

SÄHKÖTEKNIikka JA ELEKTRONIIKKA

tXt-4 2017, Kimmo Silvonen

Osa IV, 9.10.2017 v 2

1 Vaihtovirran teho ja kompleksinen teho

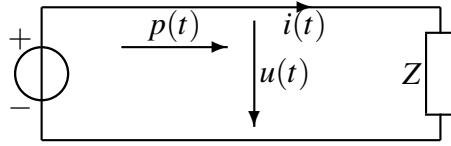
Tasavirran tehon kaava pätee myös vaihtovirran ja vaihtojännitteen hetkellisarvoille, vieläpä aaltomuodosta riippumatta. Hetkellinen teho on siis:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (1)$$

Tämäkin tieto on joskus tarpeellinen, mutta vaihtovirran yhteydessä on yleensä järkevämpää määritellä energiankulutukseen verrannollinen keskimääräinen teho. Seuraavassa käsitellään keskimääräistä tehoa ja kompleksilukujen vaikutusta tehon laskentaan. Niille, jotka eivät jaksaa lukea pidemmälle, totean vain lyhyesti, että **kompleksiluvuilla** tai edes tehollisarvoilla laskettuna **tulo UI ei ole fyysikaalisesti mielekäs, joten saat tulevas-ta koetehtävästä nolla pistettä!** Kompleksinen teho määritellään hieman myöhemmin.

1.1 Hetkellinen teho vai keskimääräinen teho

Sinimuotoisen virran kuljettama **hetkellinen teho** lasketaan siis hetkellisestä jännitteestä ja hetkellisestä virrasta eli jännitteen ja virran hetkellis-arvoista (kuva 1).



Kuva 1. Hetkellisen tehon laskeminen. Tehon virtaussuunta on sama kuin virran suunta siinä johtimessa, jonka potentiaali on korkeampi (+). Hetkellinen teho on $p(t) = u(t) \cdot i(t)$, mutta usein on tärkeämpää tietää keskimääräinen teho, jolle edellä mainittu kaava ei enää pädekään!

Kirjoitetaan sinimuotoisen jännitteen ja virran lausekkeet ajan funktiona täysin yleisessä muodossa, missä ϕ_u ja ϕ_i ovat jännitteen ja virran nollavaihekulmat:

$$u(t) = u = \hat{u} \sin(\omega t + \phi_u) \quad (2)$$

$$i(t) = i = \hat{i} \sin(\omega t + \phi_i) \quad (3)$$

$$p(t) = ui = \hat{u}\hat{i} \underbrace{\sin(\omega t + \phi_u) \sin(\omega t + \phi_i)}_{\frac{1}{2}[\cos(\phi_u - \phi_i) - \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)]} \quad (4)$$

$$p(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \hat{u}\hat{i} \cos(\phi_u - \phi_i)}_P - \underbrace{\frac{1}{2} \hat{u}\hat{i} \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)}_{p_2(t)} \quad (5)$$

Lausekkeen toinen termi $p_2(t)$ on **keskimäärin** nolla, koska kosinifunktio saa jakson aikana symmetrisesti samat arvot positiivisina ja negatiivisina. Ensimmäinen termi P on vakio ja samalla siis **keskimääräinen teho**; se ei riipu ajasta. Vakio-osa P on toiselta nimeltään **pätöteho**. Teho vaihtelee tämän keskiarvon molemmiin puolin ajan funktiona termin $p_2(t)$ mukaisesti. Keskimääräinen teho ei riipu aika-akselin nollakohdan valinnasta. Jos valitaan $\phi_u + \phi_i = 0$ eli $\phi_u = \phi/2$, saadaan havainnollisempi lauseke:

$$p(t) = P - |S| \cos(2\omega t) \quad (6)$$

Hetkellinen teho vaihtelee kaksinkertaisella taajuudella jännitteen ja virran taajuuteen nähden. Esimerkiksi halogeenilampun valo sykkii sadan hertsin taajuudella, vaikka virran ja jännitteen taajuus on vain 50 Hz. Silmä ei tosin huomaa näin nopeataajuisista vilkkumista, eikä lamppu edes ehdi sammua tehon nollakohdissa.

Keskimääräinen teho voidaan laskea samalla tavalla kuin jännitteen tai

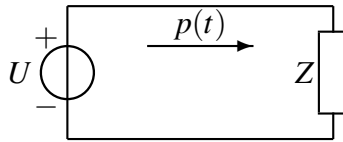
virran keskiarvo. Tulos on tietysti yhtä suuri kuin edellä mainittu **pätöteho**:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \phi \quad (7)$$

$$U = |\underline{U}| = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad I = |\underline{I}| = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad \phi = \phi_u - \phi_i \quad (8)$$

Vaihtovirran keskimääräinen teho saadaan siis kertomalla keskenään **jännitteen** ja **virran tehollisarvot** (ei siis keskiarvot!) sekä niiden **vaihe-erosta** johtuva **tehokerroin** $\cos \phi$ eli $\cos \phi$ (kosini-fii). Osoitinlaskennassa on yleensä järkevää laskea ensin (helposti laskettavissa oleva) kompleksinen teho S , kuten pian nähdään.

Piirretään kuvan 2 piirin hetkellinen teho $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ yhtälön (5) mukaan kolmella eri vaihe-erolla ($\phi = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ$). Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi jännitteen ja virran tehollisarvoja ilman itseisarvomerkkejä $U = |\underline{U}|$ ja $I = |\underline{I}|$. Oletetaan, että $\phi_i = 0$. Tällöin $\phi = \phi_u$. Mikä tahansa muu ϕ_i :n arvo ainoastaan siirtäisi käyriä aika-akselin suunnassa (kun vaihe-ero $\phi_u - \phi_i$ pidetään samana).

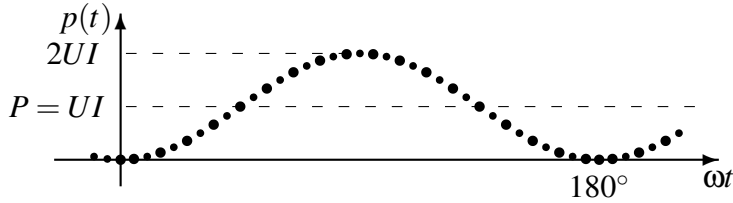


Kuva 2. Virtaako teho jännitelähteestä kuormaan päin? Keskimäärin kyllä, mutta ei välttämättä koko ajan!

Valitaan ensin tehonsiirron kannalta **optimitilanne, resistiivinen kuorma** (kuva 3):

$$\phi = 0^\circ \Rightarrow p(t) = UI [1 - \cos 2\omega t] \quad (9)$$

Resistanssi kuorman tapauksessa tehon hetkellisarvo on koko ajan positiivinen, vaikka se vaihteleeekin samalla amplitudilla kuin muillakin vaihe-siirron arvoilla. Käyrä ei voi kulkea enää tämän ylempänä, joten keskimääräisen tehon maksimi-arvo on $P = P_{\text{MAX}} = UI$. Z :ssa ei tällöin ole ainakaan ulospäin näkyvää kapasitanssia tai induktanssia. Puhtaalta resistanssilta näyttävässä impedanssissa voi olla sisäisesti kapasitansseja ja induktansseja, jos ne kumoavat toisensa (vrt. resonanssi).

