

SÄHKÖTEKNIikka JA ELEKTRONIIKKA

tXt-3 2017, Kimmo Silvonen

Osa III, 2.10.2017

1 Jaksolliset vaihtovirrat

Jaksollisuus tarkoittaa sitä, että funktio toistuu tietyin välein aina samanmuotoisena. Esimerkiksi siniaalto, sakara-aalto sekä sahanterä- ja kolmioaalto ovat jaksollisia, mutta mielivaltainen bittijono tai kohina eivät ole. Jaksollinen aaltomuoto koostuu aina sinimuotoisten termien eli taajuuskomponenttien summasta; sen matemaattinen malli on Fourier-sarja. Lineaarisisä piireissä jaksollisia signaaleja voidaan tutkia yksi taajuuskomponentti kerrallaan käyttäen osoitinlaskentaa. Toinen mahdollisuus on tarkastella piiriä aika-alueessa, mikä onkin lähes ainoa mahdollisuus voimakkaasti epälineaaristen piirien käsittelyyn.

1.1 Tehollisarvo, keski- ja hetkellisarvot

Kun puhutaan virran tai jännitteen voimakkuudesta, on määriteltävä, tarkoitetaanko tehollisarvoa, huippuarvoa, huipusta huippuun -arvoa vai jokin muuta tunnuslukua. Kolme tärkeää signaalin amplitudia kuvaavaa suuretta, **keskiarvo** U_{av} (keskimääräinen korkeus), **tasasuuntauskeskiarvo** U_r (tasasuunnatun jännitteen keskimääräinen korkeus) ja **tehollisarvo** U_{eff} , määritellään seuraavasti:

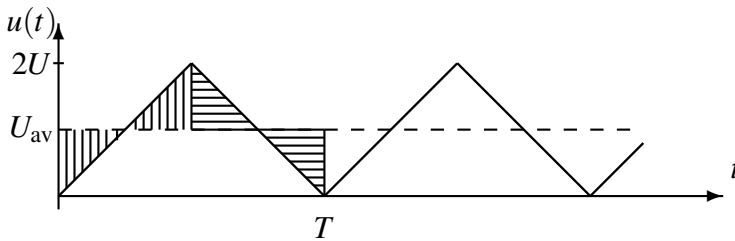
$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt \quad (1)$$

$$U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |u| \, dt \quad (2)$$

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt \Rightarrow U_{\text{eff}} = U_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \quad (3)$$

missä $u = u(t)$ on jännitteen tai muun signaalin **hetkellisarvo** ajan funktiona. Kiinnitä huomiota määrittelykaavojen eroihin, mutta ennen kaikkea niiden yhtäläisyyksiin: tasasuuntauskeskiarvo on itseisarvokäyrän keskimääräinen korkeus ja tehollisarvo toiseen korotetun käyrän keskikorkeus — tietysti siis neliöjuuri siitä.

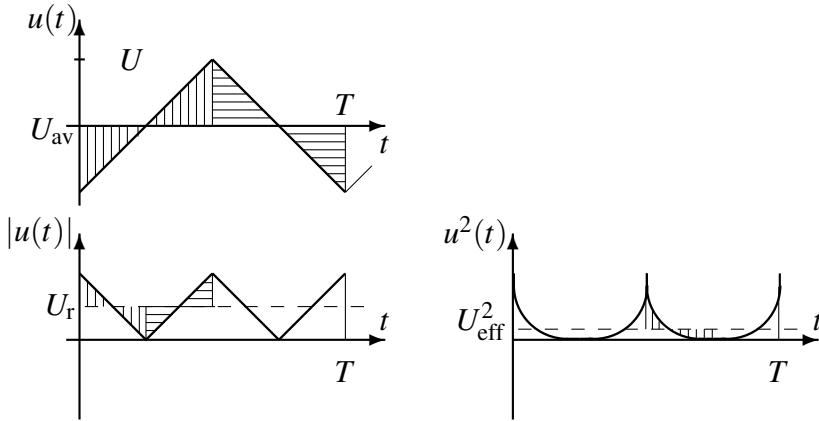
Edellä mainitun keskiarvon U_{av} laskentaa voidaan helposti havainnollistaa "**hiekkakakkumallin**" avulla. Otetaan esimerkiksi kolmioaalto (kuva 1).



Kuva 1. Kolmioaalto, jonka tasa(jännite)komponentti on $U_{\text{av}} = U$ ja huipusta huippuun -arvo $2U$.

Jos kuvassa olevat "hiekkakakut" lanataan tasaiseksi, asettuu hiekan pinta katkoviivan eli keskiarvon kohdalle. Jännitteen tai virran **keskiarvo** tarkoittaa sen tasa(virta)komponenttia. Puhtaan vaihtovirran keskiarvo on nolla, koska negatiiviset ja positiiviset pinta-alat ovat yhtä suuret. Usein termillä *keskiarvo* tarkoitetaan kuitenkin tasasuuntauskeskiarvoa. Englanninkielisissä teksteissä ei yleensä tehdä eroa keskiarvon ja tasasuuntauskeskiarvon välillä — asiayhteys määrää, kumpaa tarkoitetaan.

Tasasuuntauskeskiarvo (kuva 2) muodostuu samoin kuin keskiarvo, mutta tarkasteltavasta funktiosta otetaan ensin **itseisarvo**, jolloin aika-akselin alapuoliset osat kääntyvät positiiviselle puolelle (vrt. kokoaaltotasasuuntaus).



Kuva 2. Keskiarvon U_{av} , tasasuuntauskeskiarvon U_r ja tehollisarvon U_{eff} vertailu. Tehollisarvo on myös eräänlainen keskiarvo: U_{eff}^2 on toiseen korotetun käyrän keskimääräinen korkeus (pahoittelen epätarkkaa käyrämuotoa).

Tehollisarvoa laskettaessa korotetaan jännite ensin toiseen potenssiin, koska teho on **verrannollinen** (\propto) jännitteen neliöön eli $p \propto u^2$. Toiseen korotetusta jännitteestä etsitään sitten vastaavasti keskiarvo (kuva 2). Funktiosta lasketaan siis **neliökeskiarvo**. Negatiiviset ja positiiviset osat vaikuttavat tehollisarvoon yhtä paljon.

Alaindeksi **rms** tulee sanoista *root-mean-square* eli neliöjuuri-keskiarvo—toiseen korotus — juuri niin kuin kaava määrittelee. Tehollisarvon kaava voidaan johtaa esimerkiksi vastuksen energiankulutuksen avulla lähtien hetkellisestä tehosta $p(t)$. Lasketaan energia W jakson aikana:

$$W = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T \frac{u(t)^2}{R} dt \quad (4)$$

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{RT} \int_0^T u(t)^2 dt = \frac{U_{eff}^2}{R} \quad (5)$$

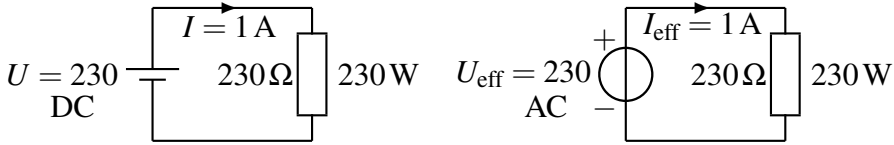
missä P on keskimääräinen teho jakson aikana.

Jaksollisen aaltomuodon tehollisarvo voidaan laskea myös eritaajuisien jännitekomponenttien tehollisarvoista U_i (huomaa, että Fourier-sarjan kertoimet \hat{u}_i ovat jännitekomponenttien huippuarvoja):

$$U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{\sum U_i^2} = \sqrt{U_{av}^2 + \frac{1}{2} \sum \hat{u}_i^2} \quad (6)$$

Tehollisarvo voidaan tulkita siten, että vaihtovirran keskimääräinen läm-

mittävä vaikutus vastuksessa on yhtä suuri kuin tehollisarvoltaan samansuuruisen tasavirran (kuva 3).



Kuva 3. Vastuksessa lämmöksi muuttuva teho eli vastuksen kuluttama teho määräytyy nimenomaan jännitteen tai virran tehollisarvon perusteella. Vastus ottaa tasavirralla (vasemmalla) koko ajan 230 W tehoa, mutta vaihtovirralla (oikealla) se ottaa yhden tai useamman jakson aikana **keskimäärin** 230 W tehoa. Huomaa, että oikealla olevaa jännitelähteen piirrosmerkkiä käytetään sekä tasaa että vaihtojännitteellä, mutta vasemmalla oleva merkki on aina tasajännitelähde.

Lasketaan sinimuotoisen virran tai jännitteen $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi)$ tunnusluvut: keskiarvo, tasasuuntauskeskiarvo ja tehollisarvo. Integroinnissa kannattaa valita kulman arvoksi $\varphi = 0$, koska se ei vaikuta lopputuloksen yleispätevyyteen (φ määrää vain sinin nollakohdat aika-akselilla, φ :n muuttaminen vastaa aika-akselin nollakohdan siirtämistä), mutta se ei tässä muuttaisi vastauksia.

$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \sin \omega t \, dt = 0 \quad (7)$$

$$U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{u} \sin \omega t| \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \hat{u} \sin \omega t \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} = \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}}_{\frac{1}{1,11}} \cdot U_{eff} \quad (8)$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{u}^2 \sin^2 \omega t \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{u}^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \, dt} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

Yllä esitettiin vain integroinnin lopputulokset ilman välivaiheita. Puhtaan siniaallon keskiarvo on siis nolla, mutta tasasuuntauskeskiarvo $U_r = 2\hat{u}/\pi$ (vrt. kokoaaltotasasuunnatun sinin Fourier-sarja). Mahdollinen tasajännitekomponentti U_{DC} korottaisi sinilläkin keskiarvoa ja tasasuuntauskeskiarvoa juuri U_{DC} :n verran, mutta tehollisarvo lasketaan neliöllisesti:

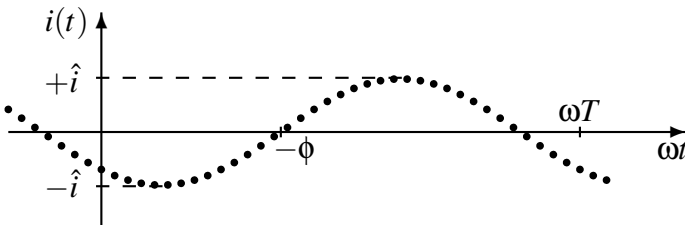
$$U_{eff} = \sqrt{U_{DC}^2 + (\hat{u}/\sqrt{2})^2} \quad (10)$$

Puhtaan **siniaallon tehollisarvo** saadaan jakamalla sen huippuarvo neliöjuurikahdella ($U_{\text{eff}} = U = \hat{u}/\sqrt{2}$). Siniaallon tehollisarvoa merkitään usein pelkällä U :lla. **Huipusta huippuun -arvo** on $u_{\text{pp}} = 2\hat{u}$, missä \hat{u} on siis **huippuarvo**. Joskus huippuarvoa merkitään U_m , V_m tai I_m , missä alaindeksi tulee sanasta *maximum* tai *maksimi*.

