lausekkeet toteuttavat Kirchhoffin lait

Osoitinlaskennan käytännön laskutoimituksia ja tulosten tulkintaa on selitetty tarkemmin laskuharjoituksissa ja kirjassa.

$$\mathrm{KCL}: (3{,}6+0{,}8\mathrm{j}) = (3-\mathrm{j}) + (0{,}6+1{,}8\mathrm{j}) \qquad \mathrm{KJL}: -(6+18\mathrm{j}) + (6-2\mathrm{j}) + 20\mathrm{j} = 0$$



$$I = 3-\mathrm{j} = 3{,}16\angle -18{,}4^\circ \text{ A}$$

$$i(t) = 4{,}47\sin(\omega t - 18{,}4^\circ)\text{ A}$$

Tulosten tulkinta

Kompleksiluku vastaa tiettyä ajan funktiota sopimukseen perustuen!