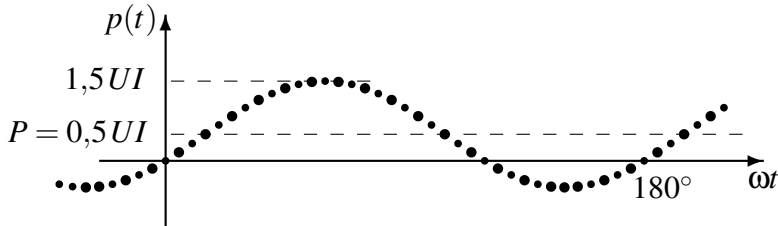


Kuva 3. Jos jännite ja virta ovat samenvaiheiset ($\varphi = 0^\circ$), pysyttelee hetkellinen teho koko ajan positiivisella puolella; teho ei hetkellisestikään virtaa kuormasta jännitelähteeseen päin. Katkoviivalla on merkitty tehon keskimääräinen arvo P ; se saadaan tasoittamalla käyrän alle jäävä "hiekkakasa".

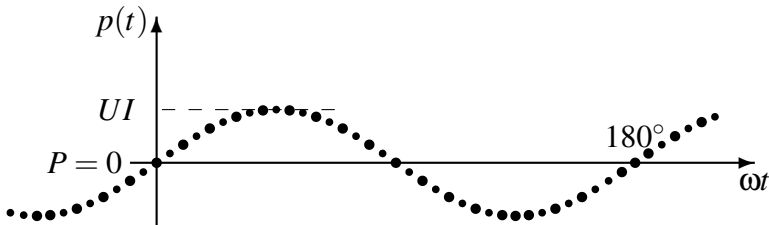
Olkoon toisessa esimerkissä (kuva 4) **induktiivinen kuorma**:

$$\varphi = 60^\circ \Rightarrow p(t) = UI \left[\frac{1}{2} - \cos(2\omega t + 60^\circ) \right] \quad (10)$$

Induktiivisessa kuormassa jännitteen ja virran vaihe-ero on välillä $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$. Kapasiivisen kuorman kulma olisi negatiivinen ($-90^\circ \leq \varphi < 0^\circ$).



Kuva 4. Kun jännite ja virta ovat erivaiheiset, menee tehon hetkellisarvo ajoittain negatiiviseksi. Tällöin teho virtaakin kuormasta jännitelähteeseen päin, mitä voi kestää korkeintaan puolen jakson ajan kerrallaan.



Kuva 5. Puhtaasti induktiivisen tai kapasiivisen kuorman tapauksessa ($\varphi = \pm 90^\circ$) keskimääräinen teho on nolla. Teho virtaa ensimmäisen puoli jaksoa kuormaan ja toisen puolijakson ajan jännitelähteeseen päin.

Otetaan ääritapauksena esimerkiksi **reaktiivinen** eli täysin **induktiivinen** tai **kapasitiivinen kuorma** (kuva 5):

$$\varphi = \pm 90^\circ \Rightarrow p(t) = UI [0 - \cos(2\omega t \pm 90^\circ)] \quad (11)$$

Viimeisessä käyrässä negatiiviset ja positiiviset tehot (oikeammin pintalat eli energiat) kumoavat toisensa; keskimääräinen teho on siis nolla, koska $\varphi = \pm 90^\circ$. Piirissä ei ole lainkaan tehoa kuluttavaa resistanssia. Nyt käyrä kulkee niin alhaalla kuin mahdollista olettaen, että $|\varphi| \leq 90^\circ$, jolloin tehon virtaussuunta on järkevästi valittu.

Mm. sähkökiuas, (sähkö)lämpöpatteri ja hehku- tai halogeenilamppu toimivat tarkalleen ensimmäisen tapauksen mukaan. Monet käytännön sähkölaitteet toimivat jossain ensimmäisen ja toisen tapauksen välimaastossa. Loistelamput ja sähkömoottorit (ilman kompensointia) ovat usein suunnilleen keskimmäisen tapauksen mukaisia ($\cos \varphi \approx 0,4 \dots 1,0$).

Kahdessa jälkimmäisessä tapauksessa teho siirtyy osan ajasta kuormasta jännitelähteeseen päin ($p(t) < 0$). Tämä on mahdollista, koska kuormassa on energiaa varastoivia komponentteja. Jos φ on eri suuri kuin nolla, piirissä on oltava osana kela tai kondensaattori. Positiivinen φ osoittaa, että Z on induktiivinen; se voi sisältää myös kondensaattoreita, mutta kelojen vaikutus impedanssiin on tällöin suurempi.

1.2 Näennäisteho, pätöteho, loisteho ja tehokerroin

Koska jännite ja virta ovat osoitinlaskennassa kompleksilukuja, on myös teho kompleksinen. Vaihtovirta ja -jännite voivat olla erivaiheisia, jolloin niistä saatava hyötyteho jää pienemmäksi kuin virran ja jännitteen tehollisarvojen tulo. Jos kompleksiluvuilla laskettaisiin tulo UI , olisi saadun tuloksen kulma kompleksilukujen laskusääntöjen mukaisesti jännitteen ja virran kulmien summa $\varphi_u + \varphi_i$. Tällaisella kompleksiluvulla ei ole selvää fysikaalista merkitystä. Tilanne muuttuu, jos kulmaksi asetetaan kulmien erotus eli jännitteen ja virran **vaihe-ero** $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Tämä toteutuu, jos virran kulma muutetaan toisenmerkkiseksi, kuten seuraavassa nähdään.

Kompleksilukuna esitetyn virran $I = |I| \angle \varphi$ liittoluku on $I^* = |I| \angle -\varphi$. Järkevien tulosten saamiseksi joudutaan osoitinlaskennassa teho määrittelemään **virran liittoluvun** eli **kompleksikonjugaatin** avulla — kaava $P = UI$ ei siis päde vaihtovirralla! Kompleksinen teho on jännite kertaa virran liittoluku:

$$S = UI^* \quad (12)$$

$$S = P + jQ \quad (13)$$

$$P = \operatorname{Re}[S] = |S| \cos \varphi = |U||I| \cos \varphi \quad (14)$$

$$Q = \operatorname{Im}[S] = |S| \sin \varphi = |U||I| \sin \varphi \quad (15)$$

Itseisarvomerkit korostavat sitä, että kyseessä ovat jännitteen ja virran tehollisarvot. Suure S on nimeltään **näennäisteho** eli **kompleksinen teho**. Usein näennäisteholla tarkoitetaan nimenomaan kompleksisen tehon itseisarvoa. Molempien yksikkönä on voltiampeeri VA. Kaikkien tuntema watti (W) on varattu puhtaan pätötehon eli keskimääräisen (aktiivisen) tehon yksiköksi. **Pätöteho** P on siis kompleksisen tehon reaaliosa, mikä on toisaalta yhtä suuri kuin integroimalla laskettu keskimääräinen teho:

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (16)$$

missä W on yhden jakson aikana tai yleisemmin ajassa T kulutettu energia. Kompleksisen tehon kulma $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$ on siis jännitteen ja virran välinen vaihe-ero. Imaginääriosa Q on **loisteho** eli **reaktiivinen teho**. Silläkin on oma yksikkönsä: vari (VAR) eli *voltiampeeria reaktiivista tehoa*. Pätö-, lois- ja näennäisteholla on siis kaikilla selvyuden vuoksi eri yksiköt, vaikka ne matemaattisesti ovatkin samat.