1.2 Sinimuotoinen virta ja jännite

Siniaallon merkitys signaalien käsittelyssä ja sähköenergian tuotannossa on suuri. Jaksollisten virtojen ja jännitteiden käsittely perustuu lineaarisissa piireissä sinimuotoisten signaalien laskutekniikkaan mm. seuraavista syistä:

- Laskutoimitukset sinimuotoisilla signaaleilla ovat suhteellisen helppoja. Vaihtoehtoinen tapa laskea ajan funktiona on tietokoneellekin raskasta.
- Kaikki jaksolliset aaltomuodot voidaan käsitellä sinimuotoisten termien avulla Fourier-sarjana
- Lineaarisissa piireissä sinimuotoinen heräte tuottaa myös sinimuotoiset vasteet.



Kuva 4. Sinimuotoinen virta tai jännite; huippuarvon \hat{i} , (nolla)vaihekulman $\phi = \varphi$ ja jaksonajan T määrittely. Kulmataajuudella ω kerrottu aika-akseli on käytännössä kulma-akseli ($\omega T = 360^\circ$). Huomaa nollavaihekulman etumerkit kuvassa ja funktiossa; kun $\omega t = -\phi$, on $\sin(\omega t + \phi) = 0$. Vaaka-akselin piste $-\phi$ katsotaan yleensä nimenomaan siitä kohdasta, jossa käyrä lähimpänä origoa nousee vaaka-akselin yläpuolelle; haluttaessa siihen voidaan kuitenkin lisätä ± 360 asteen monikertoja.

Sinimuotoinen virta tai jännite ajan funktiona on kuvan 4 merkinnöin:

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \phi) \qquad \omega = 2\pi f \qquad (11)$$

missä ω (omega) on **kulmataajuus** ($1/s = \text{rad/s}$). **Taajuuden** f yksikkö on hertsi ($\text{Hz} = 1/s$, Heinrich Rudolf Hertz). Huomaa, että kulmataajuuden yksikkö ($1/s$) ei ole hertsi, vaikka se matemaattisesti onkin näennäisesti "yhtä suuri". Tarkkaan ottaen kulmataajuuden yksikkö on *radiaania sekunnissa*, missä radiaani-yksikkö voidaan yleisen käytännön mukaan jättää mainitsematta.

Eriilaisten signaalien taajuuksia ja aallonpituuksia on koottu taulukkoihin 1, 2, 3 ja 5. Jaksollisen signaalin **aallonpituutta** λ (lamda tai lambda) metreinä, **aallon nopeutta** v (m/s, usein valon nopeus) ja taajuutta yhdistää kaava

$$v = \lambda f \quad (12)$$

Aallon korkeus \hat{i} (*i*-hattu tai hattu-*i*) on virran **huippuarvo** ja kulma ϕ eli φ on **nollavaihekulma** tai lyhyesti **vaihekulma**. Vakiintunut nimitys *i*-hattu on sikäli väärä, että kyseinen merkki on *sirkumfleksi*. Hatun pitäisi olla kärki alaspäin, jolloin se ei tosin muistuta lakkia eikä pipoa; englannissakin tästä käytetään nimitystä *hat i*.

Virta ajan t funktiona $i(t)$ eli lyhyesti i on virran **hetkellisarvo**. Kuvasa 4 vaihekulma $\phi = -135^\circ$, koska yksi "kupu" vastaa 180 astetta. **Huipusta huippuun -arvo** i_{pp} (*peak-to-peak*) on kaksi kertaa huippuarvon korkuinen. **Jaksonaika** eli jakson pituus tai **periodi** on taajuuden käänteisluku:

$$T = \frac{1}{f} \quad (13)$$

Se on kahden samassa vaiheessa olevan kohdan aikaero (esim. kaksi hetkeä, joilla jännite **nousee** nollan yli).

Koska aika-akselin nollakohta on sopimuskysymys, on vaihekulmalla merkitystä vain silloin, kun erivaiheisia sinimuotoisia signaaleja summataan tai verrataan toisiinsa. Kannattaa huomata, että tulo $\omega t = 2\pi f t$ rad edustaa myös **kulmaa** (radiaaneina). Sinimuotoinen jännite tai virta on ωt :n muuttuessa vuorotellen positiivista ja negatiivista. Esimerkiksi virran kulkusuunta vaihtuu siis kaksi kertaa jakson aikana. Edestakaisin kulkevat elektronit eivät kuitenkaan hankaa johtoa puhki. Hetkellisarvo on itseisarvoltaan korkeintaan huippuarvon suuruinen. Taulukkoon 4 on koottu **verkkovirran** eli 230 voltin 50 hertsin siniaallon tärkeimmät tunnusluvut.

Taulukko 1. Eräiden signaalien ja sähkömagneettisten aaltojen taajuuksia. Digi-TV:n kaista on 470 ... 790 MHz.. Analogiatelevisiolle varatut taajuuskaistat (megahertseinä) olivat: 54 ... 72, 76 ... 88, 174 ... 216 ja 470 ... 890. Aiemmin yleisemmät AM-yleisradiokaistat jaettiin pitkiin aaltoihin (0,15 ... 0,3 MHz), keskipitkiin (0,375 ... 1,5 MHz) ja lyhyihin aaltoihin (3,75 ... 30 MHz). RFID *Radio Frequency Identification* on etätunnistusta radioaaltojen avulla. Innokkaan tutkimuksen kohteena oleva, radioaaltojen ja näkyvän valon väliin jäävä terahertsialue on vaikeasti hyödynnettävä, vielä lähes käyttämätön luonnonvara.

	Taajuus (Hz)		Taajuus (Hz)
sähköverkko	50 (60)	RFID (MHz)	2450/868-956/13,56/0,125-0,134
(lanka)puhe(lin)	300 ... 3000	mikroaaltouuni	2,45G
audiotaaajuudet	(16) 20 ... 20 000	näkyvä valo	0,395...0,77 · 10 ¹⁵
AM-radio	0,15M ... 30M	ultravioletti UV	0,77 · 10 ¹⁵ ... 10 ¹⁸
FM-radio (ULA)	87,5M ... 108M	Röntgen-säteet	10 ¹⁶ ... 10 ²¹
GSM-puhelin (MHz)	890 ... 915, 1710 ...	γ-säteet	10 ¹⁸ ... 3 · 10 ²²
	1785, 1805 ... 1880	kosmiset säteet	10 ²² ...

Valosta puhuttaessa olisi yksikäsitteisempää ilmoittaa aallonpituuden sijaan taajuus, koska se ei riipu väliaineesta; esimerkiksi ilmasta lasiin siirryttäessä aallonpituus lyhenee taitekertoimien suhteessa, mutta taajuus ei muutu. Ihmissilmän herkkyysmaksimi osuu päivänvalossa n. 555 nm:n aallonpituudelle, mutta hämärässä vain vähän 500 nm:n yläpuolelle ($f \approx 600$ THz). Toiminta muistuttaa RGB-järjestelmää: laajakaistaisten reseptorien herkkyysmaksimit ovat 420, 534 ja 564 nm aallonpituuksilla (ilmassa); kaksi jälkimmäistä reseptoria ovat aktiivisia lähes koko näkyvän valon alueella. Riihimäellä syntynyt Ragnar Granit sai lääketieteen Nobel-palkinnon v. 1967 näiden Hermann von Helmholtzin ennustamien reseptorien löytämisestä. Hyönteissilmän maksimiherkkyys on sinivihreällä noin 550 nm ja vähemmässä määrin sinisellä 440 nm:n aallonpituudella. Lisäksi UVA-aluetta (maksimi 360 ... 365 nm) havainnoi vain yksi solu jokaista silmän linssiä kohti. Silti UVA-näön merkitys on suuri, koska se auttaa pimeässä liikkuvia lajeja löytämään vapaita lentoreittejä (ultraviolettivalo houkuttelee hyönteisiä tehokkaammin kuin "lämpimän" valon lähteet).

Taulukko 2. Infrapunan, näkyvän valon ja ultraviolettivalon aallonpituuksia **il-**massa ja tyhjiössä.

	Aallonpituus tyhjiössä (nm)		Aallonpituus tyhjiössä (nm)
Kaukoinfrapuna FIR	15000 ... $1 \cdot 10^6$	punainen	620 ... 750
IR-C	3000 ... $300 \cdot 10^3$	oranssi	590 ... 620
IR-B	1400 ... 3000	keltainen	570 ... 590
IR-A	780 ... 1400	vihreä	495 ... 570
Lähi-infrapuna NIR	750 ... 1400	sininen	450 ... 495
Näkyvä valo	390 ... 700	violetti	380 ... 450
UV-A	315 ... 380	RGB Red	650nm / #FF0000
UV-B	280 ... 315	RGB Blue	473nm / #0000FF
UV-C	100 ... 280	RGB Green	532nm / #00FF00

Taulukko 3. Tärkeimmät radiotaajuusalueet. RF-taajuuksien tarkka määritelmä ei ole vakiintunut; joskus RF-taajuusalueeksi rajataan esimerkiksi 150 kHz - 1 GHz, mutta nykyisin alueen yläraja on käytännössä nostettu mikro- tai millimetriaaltoalueelle asti.

Taajuusalue	Taajuus (Hz)	Taajuusalue	Taajuus (GHz)
d.c.	0	L	1 ... 2
ELF (<i>extremely l.f.</i>)	3 ... 30	S	2 ... 4
SLF (<i>super l.f.</i>)	30 ... 300	C	4 ... 8
ULF (<i>ultra l.f.</i>)	300 ... 3000	X	8 ... 12
VLF (<i>very l.f.</i>)	3000 ... 30k	K _u	12 ... 18
LF (<i>low frequency</i>)	30k ... 300k	K	18 ... 27
MF (<i>medium f.</i>)	300k ... 3M	K _a	27 ... 40
HF (<i>high frequency</i>)	3M ... 30M	U	40 ... 60
VHF (<i>very h.f.</i>)	30M ... 300M	V	60 ... 80
UHF (<i>ultra h.f.</i>)	300M ... 3G	W	80 ... 100
SHF (<i>super h.f.</i>)	3G ... 30G		
EHF (<i>extra h.f.</i>)	30G ... 300G	Bluetooth	2,402 ... 2,480
mikroallot	n. 1G ... 30G	WIFI, WLAN	2,4-2,5 ja 5-6
millimetriaallot	30G ... 1T	WIMAX	3,5

Vaikka vaihtovirran suunta vaihtelee, on jännitteen ja virran suuntanuolten suunnilla silti merkitystä. Nuolen suunta tarkoittaa jännitteen tai virran suuntaa niillä aikaväleillä, joilla $\sin(\omega t + \phi)$ on positiivinen. Vaihtovirralla tai vaihtojännitteellä suuntanuolen kääntäminen merkitsee 180° lisäämistä tai vähentämistä kulmasta ϕ . Miinusmerkki lausekkeen edessä ajaisi saman asian.

Taulukko 4. Verkkojännitteen (*mains voltage*) tunnuslukuja.

Suure	symboli	lukuarvo	määritelmä
Tehollisarvo	U	230 V	$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$
Huippuarvo	\hat{u}	325 V	$\hat{u} = \sqrt{2}U$
Huipusta huippuun -arvo	\hat{u}_{pp}	650 V	$\hat{u}_{pp} = 2\hat{u}$
Keskiarvo	U_{av}	0 V	$\frac{1}{T} \int_0^T u dt$
Tasasuuntauskeskiarvo	U_r	207 V	$U_r = \frac{2}{\pi} \hat{u}$
Taajuus	f	50 Hz	$f = \frac{1}{T}$
Jaksonaika	T	20 ms	$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$
Kulmataajuus	ω	314 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$\omega = 2\pi f$

Taulukko 5. Nuottitaajuudet keskimmaisessä oktaavissa (tasavireinen sävelasteikko); muiden oktaavien taajuudet saadaan joko jakamalla tai kertomalla taajuus kahdella, neljällä, jne. Koska soittimet viritetään toisiinsa nähden samalle äänenkorkeudelle, voivat taajuudet käytännössä poiketa taulukkoarvoista 1-2 prosenttia, mutta taajuuksien keskinäiset suhteet pysyvät tarkkoina (kerroin $2^{\frac{1}{12}}$). Priimiä, kvarttia, kvinttiä ja oktaavia sanotaan puhtaiksi intervalleiksi, koska niissä taajuuksien suhteet ovat tasalukuja 1:1 (c-c), 4:3 (c-f), 3:2 (c-g), 2:1 (c-c); suuria intervalleja ovat sekunti (c-d), terssi (c-e), seksti (c-a) ja septiimi (c-h). Vuonna 1885 sovittiin Wienissä yksiviivaisen a:n (Helmholtzin oktaavimerkintä) taajuudeksi 435 Hz, mutta käytännössä se on nykyisin ryömintä 440 hertsiin.

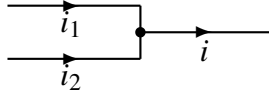
Nuotti	Taajuus (Hz)	Nuotti	Taajuus (Hz)	Nuotti	Taajuus (Hz)
c	261,63	e	329,63	gis	415,30
cis	277,18	f	349,23	a	440
d	293,66	fis	369,99	ais	466,16
dis	311,13	g	392,00	h	493,88

Vaikka isäni oli Polyteknikkojen kuorossa, en koulussa tai myöhemmin kukaan oppinut laulamaan. Tähän oli yhtenä syynä se, ettei taajuuksista puhuttu musiikkitunneilla mitään — luulin, että "puhdas lauluääni" tarkoittaa mahdollisimman kimeää ääntä!

1.3 Jatkuvan siniaallon käsittely ajan funktiona

Sinimuotoisilla vaihtovirroilla laskeminen **ajan funktiona** on hieman hankalaa. Myöhemmin esiteltävä osoitinlaskenta on paljon helpompaa. Vertailun vuoksi lasketaan kuitenkin yksi esimerkki ensin ajan funktiona ja myöhemmin uudestaan osoitinlaskennalla.

Virrat $i_1 = 10 \sin \omega t$ ja $i_2 = 20 \sin(\omega t + \phi)$ summataan kuvan 5 solmupisteessä. Lasketaan esimerkkinä summavirran $i = A \sin(\omega t + \theta)$ itseisarvo ja vaihekulma, jos $\phi = 30^\circ$.



Kuva 5. Sinimuotoisten virtojen summautuminen solmupisteessä.

Koska i_1 ja i_2 ovat erivaiheisia, ei huippuarvoja eikä tehollisarvoja saa laskea suoraan yhteen, vaan avuksi on otettava trigonometrian yhtälöitä.

$$i = i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 10 \sin \omega t + \underbrace{20 \sin(\omega t + \phi)}_{20(\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi)} \quad (14)$$

$$i = (10 + 20 \cos \phi) \sin \omega t + (20 \sin \phi) \cos \omega t \quad (15)$$

Yhdistettynä yllä olevat sini- ja kosinitermit tuottavat sinimuotoisen lausekkeen, jonka huippuarvo on A , ja jonka vaihekulma on θ . Lasketaan lopuksi A :n ja θ :n arvot.

$$i = A \sin(\omega t + \theta) = \underbrace{(A \cos \theta)}_{(10+20\cos\phi)} \sin \omega t + \underbrace{(A \sin \theta)}_{(20\sin\phi)} \cos \omega t \quad (16)$$

$$\frac{A \sin \theta}{A \cos \theta} = \tan \theta = \frac{20 \sin \phi}{10 + 20 \cos \phi} = \frac{1}{2,732} \Rightarrow \theta = 20,10^\circ \quad (17)$$

$$A = \frac{20 \sin \phi}{\sin \theta} = 29,09 \quad (18)$$

$$i(t) = 29,09 \sin(\omega t + 20,10^\circ) \quad (19)$$

Aika työlästä — siksi kannattaakin opetella laskemaan kompleksiluvuilla! Myöhemmin lasketaan kelan jännite ensin osoitinlaskennalla ja sitten vertailun vuoksi differentiaaliyhtälön avulla **sinimuotoisessa tapauksessa**. Ensin käsitellään kuitenkin osoitinlaskennan perusteita. Tästä se alkaa!

2 Osoitinlaskenta, kompleksiluvut

2.1 Yleistä höpinää

Sinimuotoisten lausekkeiden yhteen-, vähennys- ja kertolasku, sekä derivointi ja integrointi tuottavat myös sinimuotoisia lausekkeitä. Näistä yhteen- ja vähennyslasku liittyvät mm. Kirchhoffin lakeihin, kertolasku tehoon sekä derivointi ja integrointi kelaan ja konkkaan. Sinimuotoisten vaihtovirtojen käsittelyyn on kehitetty tehokas menetelmä: **osoitinlaskenta**. Osoitinlaskentaa voidaan soveltaa vain **lineaariin** (tai korkeintaan lievästi epälineaariin) piireihin ja sitä sovelletaan vain **yhdellä taajuudella** kerrallaan.

Jos lineaarisessa piirissä on useita taajuuksia yhtä aikaa (vrt. esimerkiksi suorakaide- tai kolmioaallon Fourier-sarjat), lasketaan jokaisella taajuudella tulokset erikseen. Eri taajuudet etenevät lineaarisessa piirissä toisistaan riippumatta ja sama pätee siis Fourier-sarjan termeihin. Eri taajuuksilla laskettuja tuloksia ei sellaisenaan saa laskea yhteen, vaan tulos esitetään jokaisella taajuudella erikseen tai mahdollisesti ajan funktiona yhtenä lausekkeena. Tarvittaessa on tietenkin mahdollista laskea esimerkiksi koko signaalin hetkellisarvo, tehollisarvo, keskiarvo tai tasasuuntauskeskiarvo. Tässä vaiheessa lukija voisi pikkuhiljaa ruveta **heräilemään**, koska nyt aletaan viimein päästä asiaan!

2.2 Kompleksinen virta ja jännite

2.2.1 Jos virta olisi kompleksiluku

Miten virta tai jännite voi olla kompleksinen? Lähdetään liikkeelle oleuksesta, että virta voitaisiin esittää kompleksiluvun eksponenttimuodossa (20), ja tutkitaan onko järkee vai ei. Jaetaan lauseke Eulerin (Leonhard Paul Euler) kaavalla reaali- ja imaginääriosiinsa:

$$\underline{I} = \hat{i} e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{i} [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \quad (20)$$

Alaviiva \underline{I} on kompleksiluvun tunnus. Tämän lausekkeen imaginaariosa olkoon kompleksilukua vastaava sinimuotoinen virta ajan funktiona, koska lauseke on juuri oikean muotoinen:

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} I_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi) \quad (21)$$

Yhtä hyvin olisi voitu valita reaaliosan kosinifunktio (ja näinhän itse asiassa tehdäänkin melkein kaikkialla muualla). Jatketaan kompleksiluvun tarkastelua:

$$\underline{I} = \hat{i} e^{j(\omega t + \phi)} = \hat{i} e^{j\omega t} e^{j\phi} = \sqrt{2} I_{\text{eff}} e^{j\omega t} (\cos \phi + j \sin \phi) \quad (22)$$

Jos viime mainittu virta viedään vastukseen kelaan tai kondensaattoriin, tapahtuu seuraavaa:

$$u_R = Ri = R I_{\text{eff}} (\cos \phi + j \sin \phi) \cdot \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (23)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = j\omega L I_{\text{eff}} (\cos \phi + j \sin \phi) \cdot \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (24)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{j\omega C} I_{\text{eff}} (\cos \phi + j \sin \phi) \cdot \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (25)$$

Koska kaikissa lausekkeissa toistuu sama kerroin $\sqrt{2} e^{j\omega t}$, se voidaan tavallaan ottaa yhteiseksi tekijäksi ja jättää kompleksilukutarkastelussa väliaikaisesti pois. Näin voidaan sopia esim. (kuten tässä tekstissä), että kompleksiluvun suuruus on virran tai jännitteen tehollisarvo:

$$\underline{I} = I_{\text{eff}} (\cos \phi + j \sin \phi) = I_{\text{eff}} \angle \phi \quad (26)$$

Tämä viimeinen esitysmuoto perustuu siis sopimukseen ja poikkeaa siksi hieman yhtälöstä (22).