Impedanssin ottaman kompleksisen tehon kaava voidaan esittää eri muodoissa soveltamalla yleistettyä Ohmin lakia ($U = ZI$) ja admittanssin määritelmää ($Y = 1/Z$).

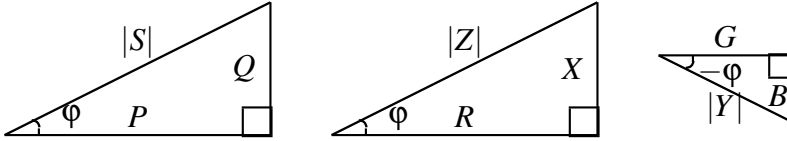
$$S = UI^* = \frac{U \cdot U^*}{Z^*} = \frac{|U|^2}{Z^*} = |U|^2 Y^* \quad (17)$$

$$S = UI^* = ZI \cdot I^* = Z|I|^2 = \frac{|I|^2}{Y} \quad (18)$$

Huomaa, että mahdollinen **toiseen korottaminen** kohdistuu **aina** virran tai jännitteen **itseisarvoon**. Virran ja jännitteen vaihekulmat riippuvat piirin komponenteista ja aika-akselin nollakohtan valinnasta. Aika-akselin nollakohta voidaan aina valita tapauskohtaisesti, jännitteen ja virran vaihe-ero ei siitä riipu. Kompleksisen tehon, impedanssin ja admittanssin kulmat eivät siis riipu aika-akselin nollakohtan valinnasta!

Termi $\cos \varphi$ on nimeltään **tehokerroin**. Koska kosini on "miinusmerkkejä tuhoava" funktio, ei siitä ilmene, onko kuorma induktiivinen vai kapasitiivinen. Kerroin $\cos \varphi$ saa positiivisia arvoja negatiivisilla ja positiivisilla kulman arvoilla välillä $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$. Tämän vuoksi tehokerroin ilmoitetaan joskus täsmennettynä joko alaindeksillä ind (kun $0 < \varphi \leq 90^\circ$) tai

cap (kun $-90^\circ \leq \varphi < 0$), esim. $\cos \varphi = 0,9_{\text{ind}}$. Kulmat $90^\circ < |\varphi| < 180^\circ$ ovat harvinaisempia, koska ne tarkoittavat negatiivista pätötehoa (esim. "vastuksesta jännitelähteeseen virtaava" pätöteho). Pätö-, lois- ja näennäistehoa voidaan havainnollistaa suorakulmaisella **tehokolmiolla** (kuva 6).



Kuva 6. Tehokolmion kateetit ovat pätöteho P ja loisteho Q . Hypotenuusana on kompleksisen tehon S itseisarvo. Hypotenuusana ja vaakakateetin välinen kulma φ kertoo jännitteen ja virran vaihe-eron. Oikealla vertailun vuoksi samanmuotoinen impedanssi- ja admittanssikulmio. Tässä $\varphi > 0$.

Kun kulma $\varphi = 0$, on loistehokin nolla. Pätöteho taas on nolla, jos $\varphi = \pm 90^\circ$. Jos kulma on välillä $90^\circ < |\varphi| < 180^\circ$, on virran tai jännitteen suunta valittu epäkäytännöllisesti (negatiivinen pätöteho) — kumman tahansa voi kääntää; samalla vaihtuu tehon laskennallinen virtaussuunta ja P :n etumerkki.

Kuten impedanssi ja admittanssi, voidaan kompleksinen teho esittää harkinnan mukaan joko summa- tai kulmam muodossa. Kompleksisen tehon itseisarvo kertoo vain jännitteen ja virran tulon itseisarvon. Muuntajien sekä eräiden muiden laitteiden maksimiteho ilmoitetaan näennäistehona, koska esim. 230 voltin vakiojännitteellä $|S|$ on suoraan verrannollinen virran voimakkuuteen vaihesiirrosta riippumatta. Suurinta virtaa taas rajoittaa yleensä suurin sallittu magneettivuon tiheys rautasydämessä sekä käytetyn kuparilangan paksuus. Tällä perusteella suurin sallittu pätöteho ei muuntajan yhteydessä olisi kovin kuvaava suure.

Pätöteho edustaa sähkön hyödyksi saatavaa tehoa ja toisaalta tehohäviöitä. Tarkalleen sanottuna pätöteho on sama kuin jakson ajalta laskettu keskimääräinen hetkellinen teho. Huomaa, että erilaisista laskutavoista huolimatta oheiset tehon lausekkeet antavat aina saman tuloksen.

$$P = \text{Re}[S] = |UI| \cos \varphi = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T (u(t) \cdot i(t)) dt \quad (19)$$

Resistanssissa lämmöksi muuttuva teho, hehkulampun teho ja moottorin akselin pyörittämiseen kuluva teho kuten kaikki muukin **hyötyteho ovat pätötehoa. Häviöttömät komponentit**, kuten ideaalinen kela, muuntaja,

kondensaattori tai siirtojohto, **eivät kuluta (pätö)tehoa**. Jos puhutaan pelkästä tehosta, tarkoitetaan yleensä juuri pätötehoa.

Loisteho syntyy energian heilahdellessa edestakaisin piirissä; vrt. kaava (5), joka voi saada positiivisia ja negatiivisia arvoja. Teho sykkii energialähteiden (E ja J) ja energiaa varastoivien komponenttien (L ja C) välillä. Vastus ei kuluta loistehoa. Loisteho on laskennallinen suure, jolla ei ole selvää vastinetta käytännössä, mutta se voidaan helposti perustella suorakulmaisen kolmion avulla. Loistehoa ei voi käyttää hyödyksi. Jos sitä pystyisi hyödyntämään, se olisikin pätötehoa. Päinvastoin, loisteho on usein haitallista. Jos jännite ja pätöteho pidetään vakiona, loistehon suurentaminen suurentaa piirissä kulkevaa virtaa, jolloin energian siirtohäviöt kasvavat.

Kompensoinnilla pyritään saamaan loisteho Q nollassa, jolloin $P = S$. Tällöin piiri on resonanssissa käytetyllä taajuudella, ja näyttää siis puhtaalta resistanssilta. Kelan ottama loisteho on positiivista ja kondensaattorin loisteho negatiivista. Kela siis "kuluttaa" loistehoa ja kondensaattori "tuottaa" sitä.

$$S_L = jQ_L = Z_L |I|^2 = j\omega L |I|^2 = j \frac{1}{\omega L} |U|^2 \quad (20)$$

$$S_C = jQ_C = Z_C |I|^2 = -j \frac{1}{\omega C} |I|^2 = -j\omega C |U|^2 \quad (21)$$

Tutkitaan hetkellisen tehon minimi- ja maksimikohtia derivaatan nol-lakohdista:

$$\frac{dp}{dt} = 0 + |U||I|2\omega \sin(2\omega t + \phi_u + \phi_i) = 0 \quad (22)$$

$$\Rightarrow 2\omega t + \phi_u + \phi_i = 0^\circ \pm n \cdot 180^\circ \quad (23)$$

$$\Rightarrow \omega t = \pm n \cdot 90^\circ - \frac{\phi_u + \phi_i}{2} \quad (24)$$

$$p_{\text{MIN}} = |U||I| \cos \phi - |U||I| \cos(0^\circ \pm n \cdot 360^\circ) = P - |S| \quad (25)$$

$$p_{\text{MAX}} = |U||I| \cos \phi - |U||I| \cos(180^\circ \pm n \cdot 360^\circ) = P + |S| \quad (26)$$