2.2.2 Osoitinlaskenta

Osoitinlaskennassa virtaa ja jännitettä merkitään **kompleksiluvuilla** \underline{I} ja \underline{U} . **Tehollisarvon osoittimesta** käy ilmi suureen **tehollisarvo** (vaihtoehtoisesti huippuarvo) ja **nollavaihekulma**. Kysymyksessä on matemaattinen merkintätapa, jota on ehkä turha yrittää ymmärtää käytännössä — se on joka tapauksessa opeteltava ulkoa! Koska kulma ωt muuttuu kaikissa jännitteissä ja virroissa samalla tavalla, ei sitä tarvitse raahata mukana. Huom! t :tä ei kuitenkaan oleteta nollassi! Muunnoskaava ajan funktion ja kompleksiesityksen välillä perustuu yleisesti tunnettuun **sopimukseen** (josta tosin on kaksi versiota, toinen jäljempänä):

$$i = i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \phi) \iff \underline{I} = I \angle \phi = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \angle \phi \quad (27)$$

$$i(t) = \text{Im}[\hat{i} e^{j(\omega t + \phi)}] \quad (28)$$

missä I on virran **tehollisarvo**. Sama muunnoskaava soveltuu sekä virran, jännitteen että sähkömagnetiikan sinimuotoisten kenttäsuureiden yhteydessä käytettäväksi.

Tässä tekstissä osoitinlaskennan perustana on siis tehollisarvo ja **Eulerin kaavan imaginaariosa**. Ulkomaisissa teoksissa käytetään säännöllisesti huippuarvon osoittimia. Osoitinlaskenta perustuu tällöin yleensä Eulerin kaavan reaalisosaan, jolloin kompleksilukuja vastaavat aaltomuodot ovatkin kosinimuotoisia. Huom: seuraavaa vaihtoehtoista esitysmuotoa **ei käytetä tässä**:

$$i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \phi) \iff \underline{I} = \sqrt{2} I \angle \phi = \hat{i} \angle \phi \quad (29)$$

$$i(t) = \text{Re}[\hat{i} e^{j(\omega t + \phi)}] \quad (30)$$

Esitysmuotojen periaatteellinen ero on se, että siniaalto saa arvon nolla, mutta kosini maksimiarvonsa, kun $\omega t + \phi = 0$. Tämän voi tulkita eroksi aika-akselin nollakohdan valinnassa. Huomaa kuitenkin, että osoitinlaskenta tarkastelee jatkuvia suureita — ne eivät siis ala hetkellä nolla! Toinen eroavaisuus liittyy tarkasteltavan suureen suuruuteen: ensimmäisessä esityksessä kompleksiluvun pituus on jännitteen tai virran tehollisarvo, mutta jälkimmäisessä huippuarvo. Esitystavan valinta on kuitenkin pitkälti maakuasia. Fysikaalinen lauseke

$$u(t) = 5 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ V} = 5 \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ V} \quad (31)$$

voi siis tarkoittaa joko kompleksilukua

$$\underline{U} = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle +60^\circ \text{ V} \quad \text{tai} \quad \underline{U} = 5 \angle -30^\circ \text{ V} \quad (32)$$

Näistä ensimmäinen esitysmuoto on siis käytössä tässä tekstissä!

2.3 Kompleksiluvut ja imaginaariyksikkö

Kompleksiluvun voidaan määritellä olevan toisen asteen yhtälön ratkaisu yleisesti, mutta erityisesti silloin, kun **diskriminantti** on negatiivinen eli toisen asteen yhtälön ratkaisukaavassa $b^2 - 4ac < 0$. Tällöin yhtälöllä ei ole reaalisia juuria, mutta yhtälö ratkeaa avuksi otetun imaginaariyksikön j avulla ($j^2 = -1$).

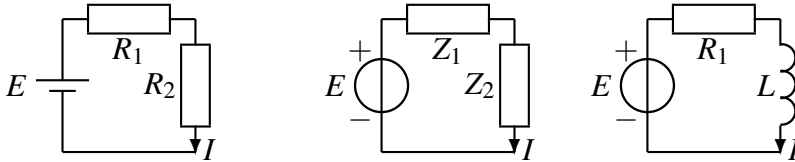
Kompleksiluvuilla on kaksi erilaista esitysmuotoa: edellä mainittu **kulmamuoto** $I \angle \phi$ ja **summamuoto**, jossa kompleksiluku esitetään vaaka- ja

pystykateetin avulla: $I_R + jI_X$. Näistä kerrotaan lisää vähän myöhemmin. Osoittimen (*phasor*) suuruus tarkoittaa virran tai jännitteen tehollisarvoa $I = \hat{i}/\sqrt{2}$ (tehollisarvon osoitin). **Alaviiva I** on kompleksiluvun tunnus. Tätä ei aina merkitä näkyviin, ellei ole tarvetta erityisesti korostaa, että kyseessä on kompleksiluku. Joskus kompleksilukuja merkitään yläviivala samalla tavalla kuin vektoreita. Toisaalta esimerkiksi kentänvoimakkuus voi olla yhtä aikaa osoitin ja vektori (sinimuotoinen suure, jolla on tietty suunta avaruudessa). Kansainvälisen käytännön mukaan imaginaari- eli **imaginaariyksikköä** merkitään sähkötekniikassa j :llä. Se on kuin kulma-
rauta, jonka tarkoituksena on tukea pystyssä törröttävää imaginaariosaa. Sähkötekniikan j on käytännössä sama kuin matematiikan i , tai ainakin $j = \pm i$ ja $j^2 = i^2 = -1$ (joidenkin lähteiden mukaan $j = -i$). Koska j ja i ovat vakioita, kirjoitan ne pystyfontilla, kuten lukuarvot ja mittayksiköt. Heh, ulkomaiset oppikirjat pitävät imaginaariyksikköä muuttujana.

Kompleksiosoitimesta ei taajuus ilmene mitenkään. Se onkin tiedettävä asiayhteyden perusteella tai ilmoitettava erikseen; laskeminen tapahtuu yhdellä taajuudella kerrallaan. Kompleksilukumuodossa lasketut tulokset voidaan lopuksi muuttaa takaisin ajan funktioiksi. Muunnos (27) on yksikäsitteinen molempiin suuntiin, mutta sitä voi käyttää vain, jos virta on jatkuva (eli ollut niin pitkään käynnissä, että muutosilmiöt ovat tasaantuneet). Ilmiö ei siis ala esimerkiksi hetkellä $t = 0$! Kytkentäilmiöitä ei osoitinlaskennalla pystytä ottamaan huomioon; sinimuotoistenkin jännitteiden ja virtojen kytkentäilmiöt on käsiteltävä differentiaaliyhtälöiden avulla.

Aika-akselin nollakohta "sovitaan" tehtäväkohtaisesti; nollakohdan siirtäminen siirtää myös kaikkia nollavaihekulmia. Nollavaihekulmalla ei siksi ole merkitystä, jos tarkastellaan vain yhtä jännitettä tai virtaa, jota ei verrata piirin muihin jännitteisiin tai virtoihin. Käytännössä on kuitenkin tärkeää laskea virran ja jännitteen nollavaihekulmat, jotta nähdään esimerkiksi niiden vaihe-erot suhteessa jännitelähteeseen.

Seuraavassa johdantoesimerkissä näytetään, miten virta voidaan laskea osoitinlaskennan avulla. Vertailukohdaksi on otettu vastaava tasavirtapiiri (vasen sarake). Oikealla esitetty osoitinlaskenta kompleksiluvuilla on kätevin tapa käsitellä sinimuotoisia virtoja ja jännitteitä. Ymmärrät oheisen esimerkin täysin vasta luettuasi seuraavat alaluvut!



Kuva 6. Osoitinlaskenta verrattuna tasavirtapiiriin (vasemmalla) käsittelyyn. Keskellä ja oikealla on sama piiri eri merkinnöin; E on sinimuotoinen vaihtojännitelähde.

Jännitelähde E voi tarkoittaa tasajännitettä tai sinimuotoisen vaihtojännitteen kompleksilukuvastinetta ($E = |E|\angle 0^\circ$). Impedanssia Z käytetään yhtälöissä samalla tavalla kuin resistanssia R . Oletetaan, että Z_2 on kela, jolloin sen impedanssi on $Z_2 = j\omega L$ (perustelu tulee myöhemmin).

$$E = R_1 I + R_2 I \qquad E = Z_1 I + Z_2 I = R_1 I + j\omega L I \qquad (33)$$

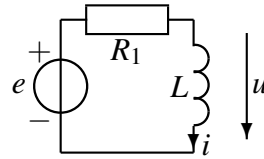
$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} \qquad I = \frac{E}{R_1 + j\omega L} = |I|\angle 0^\circ - \phi \qquad (34)$$

$$|I| = \frac{|E|}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} \qquad (35)$$

$$\phi = \arctan \frac{\omega L}{R_1} \qquad (36)$$

Jos jännitelähteellä E olisi jokin muu kulma kuin 0° , se summautuisi suoraan virran kulmaan kompleksilukujen jakolaskusäännön mukaan. Kompleksiluvun itseisarvo kuvaa virran tehollisarvoa, joka onkin usein paras tapa ilmoittaa virran suuruus. Huomaa kuitenkin, että myös nollavaihekulma on oleellinen osa lopputulosta. Itseisarvon laskennassa sovellettiin **Pythagoraan lausetta**. Virran tai jännitteen vaihekulma (tässä $-\phi$) riippuu aika-akselin nollakohdan valinnasta, mutta eri virtojen tai jännitteiden väliset vaihe-erot eivät siitä riipu.