Hetkellinen teho saavuttaa negatiivisen maksimiarvonsa $p_{\text{MIN}} = P - |S| \leq 0$ esimerkiksi silloin, kun $\omega t = -\frac{\phi_u + \phi_i}{2}$ ja positiivisen maksimiarvonsa $p_{\text{MAX}} = P + |S| \geq 0$ aina $\omega t = 90^\circ$ "myöhemmin". Nähdään, että:

$$P = \frac{p_{\text{MAX}} + p_{\text{MIN}}}{2} \quad (27)$$

$$|S| = \frac{P_{\text{MAX}} - P_{\text{MIN}}}{2} \quad (28)$$

$$Q^2 = |S|^2 - P^2 = (|S| + P)(|S| - P) \quad (29)$$

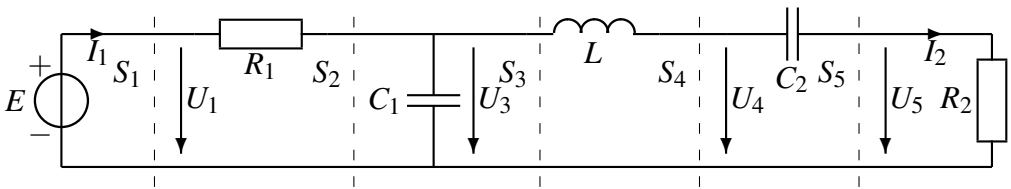
$$Q^2 = P_{\text{MAX}}(-P_{\text{MIN}}) = P_{\text{MAX}}|P_{\text{MIN}}| \quad (30)$$

$$\frac{Q}{P_{\text{MAX}}} = \frac{|P_{\text{MIN}}|}{Q} \quad (31)$$

$$Q = \pm \sqrt{|P_{\text{MAX}}P_{\text{MIN}}|} = \pm \sqrt{|S|^2 - P^2} \quad (32)$$

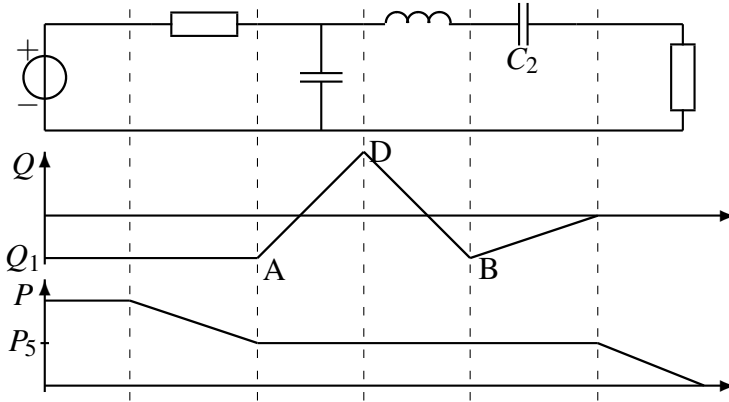
Loistehon eräs fysikaalinen tulkinta on siis *positiivisen ja negatiivisen maksimitehon itseisarvojen keskiarvo* eli tulon neliöjuuri *positiivisena tai negatiivisena*.

Loistehon ja pätötehon etenemistä piirissä selittää seuraava esimerkki. Kuvan 7 virrat on laskettu valmiiksi: $I_1 = 4 + 2j$ A ja $I_2 = 2 - 4j$ A. Laskeetaan eri kohdissa vasemmalta oikealle virtaavat kompleksiset tehot S_1 , S_2 , S_3 , S_4 ja S_5 , kun $E = 10$ V, $\omega = 1 \frac{1}{s}$, $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $C_1 = C_2 = 1$ F ja $L = 2$ H.



Kuva 7. Vastus kuluttaa pätötehoa, kela ottaa loistehoa, mutta kondensaattori "tuottaa" loistehoa. Vastuksen loisteho on nolla, samoin kelan ja kondensaattorin pätöteho.

Merkitään $S_i = U_i \cdot I_i^* = P_i + jQ_i$ (missä alaindeksi $i = 1 \dots 5$ ja $I = I_1$ tai I_2). Pätö- ja loistehojen suuruussuhteille eri kohdissa pätee piirin komponenttien tyypin perusteella seuraava järjestys, minkä näkee ilman laskujakin (kuva 8):



Kuva 8. Loistehon ja pätötehon eteneminen piirissä. Käyrät esittävät kyseisessä kohdassa vasemmalta oikealle virtaavia tehoja. Piste A voisi toisilla lukuarvoilla olla myös positiivisella puolella ($Q_1 > 0$), mutta piste B on aina negatiivisella puolella kondensaattorin C_2 takia ($Q_4 < 0$). Piste D voi myös sijaita vaaka-akselin negatiivisella puolella, mutta se on aina ylempänä kuin A ja B (joiden ei tarvitse olla samalla korkeudella).

$$P_1 > P_2 = P_3 = P_4 = P_5 > 0 \quad (33)$$

$$Q_1 = Q_2 < Q_3 > Q_4 < Q_5 = 0 \quad (34)$$

Kondensaattori ikään kuin tuottaa loistehoa ja kela kuluttaa sitä; todellisesta *tehon* tuottamisesta tai kuluttamisesta ei kelassa tai kondensaattorisaa kuitenkaan ole kyse. Loistehon *tuottaminen* passiivikomponentilla on mahdollista, koska loisteho on lähinnä imaginaarinen laskennallinen suure, jolla ei ole fysikaalista vastinetta. Loistehon ja energian välillä ei ole mitään yhteyttä.

Tarkastellaan vielä lopuksi samaa esimerkkiä lukuarvoilla (ilman yksiköitä):

$$U_1 = E = 10 \quad S_1 = U_1 I_1^* = 10(4 - 2j) = 40 - j20 \text{ VA} \quad (35)$$

$$U_2 = E - R_1 I_1 \quad S_2 = U_2 I_1^* = (6 - 2j)(4 - 2j) = 20 - j20 \quad (36)$$

$$U_3 = U_2 = 6 - 2j \quad S_3 = U_3 I_2^* = (6 - 2j)(2 + 4j) = 20 + j20 \quad (37)$$

$$U_4 = U_3 - j2I_2 \quad S_4 = U_4 I_2^* = -(2 + 6j)(2 + 4j) = 20 - 20j \quad (38)$$

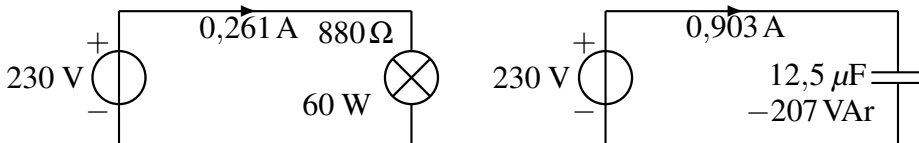
$$U_5 = R_2 I_2 = 2 - 4j \quad S_5 = U_5 I_2^* = (2 - 4j)(2 + 4j) = 20 \text{ VA} \quad (39)$$

Huomaa, miten peräkkäisissä kohdissa vain joko reaali- tai imaginaariosa muuttuu riippuen siitä, oliko välissä resistanssi vai reaktanssi.