Sinimuotoisilla lausekkeilla laskeminen (kuva 7) on huomattavasti työläämpää, vaikka lopputulos on sama. Seuraavassa esitettävä laskutapa **ei ole suositeltava!** Se voi kuitenkin auttaa asian ymmärtämistä.



Kuva 7. Saman piirin käsittely ajan funktiona.

Aika-akselin nollakohta valitaan sinin nollakohtaan, ettei jännitteelle $e(t)$ ei tarvita erillistä nollavaihekulmaa ($\phi_u = 0$). Lähdejännite ja virta ovat ajan funktioina

$$e(t) = \sqrt{2}|E| \sin \omega t \quad (37)$$

$$i(t) = \sqrt{2}|I| \sin(\omega t - \phi) \quad (38)$$

missä $|I|$ ja ϕ ovat tuntemattomia, mutta E ja ω oletetaan tunnetuiksi. Kulman edessä on miinusmerkki vain siksi, koska kirjaimella $\phi = \phi_u - \phi_i$ merkitään yleisesti jännitteen ja virran vaihe-eroa — sinänsä ϕ voi tapauksesta riippuen olla positiivinen tai negatiivinen; tässä piirissä se olisi kaikilla lukuarvoilla positiivinen. Sovitetaan sinimuotoisen virran amplitudi ja vaihesiten, että jänniteyhtälö toteutuu kaikilla ajan t arvoilla **jatkuvuustilassa**, jolloin muutosilmiöitä ei oteta tarkasteluun. Differentiaaliyhtälöiden avulla olisi mahdollista käsitellä muutosilmiöitäkin.

Kirchhoffin jännitelaki muodostaa differentiaaliyhtälön:

$$e = u_R + u_L = R_1 i + L \frac{di}{dt} \quad (39)$$

$$\sqrt{2}|E| \sin \omega t = R_1 \sqrt{2}|I| \underbrace{\sin(\omega t - \phi)} + L\omega \sqrt{2}|I| \underbrace{\cos(\omega t - \phi)} \quad (40)$$

$$|E| \sin \omega t = \quad (41)$$

$$R_1 |I| \underbrace{[\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi]} + L\omega |I| \underbrace{[\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi]}$$

$$|E| \sin \omega t = \quad (42)$$

$$\underbrace{[R_1 \cos \phi + L\omega \sin \phi]}_{m \sin t = |E|} |I| \sin \omega t + \underbrace{[L\omega \cos \phi - R_1 \sin \phi]}_{j \cos t = 0} |I| \cos \omega t$$

Yhtälön molemmilla puolilla tulee sinimuotoisten termien olla yhtä suuret. Koska vasemmalla puolella ei ole kosinimuotoista termiä, sen on myös

oikealla puolella oltava nolla (vrt. munat *mnt* ja jauhot *jht* taikinassa ja reseptissä; tästä on puhuttu luennoillani — ja joskus vielä niiden jälkeenkin).

$$|I| = \frac{|E|}{R_1 \cos \phi + L\omega \sin \phi} \quad (43)$$

$$L\omega \cos \phi - R_1 \sin \phi = 0 \Rightarrow \tan \phi = \frac{\omega L}{R_1} \quad (44)$$

Tarkistus; molemmissa tapauksissa pitää virran olla sama. Muokataan lausekkeen (35) nimittäjää:

$$\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R_1^2 + R_1^2 \tan^2 \phi} = \sqrt{R_1^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}\right)} \quad (45)$$

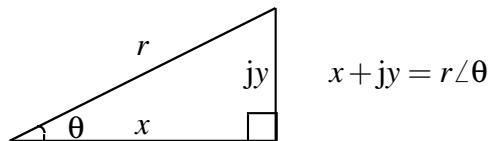
$$= \sqrt{R_1^2 \frac{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}} = \sqrt{R_1^2 \frac{1}{\cos^2 \phi}} = \frac{R_1}{\cos \phi} \quad (46)$$

$$= R_1 \frac{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}{\cos \phi} = R_1 \cos \phi + \underbrace{R_1 \tan \phi \sin \phi}_{\omega L} \quad (47)$$

Yhtälöiden (35) ja (43) nimittäjätkin ovat täten samat. Molemmat laskutavat johtivat siis samaan lopputulokseen, mutta käsittely kompleksiluvuilla oli joutuisampaa.

2.4 Koordinaatistomuunnokset

Kompleksiluvut esitetään **summamuodossa** $x + jy$ tai **kulmamuodossa** $r \angle \theta$. Summamuotoa nimitetään myös suorakulmaiseksi esitysmuodoksi (*rectangular*) ja kulmamuotoa polaariseksi (*polar*) eli napakoordinaatistomuodoksi. Siirtymistä muodosta toiseen kutsutaan koordinaatisto- tai polaarimuunnokseksi. Muunnos perustuu **suorakulmaisen kolmion** kaavoihin (kuva 8).



Kuva 8. Muunnos kulmamuodon ja summamuodon välillä suorakulmaisen kolmion avulla. Useimmissa laskimissa käytetään samoja kirjaimia: x , y , r , θ .

$$\begin{cases} x = A \cos \theta \\ y = A \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (48)$$

missä j on **imaginaariyksikkö**, kolmion **kateetit** x ja y ovat **reaali- ja imaginaariosat**, **hypotenuusa** r on kompleksiluvun **pituus** ja θ on hypotenuusan ja vaakakateetin välinen **kulma**. Muista tarkistaa laskimesta kulman esitystapa: *aste* vai *radiaani* — toivottavasti ei sentään *graadi*, joka on eräänlainen kulman kymmenjärjestelmä; $100 \text{ gr(d)} = 90^\circ$ ¹.

Yhteen- ja vähennyslasku ovat mahdollisia vain summamuodossa. Kerto- ja jakolaskut sopivat hyvin kulmamuotoon, mutta ne voidaan hyvin laskea summamuodossakin — varsinkin, jos lukuarvot ovat helpot.

Kaikkiin tavallisiin **funktio-laskimiin** on koordinaatistomuunnos ohjelmoitu valmiiksi; esimerkiksi näppäimet $R \rightarrow P$ & $P \rightarrow R$ tai $\rightarrow xy$ & $\rightarrow r\theta$. Koska muunnosta tarvitaan usein, se kannattaa opetella sujuvasti molempiin suuntiin; *kirvesmiehen kolmio* on hyvä laskuesimerkki:

$$3 + j4 = 5 \angle 53,13^\circ \quad (49)$$

Muunnos voisi olla esim. seuraava: $3 \mid x \leftrightarrow y \mid 4 \mid R \rightarrow P$ (laskin antaa 5) $\mid x \leftrightarrow y$ (laskin antaa kulman). Pystyviiva \mid erottaa edellä olevassa tekstissä peräkkäisiä näppäinten painalluksia. Merkki \updownarrow ja näppäimet $x \leftrightarrow y$ tai $x \leftrightarrow t$ tarkoittavat yleensä samaa: se vaihtaa näytössä ja muistissa olevat luvut keskenään. Joissakin laskimissa vastaava toiminta saadaan näppäinsekvenssillä INV RV. Toinen yleinen tapa: $3 \mid R \rightarrow P \mid 4 \mid =$ (laskin antaa 5). Tämän jälkeen kulma (tai imaginaariosa) saadaan jostain muistipaikasta, esim. ALPHA|F|EXE tai RCL|F (RCL = *recall*, F on usein tan-näppäimen yläpuolella); F:n tilalla voi joskus olla joku muu kirjain (esim. J, Y tai Z, käyttöohje tietää paremmin!). Jos laskimessa on muistipaikat a ja b, syötetään 3 ja 4 niihin, minkä jälkeen $\rightarrow r\theta$ antaa 5 (menee a:han) ja kulma ilmestyy muistipaikkaan b.

Ohjelmoitavissa laskimissa muunnos saatetaan kirjoittaa funktiomuodossa POL(3,4)|EXE (tulos: 5) tai REC(5,53.13)|EXE (tulos: 3). Huomaa, että kompleksiluvun osien erottimena käytetään rehellistä suomalaista pilkkua eikä desimaalipistettä; TI36X II -laskimesta pilkku löytyy jakomerkestä 2nd-funktiolla, vaikei sitä olekaan vaivauduttu merkitsemään

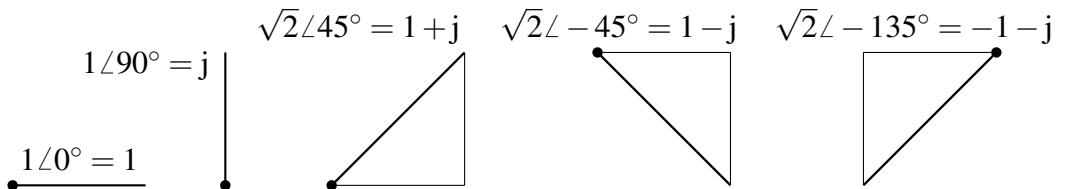
¹Vanhan vitsin mukaan Karjalainen sekoitti veden kiehumispisteen ja suoran kulman, mutta ehkä hän sekoittikin graadit ja asteet?

näppäimistöön². Joissakin laskimissa sulut on jätettävä pois, toisissa ne vaaditaan. Nykyisin yhä useammassa laskimessa muunnos on naputeltava kahteen kertaan, kun esim. r ja θ lasketaan eri funktioilla: $R \rightarrow \text{Pr}(3,4)$ ja $R \rightarrow \text{P}\theta(3,4)$ — typerää, eikö totta?!