1.3 Sähköenergian tuotanto ja laskutus

Sähkölaitosten laskutus perustuu loistehon **kohtuukäyttäjillä** vain pätötehon mittaamiseen, mistä peritään **energiamaksu**. Loistehon kuluttaja luovuttaa aina sähkölaitokselle seuraavalla (tehon) puolijaksolla takaisin saman "loisenergian", jonka se edellisellä puolijaksolla lainasi. Loisteho ei siis varsinaisesti ole sähköntuottajilta pois¹. Suuret teollisuuslaitokset ottavat pätötehon lisäksi paljon loistehoa esimerkiksi induktiivisten sähkökoneiden takia. Tällöin energian siirto ja tuotanto tulee suurentuneen virran takia niin kalliiksi, että energiamaksun ja **pätötehomaksun** lisäksi laskutetaan myös erillinen **loistehomaksu**. Viime mainittu on näistä usein jopa kalliimpi ja ainakin melkoisen turha kustannus — ei ole sähkölaitoksen vika, jos verkosta otetaan loistehoa. Loisteho kannattaa siis kumota esimerkiksi rinnan kytketyillä kondensaattoreilla. Tämä ns. **loistehon kompensointi** esitellään myöhemmin.

Hehkulampun ottama teho muuttuu suurimmaksi osaksi lämmöksi ja vain pieneltä osin valoksi (kuva 9). Periaatteessa tämä lämpöenergia säästää asunnon lämmityskustannuksia. Käytännössä säästö jäänee realisoitumatta, koska lamppu lämmittää pientä aluetta tarpeettoman suurella teholla, mistä tieto ei välttämättä juurikaan välity termostaatile²; suurin osa lisälämmöstä voi karata suoraan ikkunasta ulos. Lisäksi katto on kyllä lämmin lampun yläpuolella.



Kuva 9. Pätötehon ja loistehon ero. 60 W hehkulamppu ottaa sähköverkosta vähemmän virtaa kuin (luennoilla testaamani) 12,5 μF kondensaattori. Silti lamppu on se, joka kuumenee (ja tulee siitä hieman näkyvää valoakin, ehkä 5 %), kondensaattori ei edes lämpene. Silti konkkaan voi jäädä vaarallisen suuri jännite, kun se irrotetaan verkosta — varaus on syytä purkaa oikosulkemalla (irrationaalisen) kondensaattorin navat ruuvimeisselillä, mikä tosin sekun voi olla vaarallista. **Älä siis tee tätä koetta kotona** (ja tämä ei siis ollut haaste)! Huomaa, että mikään tavallinen **kondensaattori ei kestä verkkojännitettä**; niissä usein mainittu 250 V tarkoittaa tasajännitekestoisuutta!

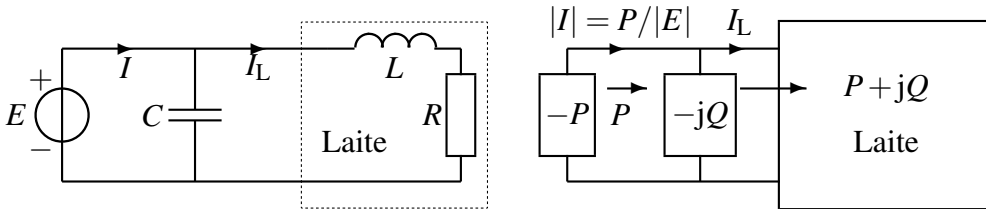
¹ Jotkut luulevat huijaavansa sähkölaitosta syömällä ilmaista loistehoa, mutta sehän on sama kuin vuorotellen söisi ja o...:_(*)

² Tehokkain tapa säästää energiaa olisikin lämmittää termostaatteja!

1.4 Loistehon kompensointi

Tavallinen kuormalaite, esimerkiksi sähkömoottori tai kuristimella varustettu loistelamppu, voidaan tulkita yhtä hyvin vastuksen ja kelan sarjaan kuin rinnankytkennäksi tarkasteltavalla taajuudella; tämä taajuus voi olla esim. verkkovirran taajuus tai joskus sen harmoninen. Myös vastuksen ja kelan rinnankytkentä voidaan lukuarvoja muuttamalla korvata ekvivalentilla sarjaankytkennällä (ja päinvastoin) silloin, kun piiriä tarkastellaan vain yhdellä taajuudella (mutta vain silloin). Loistehon kompensoimiseksi on tärkeätä tietää, onko kuorma induktiivinen vai kapasitiivinen. Kapasitiiviset kuormat ovat harvinaisia, joskin myös mahdollisia.

Induktiivisen kuorman ottama **loisteho Q kompensoidaan** (eli nollataan) yleensä rinnan kytkettävällä **kondensaattorilla**. Rinnan kytkettynä konkka ei muuta kuorman jännitettä (jos lähdeimpedanssi \approx nolla), kuten sarjakonkka tekisi. Kompensoinnin tarkoituksena on nollata loisteho, mikä on energian siirron ja tuotannon kannalta edullisinta. Jännitelähteestä piiriin otettu virta I on tällöin pienimmillään, vaikka pätöteho P ei muutu (siirtojohdossa "luonnollinen teho"). Kompensointi perustuu resonanssiin; käytännön kuormalaitteet ottavat usein (pulssimaista) virtaa, jonka aaltomuoto poikkeaa sinistä. Tällöin kompensointi yhdellä taajuudella ei riitä.



Kuva 10. Laitteen ottama loisteho voidaan kompensoida eli kumota kondensaattorilla. Tällöin jännitelähteestä otettu virta minimoituu. Kuvassa oikealla jännitelähde "kuluttaa" tehon $-P$ ja kondensaattori "tuottaa" loistehon Q ; laite ottaa kaiken tuotetun pätö- ja loistehon $P + jQ$. Jos konkkaa ei olisi, pitäisi jännitelähteen tuottaa myös Q .

Tyypillisissä käyttötilanteissa jännite $U = 230$ V ja taajuus $f = 50$ Hz tunnetaan yleensä. Laitteelle ilmoitetaan tyypillisesti pätöteho P ja tehokerroin $\cos \phi$. Merkitään kuorman loistehoa Q :lla ja kondensaattorin loistehoa Q_C :llä. Lasketaan tarvittava **kompensointikondensaattori** C (kuva 10). Valitaan Q_C siten, että $Q + Q_C = 0$. Lähdetään liikkeelle tehokolmiosis-

ta:

$$\frac{Q}{P} = \tan \phi \Rightarrow Q = P \tan \phi = -Q_C \quad (40)$$

$$S_C = jQ_C = U \left(\frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} \right)^* = |U|^2 (-j\omega C) \quad (41)$$

$$Q_C = -|U|^2 \omega C = -P \tan \phi \Rightarrow C = \frac{P \tan \phi}{\omega |U|^2} \quad (42)$$

$$|I| = \frac{P}{|E|} \quad |I| \leq |I_L| = \frac{|P + jQ|}{|E|} \quad (43)$$

Kaavassa oleva $\tan \phi$ lasketaan $\cos \phi$:n avulla. C voidaan lausua myös R :n ja L :n funktiona (resonanssi).

$$Y = \frac{1}{Z} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (44)$$

$$B = 0 \Rightarrow C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (45)$$

Teoriassa kompensointi olisi mahdollista myös sarjakondensaattorilla, mutta tällöin kuorman jännite kasvaisi (ei siis pienenesi!), kuten voit laskeamalla todeta. Useampia kuormalaitteita voidaan kompensoida yhdellä yhteisellä kondensaattorilla, jos se mitoitetaan seuraavasti:

$$\sum Q = \sum (P_i \tan \phi_i) = \omega C |U|^2 \quad (46)$$

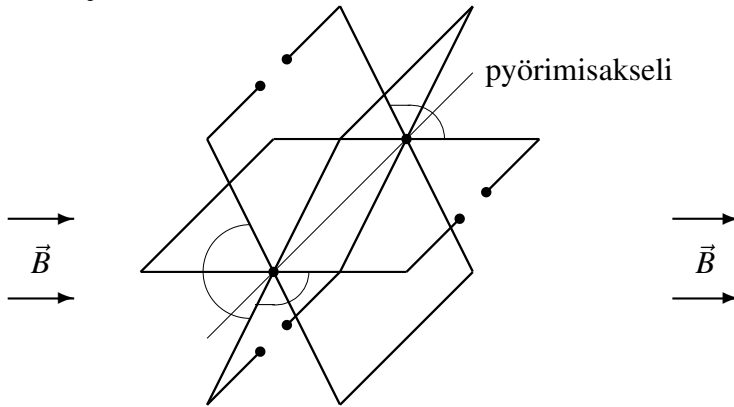
$$C = \frac{P_1 \tan \phi_1 + P_2 \tan \phi_2 + \dots}{\omega |U|^2} \quad (47)$$

2 Kolmivaihejärjestelmä

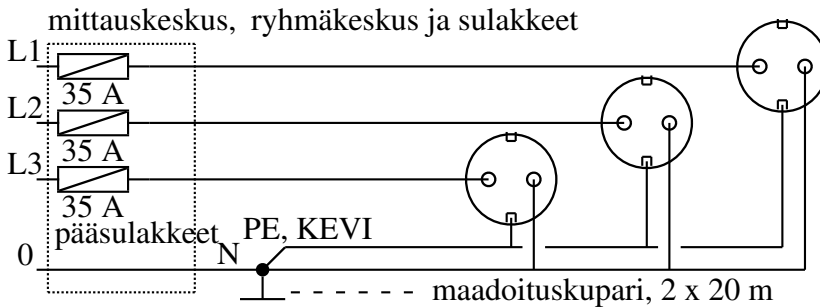
2.1 Yksivaihe- ja kolmivaihejärjestelmät

Tavallista vaihtovirtaa sanotaan yksivaiheiseksi. **Kolmivaihejärjestelmä** koostuu kolmesta yhteen liitetystä **1-vaihejärjestelmästä**, jotka ovat 120° vaihesiirrossa toisiinsa nähden. Kuvassa 11 on kolme käämiä tasavälein yhden kierroksen matkalla. Systemi pyörii vakionopeudella esimerkiksi kuvan vaakasuorassa olevassa magneettikentässä:

Sähköenergian tuotanto ja siirto perustuvat yleensä kolmivaihejärjestelmään, koska siinä siirtohäviöt ovat vain kuudesosa verrattuna yhtä suureen siirrettävään tehoon yksivaihejärjestelmässä. Kotitalouksiin tuleva sähkö on yleensä 3-vaiheista ($3 \times 230 \text{ V}$, kuva 12); kuormittavat laitteet jaetaan eri vaiheiden kesken suunnilleen tasan. Eri vaiheet tuodaan esimerkiksi eri huoneisiin. Suuritehoiset laitteet, kuten sähkökiuas ja -liesi, kytetään kaikkiin kolmeen vaiheeseen. Joskus kolmivaiheiset laitteet kytetään vain kahteen vaiheeseen sopivan lämmitystehon tuottamiseksi (esim. lämminvesivaraaja).



Kuva 11. Kolmivaihesähkön syntyminen generaattorissa, jossa on kolme käämiä 120 asteen päässä toisistaan. Vektori \vec{B} (vuontiheys) osoittaa magneettikentän suuntaan.



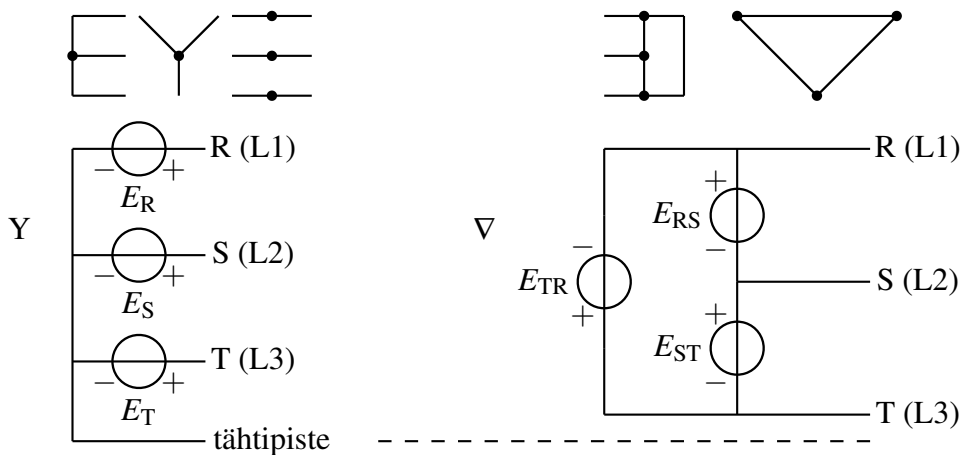
Kuva 12. Yksinkertaistettu kuva asuinrakennuksen sähköliittymästä ja maadoitettujen shuko-pistorasioiden kytkentä. Sähkölaitokselta tulee mittauskeskukseen paksu nelijohtiminen maakaapeli, jonka yläpuolelle maahan on asetettu keltainen muovinen varoitusnauha. Pääsulakkeiden koko voi olla esim. 35 A; ne ovat yleensä perinteisiä posliinikuorisia tulppasulakkeita. Mittauskeskuksen jälkeen

on usein vielä ryhmäkeskus, jossa olevat automaattisulakkeet (johdonsuojakytkimet) ovat pienempiä, esim. 10 A. Sulaketta kutsutaan myös varokkeeksi.

Sähköenergian siirrossa ollaan hiljalleen siirtymässä tasavirtaan, joka ei aiheuta pyörrevirtahäviöitä. Viimeaikaisten myrskyjen takia on yhä enemmän alettu vaatia maakaapelointia sähkövoiman siirrossa. Tässä suhteessa LVI-ala on ollut edelläkävijä: vain pieni osa vesijohdoista ja viemäreistä kulkee ilmajohtona. Kaasuputket kulkevat myös monin paikoin maanpäällisinä.

2.2 Kolmiokytkentä ja tähtikytkentä

Yksivaiheista sähköä kehitetään generaattorilla, jossa on vain yksi käämi. Kolmivaiheisessa generaattorissa samalla pyörimisakselilla on kolme käämiä, jotka ovat 120° kulmissa toisiinsa nähden. Käämien jännitteet on tapana kytkeä joko **tähteen** (Y) tai **kolmioon** (∇).



Kuva 13. Jännitelähteiden tähtikytkentä ja kolmiokytkentä. Kolmiokytkentä on mahdollinen vain silloin, kun jännitelähteiden lukuarvot toteuttavat Kirchhoffin jännitelain; kolmivaihejärjestelmässä onneksi näin onkin! Myös impedanssit kytketään tähteen tai kolmioon. Ylinnä tähti- ja kolmiokytkennän yleisimmät esiintymismuodot kaavakuvana.



Kuva 14. Tähteen tai kolmioon kytketty kolmivaiheinen kuorma.