Muutamit laskimet käyttävät raivostuttavaa eksponenttimuotoista esitystä kulmamuodon tilalla. Tätäkin esitystapaa olisi vielä melko helppoa käyttää, jos se olisi edes oikein ohjelmoitu, mutta näin ei ole! Kun laskimesta valitaan kulman esitysmuodoksi *deg*, se antaa myös eksponenttimuodossa kulman tietysti(?) asteina. Mutta kun itse syötät kompleksilukua tässä muodossa, kulma onkin annettava radiaaneina *deg*-valinnasta huolimatta! Tämä ohjelmointivirhe on kaikkien valmistajien tuotteissa.

Graafisissa laskimissa on yleensä omat omituiset rutiininsa, joita kannattaa etsiä esim. *ANGLE*-menusta (löytyy usein *OPTIONS*-näppäimen takaa). Joissain laskimissa näppäinsekvenssi *CPLX|MORE* tuo näytölle *REC*- ja *POL*-funktiot.

Eräissä laskinmalleissa tulee virheellisiä tuloksia, jos muunnoksen aikana tai juuri ennen sitä on laskettu välituloksia. Ennen muunnosta on syytä painaa *CLEAR* tai vastaavaa näppäintä. Yksinkertaisimmat muunnokset kannattaa opetella päättämään ilman laskimen apua (kuva 9). Lisää esimerkkejä koordinaatiston eri neljänneksissä olevista kompleksiluvuista on kuvassa 10.



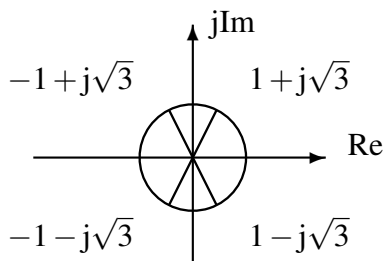
Kuva 9. Esimerkkejä hyvin yksinkertaisista koordinaatistomuunnoksista. Renkaalla on merkitty koordinaatiston nollakohta. Muutamia tavallisimpia arcustangentin arvoja oppii puoliväkinen ulkoa: $\arctan(1/2) = 26,6^\circ$, $\arctan(1/3) = 18,4^\circ$, $\arctan(1/4) = 14,0^\circ$, $\arctan(2/3) = 33,7^\circ$, $\arctan(3/4) = 36,9^\circ$, $\arctan(4/3) = 90^\circ - 36,9^\circ$, $\arctan(2 - \sqrt{3}) = 15^\circ$, $\arctan(\sqrt{2} - 1) = 22,5^\circ$, $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30^\circ$, jne.

Arcustangentin monikäsitteisyys aiheuttaa ongelmia, jos reaaliosa x on negatiivinen (kuva 10). Tällöin laskimen *atan*- eli \tan^{-1} -funktio antaa kul-

²Toki tästä asiasta huomauttaminen on pelkkää pilkun nussimista!

man systemaattisesti puoli kierrosta eli 180° virheellisenä.

$$\begin{aligned} -1 + j\sqrt{3} &= 2\angle(-60^\circ + 180^\circ) = 2\angle + 120^\circ & 1 + j\sqrt{3} &= 2\angle + 60^\circ \\ -1 - j\sqrt{3} &= 2\angle(60^\circ + 180^\circ) = 2\angle 240^\circ = 2\angle - 120^\circ & 1 - j\sqrt{3} &= 2\angle - 60^\circ \end{aligned}$$



Kuva 10. Reaali- ja imaginaariosan etumerkkien vaikutus kompleksiluvun sijaintiin kompleksitasossa. Esitysmuotoa kutsutaan joskus nimellä **Argand-diagrammi**. Kuvassa olevan ympyrän säde on $r = 2$; kyseiset neljä kompleksilukua ovat yhtä pitkiä (kaikilla on sama itseisarvo).

Kannattaa aina tarkistaa, että arcustangentilla laskettu kulma on reaali- ja imaginaariosien osoittamassa koordinaatiston neljänneksessä (kyseessä ei välttämättä ole arcustangentin päähaara): $\arctan\left(\frac{-y}{x}\right)$ ja $\arctan\left(\frac{y}{-x}\right)$ tarkoittavat eri kulmia, jotka ovat 180° päässä toisistaan, samoin $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ja $\arctan\left(\frac{-y}{-x}\right)$. Laskin ei välitä siitä, onko miinusmerkki osoittajassa vai nimittäjässä — jos se on molemmissa, laskin supistaa sen pois. Valmiissa muunnosohjelmissa tätä virhettä ei esiinny. Mm. eräissä ohjelmointikielissä arcustangentille on mahdollista antaa kaksi argumenttia (atan2), jolloin kyseistä ongelmaa ei myöskään tule.

2.5 Kompleksilukujen laskusääntöjä

Kompleksilukujen laskusäännöt oppii kunnolla vasta laskuesimerkkien avulla. Tähän on kuitenkin koottu yhteenveto tarvittavista laskusäännöistä. Maalaisjärkeä käyttämällä selviytyy yllättävän pitkälle. Tämän kurssin laskuissa tarvittavan kompleksiaritmetiikan oppii varsin helposti, vaikei olisikaan vielä perehtynyt kyseiseen aiheeseen matematiikassa. Vaikeimmat asiat, jotka kompleksilukuihin liittyvät, ovat trigonometriset funktiot! Otetaan esimerkiksi kompleksiluvut z_1 ja z_2 kolmessa eri esitysmuodossa,

ensin kuitenkin imaginaariyksikkö j :

$$j^2 = -1 \quad \frac{1}{j} = -j \quad (50)$$

$$z_1 = 4 + 2j = \sqrt{20} \angle 26,6^\circ = \sqrt{20} e^{j26,6^\circ} = \sqrt{20} e^{j \frac{\pi \text{ rad}}{6,776}} \quad (51)$$

$$z_2 = 3 + 1j = \sqrt{10} \angle 18,4^\circ = \sqrt{10} e^{j18,4^\circ} = \sqrt{10} e^{j \frac{\pi \text{ rad}}{9,764}} \quad (52)$$

Kolmas ja harvinaisempi esitystapa **summamuodon** ja **kulmamuodon** lisäksi on kompleksiluvun **eksponenttimuoto**. Eksponenttimuodossa kulman esittäminen radiaaneina on usein suositeltavaa ($26,6^\circ = 0,464 \text{ rad}$).

Merkintä $|z|$ tarkoittaa kompleksiluvun pituutta eli **itseisarvoa** eli **moduulia**. Luvun z_1 (**napa**)**kulma** eli **argumentti** on $26,6^\circ$. Reaali- ja imaginaariosat ovat $\text{Re}[z_1] = 4$ ja $\text{Im}[z_1] = 2$. Imaginaariyksikkö j on imaginaariosan tunnus, mutta se ei varsinaisesti kuulu imaginaariosaan. Muista, että **Re- ja Im-osia ei koskaan lasketa yhteen!**

$$\text{Mod}[z_1] = |z_1| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4,47 \quad (53)$$

$$\text{Arg}[z_1] = 26,6^\circ \quad (54)$$

$$\text{Re}[z_1] = 4 \quad (55)$$

$$\text{Im}[z_1] = 2 \quad (56)$$

Kompleksiluvun liittolukua tarvitaan mm. tehon laskennassa ja joskus murtolausekkeen laventajana, kuten yhtälössä (64). Luvun z **liittoluku** eli (**kompleksi**)**konjugaatti** on z^* , joka luetaan 'z-tähti'. Se saadaan vaihtamalla joko kulman tai vaihtoehtoisesti imaginaariosan etumerkki. Reaaliluvun liittoluku on luku itse; samoin positiivisen reaaliluvun itseisarvo ja reaaliosa ovat yhtä suuria kuin luku itse.

$$z_1^* = 4 - j2 = \sqrt{20} \angle -26,6^\circ = \sqrt{20} e^{-j26,6^\circ} \quad (57)$$

$$z_1 z_1^* = |z_1|^2 = 4^2 + 2^2 = (\sqrt{20})^2 \quad (58)$$

Lausekkeen liittoluku saadaan ottamalla sen jokaisesta tekijästä erikseen liittoluku:

$$\left(z_1 z_2 + \frac{z_3}{z_1} \right)^* = z_1^* z_2^* + \frac{z_3^*}{z_1^*} \quad (59)$$

Joskus kompleksiluvun itseisarvo joudutaan neliöimään ($|z|^2$), mutta **kompleksilukuja ei** ilman itseisarvomerkkejä **koroteta** käytännössä koskaan **toiseen!** Muista tämä: jos huomaat korottavasi kompleksilukua toiseen, olet parhaillaan laskemassa väärin!

Peruslaskutoimitukset on esitelty seuraavassa:

$$z_1 + z_2 = (4 + 3) + j(2 + 1) \quad (60)$$

$$z_1 - z_2 = (4 - 3) + j(2 - 1) \quad (61)$$

$$z_1 z_2 = (4 \cdot 3 - 2 \cdot 1) + j(4 \cdot 1 + 2 \cdot 3) \quad (62)$$

$$\sqrt{20}\sqrt{10}\angle(26,6^\circ + 18,4^\circ) = 10 + j10 \quad (63)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + j(2 \cdot 3 - 4 \cdot 1)}{3^2 + 1^2} \quad (64)$$

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}\angle(26,6^\circ - 18,4^\circ) = 1,4 + j0,2 \quad (65)$$

Summamuotoisessa jakolaskussa (64) lavennetaan ensin nimittäjän liittoluvulla, jolloin nimittäjään tulee puhdas reaaliluku (Pythagoraan lause), koska nimittäjän imaginaariosat kumoavat toisensa: $(3 + 1j)(3 - 1j) = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1j + 3 \cdot 1j - (1j)^2$. Reaaliosalla nimittäjällä voidaan nyt jakaa osoittajan reaaliosan ja imaginaariosan erikseen. Kulmamuotoisessa kertolaskussa kulmat lasketaan etumerkkeineen yhteen, mutta jakolaskussa ne vähennetään toisistaan. Jos kompleksiluvun kulma tai reaaliosan tai imaginaariosan on nolla, ei sitä tarvitse merkitä näkyviin (joskus se merkitään selvyuden vuoksi), esim:

$$10\angle 0^\circ = 10 + 0j = 10 \quad 10\angle 90^\circ = 0 + j10 = j10 \quad (66)$$