Tähtikytkennässä komponenteilla on yleensä yhteinen **tähtipiste**, johon kaikki kolme komponenttia on kytketty. Myös vaihejohtimien kanssa sarjassa olevat "vaakasuurat" komponentit ovat tavallaan tähtikytkennässä, vaikkei niillä olekaan yhteistä tähtipistettä. **Kolmiokytkennässä** jokaiseen kolmesta liitoskohdasta on kytketty **kaksi** samantyyppistä komponenttia; kolmiokytkentää ei yhdistetä piirin tähtipisteisiin (kuva 13) lainkaan. Samoin kuormittava laite ja muut komponentit kytketään käytännössä tähteen tai kolmioon (kuva 14); muita kytkentöjä esiintyy lähinnä vain vikatilanteissa.

Kolmiokytkennän ja tähtikytkennän "kulmista" lähtee kolme vaihejohtinta, joita merkitään kirjaimilla R, S ja T eli L1, L2 ja L3 (englanniksi R, Y, B — *red, yellow, blue*). Käytännön kolmivaihejärjestelmässä on yleensä viisi johdinta: vaihejohtinten lisäksi **nollajohdin** (N) ja erillinen **suojojohdin** (PE, *Potential Earth*), jossa ei kulje normaalisti virtaa, mutta joka on samassa potentiaalissa kuin nollajohdin. Suojajohdin on tavallisesti kelta-vihreäraitainen (KEVI), nollajohdin vaaleansininen. Sähköturvallisuusmääräysten mukaan nollajohdin saa olla muunkin värinen, jos vaaleansininen johdin puuttuu; johtimen päät on tällöin merkittävä vaaleansinisellä eristysnauhalla tai muulla merkillä. Nollajohdin kytketään tähtipisteisiin.

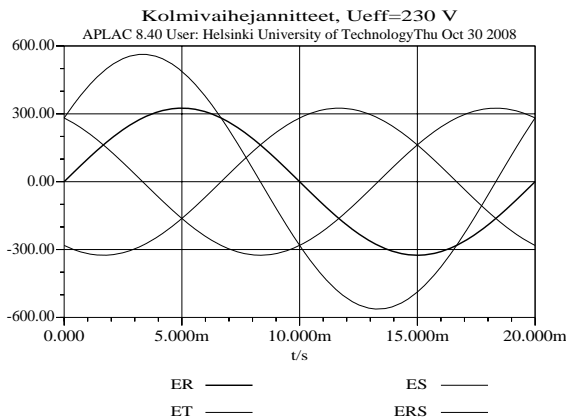
2.3 Vaihe- ja pääjännite

Vaihejohtimien ja tähtipisteiden välistä jännitettä kutsutaan **vaihejännitteeksi** ja vaiheiden välisiä jännitteitä **pääjännitteiksi**.

Kuluttajalle tulevan kolmivaihesähkön pääjännite on noin 400 V (**voimavirta**) ja vaihejännite neliöjuurikolmasosa siitä eli siis noin 230 V (kuva 15, ks. perustelu myöhemmin). Jännitteen tarkka arvo vaihtelee mm. kuormituksen ja sijainnin mukaan, mutta 50 Hz:n taajuus on keskimäärin niin tarkka, että siihen voi synkronoida esimerkiksi seinäkellon. Järjestelmäs-

tä on tapana ilmoittaa yhtä aikaa sekä pääjännite että vaihejännite: esim. 415/240, 400/230 tai 380/220 V. Koska eri vaiheet tuodaan yleensä eri huoneisiin, voi pistorasioiden välillä vaikuttaa tehollisarvoltaan jopa 400 voltin jännite (huippuarvo noin 570 V!)

Tavalliseen yksivaiheiseen pistorasiaan on kytketty nollajohdin ja yksi vaihejohtimista, maadoitettuun (**shuko-**, 'Schutzkontakten') pistorasiaan lisäksi suojajohdin. Pistorasian suoja- tai nollajohdimesta ei saa sähköiskua ("kiltti reikä"), mutta vaihejohtimeen koskeminen on vaarallista ("tuhma reikä"). Suomalaismittojen mukainen shuko-pistoke on Euroopan maista käytössä mm. Saksassa, Itävallassa, Hollannissa, Irlannissa, Ruotsissa ja Espanjassa. Ranskan ja Belgian (myös Espanjan) mallissa on ylimääräinen reikä pistorasiassa olevaa kolmatta tappia varten.



Kuva 15. Sähköverkon vaihejännitteet ja yksi pääjännitteistä. Jaksonaika 50 Hz:n taajuudella on 20 ms.

2.4 Symmetrinen kolmivaihejärjestelmä

Symmetrisessä kolmivaihejärjestelmässä lähdejännitteet ovat itseisarvoltaan yhtä suuret, mutta erivaiheiset. Vaihekulmat sijaitsevat tasavälein ympyrän kaarella; täten niiden välimatkaksi tulee 120° , mutta kulmien arvot sinänsä riippuvat aika-akselin nollakohdan valinnasta:

$$e_R(t) = \hat{e} \sin(\omega t) \quad E_R = E \angle 0^\circ \quad (48)$$

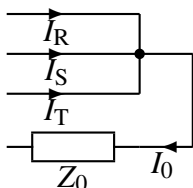
$$e_S(t) = \hat{e} \sin(\omega t - 120^\circ) \quad E_S = E \angle -120^\circ \quad (49)$$

$$e_T(t) = \hat{e} \sin(\omega t - 240^\circ) \quad E_T = E \angle -240^\circ = E \angle +120^\circ \quad (50)$$

Muut vaihejännitteet ovat samalla tavalla itseisarvoltaan yhtä suuret ja 120° vaihesiirrossa toisiinsa nähden. Vastaavasti vaihevirtojen I_R, I_S ja I_T itseisarvot ovat samat ja niiden vaiheet 120° päässä toisistaan. Käytännössä kolmivaihejärjestelmä pyritään aina tekemään symmetriseksi.

Symmetrisen järjestelmän nollajohtimessa ei kulje lainkaan virtaa (kuva 16):

$$I_0 = I_R + I_S + I_T = \underbrace{I\angle 0^\circ + I\angle -120^\circ + I\angle -240^\circ}_{I(1+0j-0,5-0,866j-0,5+0,866j)} = 0 \quad (51)$$



Kuva 16. Nollajohtimen virta on tähtivirtojen eli vaihejohtimien virtojen summa. Symmetrian takia virta on teoriassa nolla ja käytännössäkin yleensä pieni.

Joskus nollajohdin jätetään kokonaan kytkemättä. Useimmiten kuitenkin nollajohdin on mukana mahdollisen epäsymmetrian varalta; periaatteessa se voitaisiin tehdä ohuemmasta johtimesta kuin vaihejohtimet, mutta tämäkään ei ole yleinen käytäntö.