Lasketaan seuraavassa virtojen summa osoittimilla.

$$\begin{cases} i_1 = 10 \sin(\omega t + 0^\circ) & \Rightarrow I_1 = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \\ i_2 = 20 \sin(\omega t + 30^\circ) & \Rightarrow I_2 = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ \end{cases} \quad (67)$$

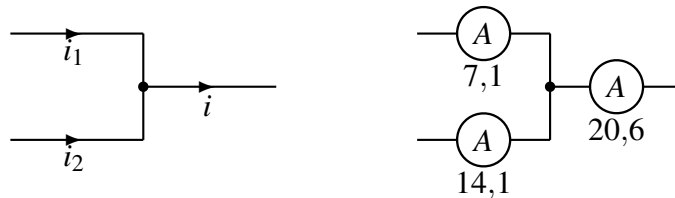
$$I = I_1 + I_2 = \frac{10}{\sqrt{2}} + \left(\frac{17,32}{\sqrt{2}} + j \frac{10}{\sqrt{2}} \right) = \frac{27,32}{\sqrt{2}} + j \frac{10}{\sqrt{2}} \quad (68)$$

$$I = \frac{29,09}{\underbrace{\sqrt{2}}_{20,57}} \angle 20,10^\circ \text{ A} \quad (69)$$

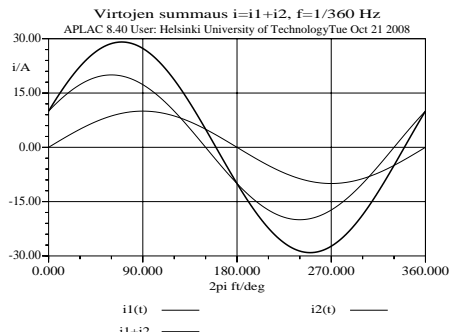
Yksikkö kirjoitetaan kulman jälkeen välilyönnillä erotettuna; tuloksen voi silti lukea muodossa 20,57 ampeeria kulmassa $20,10^\circ$. Tämän tuloksen perusteella voidaan virran hetkellisarvo laskea millä tahansa t :n arvolla seuraavasti:

$$i(t) = 29,09 \sin(\omega t + 20,10^\circ) \quad (70)$$

Asteina laskettaessa ω :n paikalle sijoitetaan $360^\circ \cdot f$, koska $2\pi = 2\pi \text{ rad}$. Jos johtimien virrat mitattaisiin, näyttäisivät mittarit virtojen tehollisarvoja (kuva 11), mutta eivät kulmia. Tuloksista luku 20,57 A olisi virtamittarin näyttämä ja $20,10^\circ$ kertoo sen, että virran i käyrä ylittää vaaka-akselin origon **vasemmalta** puolelta käyrien i_1 ja i_2 välissä.



Kuva 11. Virtamittarit näyttävät siniaallon tehollisarvoa; virtalaki KCL ei päde tehollisarvoilla.



Kuva 12. Virrat ajan funktiona. Tällä taajuudella aika t (sekunteina) on sama kuin kulma $\omega t = 2\pi f t$ asteina. Käyrät jatkuvat myös negatiivisen aika-akselin puolelle, vaikka sitä ei olekaan piirretty näkyviin.

Kirchhoffin lait pätevät kompleksiluvuilla ja hetkellisarvoilla, mutta eivät tehollisarvoilla (kuva 11) eikä huippuarvoilla. Kompleksilukutuloksen

perusteella saadaan tarvittaessa virran arvo millä tahansa hetkellä (kuva 12).

Virta ja jännite on havainnollisinta esittää **kulmamuodossa**. Reaali- ja imaginaariosalla erikseen ei virran ja jännitteen yhteydessä ole fyysikaalista vastinetta käytännössä. Asia on toisin impedanssista, admittanssista tai kompleksisesta tehosta puhuttaessa, kuten myöhemmin huomaamme. Vaikka tulos esitetäänkin yleensä kompleksilukuna, on syytä ymmärtää, millaista siniaaltoa se vastaa (70).

2.6 Vastus, kela ja kondensaattori

Ohmin laki on voimassa resistanssille myös esitettäessä virta ja jännite kompleksilukuina.

$$U = RI = Z_R I \quad (71)$$

missä **vastuksen impedanssi** $Z_R = R$ on yhtä suuri kuin vastuksen resistanssi R . Koska R on reaalin kerroin, ovat vastuksen virta ja jännite samassa vaiheessa: nollavaihekulmat ovat yhtä suuret. Sinimuotoisilla jännitteillä ja virroilla voidaan Ohmin laki yleistää pätemään myös kelalle ja kondensaattorille. Merkitään kelan virtaa ja kondensaattorin jännitettä kompleksiluvuilla:

$$I_L = \underbrace{|I|}_{\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}} e^{j(\omega t + \phi)} \quad U_C = \underbrace{|U|}_{\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}} e^{j(\omega t + \theta)} \quad (72)$$

missä $\omega = 2\pi f$ on kulmataajuus (yksikkönä rad/s), ϕ ja θ ovat mielivaltaiset nollavaihekulmat. Tällöin kelan jännite ja konkan virta ovat myös kompleksilukuja:

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt} = \underbrace{j\omega L}_{Z_L} \underbrace{|I| e^{j(\omega t + \phi)}}_{I_L} = Z_L I_L \quad (73)$$

$$I_C = C \frac{dU_C}{dt} = \underbrace{j\omega C}_{\frac{1}{Z_C}} \underbrace{|U| e^{j(\omega t + \theta)}}_{U_C} = \frac{1}{Z_C} U_C \quad (74)$$

Kertoimina esiintyvät **kelan ja kondensaattorin impedanssit**:

$$Z_L = j\omega L \quad (75)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \quad (76)$$

missä j :llä laventaminen muutti etumerkin. Vertailun vuoksi samat tulokset ajan funktiona:

$$u_L = L \frac{d}{dt} [\hat{i} \sin(\omega t + \phi)] = \omega L \underbrace{\hat{i} \cos(\omega t + \phi)}_{\hat{i} \sin(\omega t + \phi + 90^\circ)} \quad (77)$$

$$i_C = C \frac{d}{dt} [\hat{u} \sin(\omega t + \theta)] = \omega C \underbrace{\hat{u} \cos(\omega t + \theta)}_{\hat{u} \sin(\omega t + \theta + 90^\circ)} \quad (78)$$

Kelan jännitteen sanotaan olevan 90° virtaa edellä (kuva 13). Vastaavasti kondensaattorin jännite on 90° virtaa jäljessä; jännite voi kasvaa vasta kun virta on ensin varannut konkkaa. Kela pyrkii hidastamaan virran muuttumista, mikä luonnostaan johtaa siihen, että virta jää jännitteestä jälkeen. Englanninkielinen muistisääntö *CIVIL* kertoo kaiken: *konCassa I on V:tä edellä, mutta V on I:tä edellä keLassa.*

$$U_L = j\omega L I_L = \omega L I_L \angle 90^\circ \quad (79)$$

$$I_C = j\omega C U_C = \omega C U_C \angle 90^\circ \quad (80)$$

Kulmaksi tuli 90° , koska vaakakateetti on nolla. Derivointi voidaan tulkita siis $j\omega$:lla kertomiseksi ja integrointi $j\omega$:lla jakamiseksi.

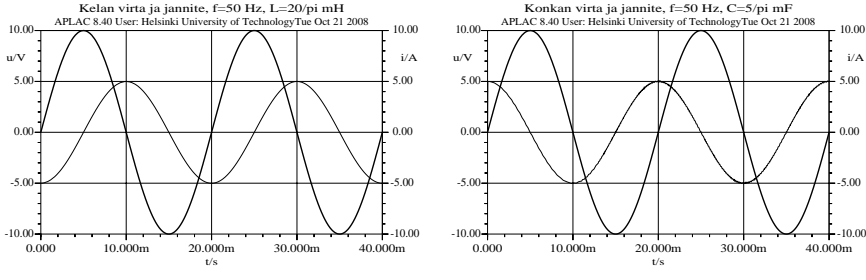
Usein käytetään lyhennettyä merkintää $s = j\omega$. **Kompleksinen taajuus** $s = \sigma + j\omega$ on oikeastaan Laplace-muuttuja. Puhtaasti sinimuotoisella signaalilla $\sigma = 0$. Kompleksisen taajuustason oikea puoli ($\sigma > 0$) vastaa eksponentiaalisesti kasvavia ja vasen puolitaso ($\sigma < 0$) eksponentiaalisesti vaimenevia siniaaltoja Eulerin kaavan mukaisesti:

$$e^{st} = e^{\sigma + j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (81)$$

Käytännössä jännitteeksi (virraksi) voidaan edellä olevasta kaavasta tulkita valinnan mukaan joko Re- tai Im-osa:

$$\text{Im}[\hat{u}e^{st}] = \hat{u} \sin \omega t \quad \text{Re}[\hat{u}e^{st}] = \hat{u} \cos \omega t \quad (82)$$

Tässä prujussa kompleksiluvut vastaavat siis sinimuotoista signaalia (Im-osa). Sini- ja kosinimuotoisilla signaaleilla ei ole muuta eroa kuin eri nollakohta aika-akselilla.



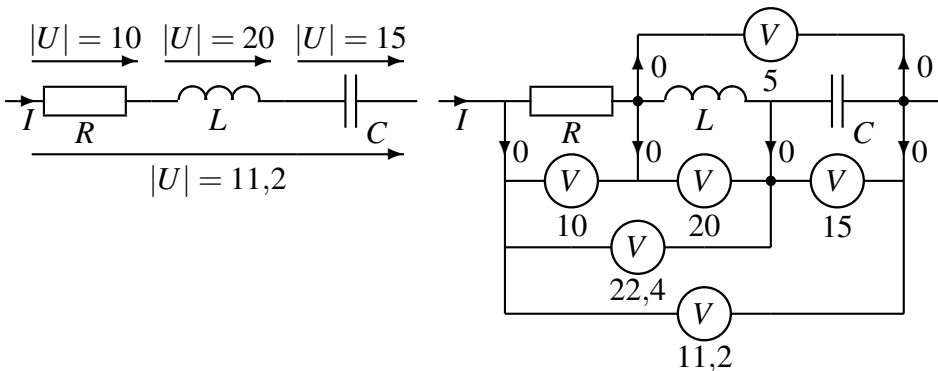
Kuva 13. Kelan ja kondensaattorin jännite ja virta ajan funktiona. Molemmissa kuvissa matalampi käyrä on virta. Sinimuotoisen jännitteen huippuarvo kuvassa on $\hat{u} = \sqrt{2}|U_L| = \sqrt{2}|U_C| = 10 \text{ V}$ ja nollavaihekulmat $\phi_{U_L} = \phi_{U_C} = 0^\circ$.

Myös Kirchhoffin jännitelaisissa on otettava huomioon jännitteiden vaihe-erot. Tarkastellaan kuvan 14 RLC-sarjaankytkentää. Olkoon virta $I = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$, $R = 10 \ \Omega$, $\omega L = 20 \ \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 15 \ \Omega$. Mittarilukemat on laskettu kuvaan kaavalla $U = |Z| \cdot |I|$. Jännitemittarin kautta ei kulje virtaa. Kirchhoffin jännitelaki pätee kompleksiluvuilla ja hetkellisarvoilla, mutta ei tehollisarvoilla eikä huippuarvoilla.

$$U = U_R + U_L + U_C = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) I = \left(10 + j20 + \frac{15}{j} \right) \cdot 1 \angle 0^\circ$$

$$U = (10 + j20 - 15j) = 10 + 5j = 11,2 \angle 26,57^\circ \text{ V} \quad (84)$$

Impedanssien sarjaankytkennän jännite (tehollisarvo 11,2 V) jää pienemmäksi kuin osajännitteiden tehollisarvojen summa, elleivät osajännitteet ole samanvaiheisia.



Kuva 14. Jännitemittarit näyttävät sinimuotoisessa tapauksessa jännitteen tehollisarvoa.

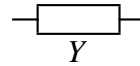
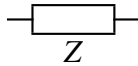
2.7 Impedanssi Z , admittanssi Y ja Ohmin laki

Vaihtovirtojen yhteydessä käytetään (taajuusalueessa laskettaessa) käsitteitä **impedanssi** Z (Ω) eli näennäisvastus ja **admittanssi** Y (S). Ne ovat yleisesti kompleksilukuja. Molempien piirrosmerkki on sama kuin vastuksella ja konduktanssilla (kuva 15), siksak-viiva ei kuitenkaan sovellu impedanssin tai admittanssin symboliksi, koska se on varattu puhtaalle resistanssille. **Yleistetyn Ohmin lain** mukaan:

$$U = ZI \qquad I = YU \qquad (85)$$

$$Z = R + jX \qquad Y = G + jB = \frac{1}{Z} \qquad (86)$$

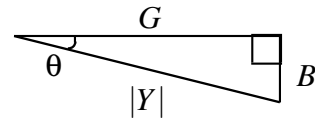
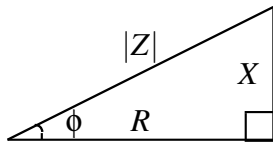
$R =$ **resistanssi** (pätövastus) ($\Omega = V/A$) $G =$ **konduktanssi** ($S = A/V$)
 $X =$ **reaktanssi** (loisvastus) ($\Omega = V/A$) $B =$ **suskeptanssi** ($S = A/V$)



Kuva 15. Impedanssin Z ja admittanssin Y piirrosmerkki on sama kuin vastuksen ja konduktanssin merkki.

Huomaa, että vaikka Z ja Y ovat kompleksilukuja, ovat R , X , G ja B reaali-lukuja. Tässä R ja G ovat **laajempia käsitteitä** kuin pelkkä vastus tai konduktanssi. Ne tarkoittavat kompleksisen lausekkeen reaalisia ja voivat usein olla taajuuden funktioita. Myös U ja I ovat kompleksisia eli osoitinsuureita. Impedanssin kulma tarkoittaa jännitteen ja virran välistä vaiheeroa $\phi_U - \phi_I$ kyseisessä komponentissa. Vastaavasti admittanssin kulma on $\phi_I - \phi_U$.

Reaali- ja imaginaariosia havainnollistetaan usein **impedanssi- ja admittanssikulmioilla** (kuva 16).



Kuva 16. Impedanssi- ja admittanssikolmiot. Kuvassa R , X ja G ovat positiivisia, mutta B on negatiivinen. Jos Z ja Y viittaavat samaan komponenttiin, on kuvan $\theta = -\phi$. Ellei kyseessä ole puhdas vastus, kela tai kondensaattori, on yleisesti $G \neq \frac{1}{R}$ ja $B \neq -\frac{1}{X}$.

Vastuksen, kelan ja kondensaattorin impedanssit ja admittanssit ovat siis:

$$Z_R = R \quad Y_R = G \quad (87)$$

$$Z_L = jX_L = j\omega L \quad Y_L = jB_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} \quad (88)$$

$$Z_C = jX_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \quad Y_C = jB_C = j\omega C \quad (89)$$

Impedanssin tai admittanssin käsitettä ja yleistettyä Ohmin lakia ei saa käyttää hetkellisten lukuarvojen kanssa, mutta sinimuotoisiin lausekkeisiin sitä voi soveltaa, jos ymmärtää j :n ja kulman välisen yhteyden: j :llä kertominen lisää kulmaan 90° ja j :llä jakaminen vähentää kulmasta saman verran. Passiivisten peruskomponenttien kaavoja on vertailtu taulukossa 6.

Huomaa, että j :llä laventaminen muuttaa etumerkin kaavoissa (88) ja (89), koska $j \cdot j = -1$. Impedanssi eli näennäisvastus Z ei ole täysin sama kuin vaihtovirtavastus, vaikka se käyttäytyykin monissa kaavoissa vastuksen tavoin. Vaihtovirtavastus liittyy oikeastaan johtimen pyörrevirtailmiöön: resistanssi kasvaa taajuuden kasvaessa.

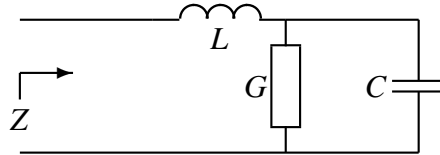
Tasavirtojen laskukaavoja ja -menetelmiä voidaan soveltaa myös sinimuotoisilla vaihtovirroilla. Impedanssi ja admittanssi vastaavat resistanssia ja konduktanssia. Jännitteet ja virrat täytyy tulkita kompleksiluvuiksi; tehon laskentaa käsitellään myöhemmin — tasavirralla käytetty tehon kaava ei enää täysin päde. Laskettaessa impedanssia tai admittanssia tulos esitetään tilanteesta riippuen joko summa- tai kulmam muodossa.

Immittanssi on impedanssin ja admittanssin yhteisnimitys, jota tarvitaan joskus mm. suodatinsuunnittelussa: samat lukuarvot voidaan valinnan mukaan tulkita impedansseiksi tai admittansseiksi, jolloin saadaan kaksi erilaista, mutta järkevästi toimivaa suodatinrakennetta.

Taulukko 6. Vastuksen R , kelan L ja kondensaattorin C ominaisuudet. *Taajuusalue* viittaa sinimuotoiseen tapaukseen. Koska $Z = R + jX$, tarkoittaa pystysarake R reaktanssin kanssa sarjassa olevaa resistanssia. Vastaavasti koska $Y = G + jB$, tarkoittaa sarake G susceptanssin rinnalla olevaa konduktanssia. Siksi esimerkiksi kelalla $R \neq \frac{1}{G}$.

	R	G	X	B	Z	Y	Taajuusalue	$u =$	Aika-alue	$i =$
R	R	$\frac{1}{R}$	0	0	R	$\frac{1}{R}$	$U = RI$	Ri	Gu	
L	0	0	ωL	$-\frac{1}{\omega L}$	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$	$U = j\omega LI$	$L \frac{di}{dt}$	$\frac{1}{L} \int_0^t u dt + i(0)$	
C	0	0	$-\frac{1}{\omega C}$	ωC	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$	$U = \frac{1}{j\omega C} I$	$\frac{1}{C} \int_0^t i dt + u(0)$	$C \frac{du}{dt}$	

Impedanssia laskettaessa (kuva 17) voidaan sarjaan kytketyt osaimpedanssit laskea yhteen. Vastaavasti rinnankytkennässä saadaan admittanssi laskemalla osa-admittanssit yhteen. Toinen mahdollisuus on käyttää vastusten rinnankytkennän kaavaa. $\omega L = \frac{1}{2} \Omega$, $G = 2 \text{ S}$ ($R = \frac{1}{2} \Omega$), $\omega C = 2 \text{ S}$. Älä unohda j :tä!



Kuva 17. Impedanssin laskeminen vastusten rinnan- ja sarjaankytkennän kaavoilla.

$$Z = j\omega L + \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (90)$$

Seuraavaksi voidaan tehdä ns. **kerrossiivous** eli siivotaan yläkerta ja alakerta. Lavennetaan jälkimmäinen termi $j\omega C$:llä kerroksellisuuden poistamiseksi. Tämä helpottaa yleensä lukuarvojen käsittelyä ja tekee lausekkeesta selkeämmän.

$$Z = j\omega L + \frac{R}{j\omega CR + 1} = j\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{j + 1} \quad (91)$$

Rinnankytkentää voidaan käsitellä myös admittanssimuodossa:

$$Z = j\omega L + \frac{1}{G + j\omega C} = j\frac{1}{2} + \frac{1}{2 + j2} = j\frac{1}{2} + \frac{2 - j2}{2^2 + 2^2} \quad (92)$$

$$= \left(\frac{1}{4} + j\frac{1}{4} \right) \Omega = \frac{\sqrt{2}}{4} \angle 45^\circ \Omega \quad (93)$$

Yksikkö kirjoitetaan yleensä välilyönnillä erotettuna vasta kulman jälkeen. Summamuotoista kompleksilukua ei aina suljeta sulkujen sisään; joka tapauksessa mahdollisen yksikön katsotaan liittyvän sekä reaali- että imaginaariosaan.