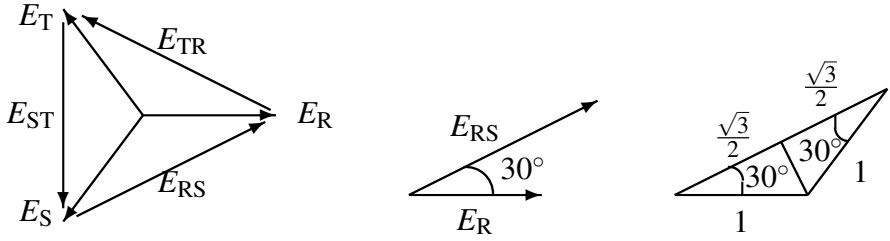
2.5 Kolmivaihejännitteet ja osoitindiagrammi

Vaihe- ja pääjännitteiden välillä on voimassa kuvan 17 osoitindiagrammi. Jännitteiden väliset yhtälöt voidaan kirjoittaa joko vektorilaskennan sääntöjen mukaan tai suoraan alaindeksejä tarkastelemalla ($E_{TR} = E_T - E_R$). Seuraavat yhtälöt on kirjoitettu niin, että kaikki jännitteet ovat positiivisia; yhtälöiden vertaaminen kuvaan on nyt suoraviivaista:

$$E_R + E_{TR} = E_T \quad (52)$$

$$E_S + E_{RS} = E_R \quad (53)$$

$$E_T + E_{ST} = E_S \quad (54)$$



Kuva 17. Vaihe- ja pääjännitteiden suuruusluokka- ja vaihe-erot.

Kuviosta havaitaan, että pääjännite on vaihejännitteeseen nähden $\sqrt{3}$ -kertainen ja $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad tätä edellä:

$$E_R = \frac{E_{RS}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \quad E_{RS} = \sqrt{3}E_R \angle 30^\circ \quad (55)$$

$$E_S = \frac{E_{ST}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \quad E_{ST} = \sqrt{3}E_S \angle 30^\circ \quad (56)$$

$$E_T = \frac{E_{TR}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \quad E_{TR} = \sqrt{3}E_T \angle 30^\circ \quad (57)$$

Yllä olevat muunnoskaavat pätevät symmetrian takia lähdejännitteiden lisäksi myös kuorma- ym. jännitteille.

2.6 Vaihe- ja kolmiovirrat

Vastaavasti kuin **kolmio-** eli **pääjännitteet** määritellään **kolmiovirrat** (kuva 18):

$$I_R + I_{TR} = I_{RS} \quad (58)$$

$$I_S + I_{RS} = I_{ST} \quad (59)$$

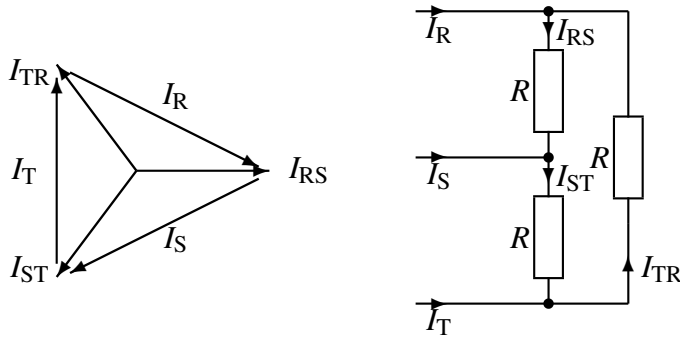
$$I_T + I_{ST} = I_{TR} \quad (60)$$

$$I_{RS} = \frac{I_R}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = \frac{1}{3}(I_R - I_S) \quad I_R = \sqrt{3}I_{RS} \angle -30^\circ \quad (61)$$

$$I_{ST} = \frac{I_S}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = \frac{1}{3}(I_S - I_T) \quad I_S = \sqrt{3}I_{ST} \angle -30^\circ \quad (62)$$

$$I_{TR} = \frac{I_T}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = \frac{1}{3}(I_T - I_R) \quad I_T = \sqrt{3}I_{TR} \angle -30^\circ \quad (63)$$

Tähtikytkennässä ei kolmiovirtoja tietenkään esiinny, vaikka kolmiojännitteet ovatkin vaihejohtimien välillä aina olemassa.



Kuva 18. Tähti- ja kolmiovirtojen suuruusluokka- ja vaihe-erot.

2.7 Kolmivaihejärjestelmän vakaa tehonsiirto

Kolmivaihejärjestelmän teholla tarkoitetaan kaikkien vaiheiden **yhteenlaskettua tehoa**:

$$S = U_R I_R^* + U_S I_S^* + U_T I_T^* = 3U_V I_V^* \quad (64)$$

missä U_V on **vaihejännite** ja I_V **vaihevirta**. Kaikkien vaiheiden kuljettamat näennäistehot ovat kompleksilukuina keskenään yhtä suuret. Kompleksisen tehon kulma tarkoittaa jännitteen ja virran välistä vaiheeroa, joka on eri vaiheissa sama (se riippuu vain kuormaimpedanssin kulmasta, kompleksitehon kulma on sama kuin impedanssin kulma $\phi_S = \phi_Z$). Kolmivaihejärjestelmässä tehon virtaus on tasaista toisin kuin yksivaihejärjestelmässä; ajasta riippuvat termit kumoavat kokonaan toisensa:

$$p(t) = u_R i_R + u_S i_S + u_T i_T \quad (65)$$

$$= \hat{u} \sin(\omega t + \phi) \hat{i} \sin(\omega t) \quad (66)$$

$$+ \hat{u} \sin(\omega t + \phi - 120^\circ) \hat{i} \sin(\omega t - 120^\circ) \\ + \hat{u} \sin(\omega t + \phi - 240^\circ) \hat{i} \sin(\omega t - 240^\circ) \quad (67)$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \cos \phi = 3|UI| \cos \phi \quad (68)$$

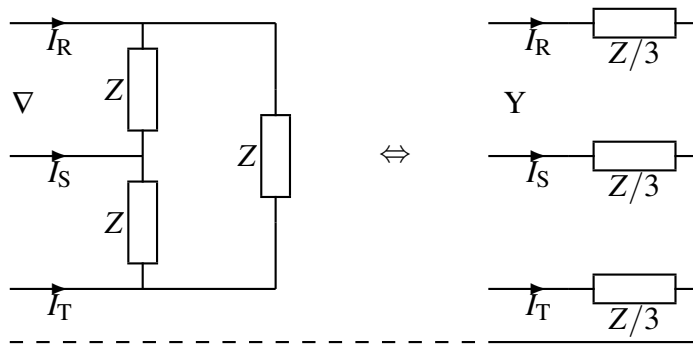
Yllä ei esitetty tuloksen johtamista yksityiskohtaisesti trigonometrian kaavojen avulla, mutta voit itse tarkistaa sen joko sinien tulon kaavalla tai sijoittamalla ajan funktiona muuttuvan kulman $\omega t + \phi$ paikalle eri arvoja. Tehon hetkellisarvo $p(t)$ on siis ajasta riippumaton vakio. Tämä on yksi kolmivaihejärjestelmän eduista: esim. moottori vääntää vakaasti, eikä syki sadan hertsin taajuudella, kuten yksivaihejärjestelmässä.

2.8 Yksivaiheinen sijaiskytkentä

Symmetrisen kolmivaihejärjestelmän matemaattinen käsittely on helpointa **yksivaiheisen sijaiskytkennän** pohjalta. Ennen sijaiskytkennän muodostamista kaikki kolmioon (∇) kytketyt osat muunnetaan tähtikytkentäisiksi (Y):

$$Z_Y = \frac{1}{3}Z_\nabla \quad R_Y = \frac{1}{3}R_\nabla \quad L_Y = \frac{1}{3}L_\nabla \quad C_Y = 3C_\nabla \quad (69)$$

Kolmioimpedanssit siis jaetaan kolmella; tulos seuraa suoraan kolmio-tähti-muunnoksen kaavasta (kuva 19).



Kuva 19. Impedanssien muuntaminen kolmiokytkennästä tähtikytkentään niin, että muun piirin virrat ja jännitteet säilyvät muuttumattomina.

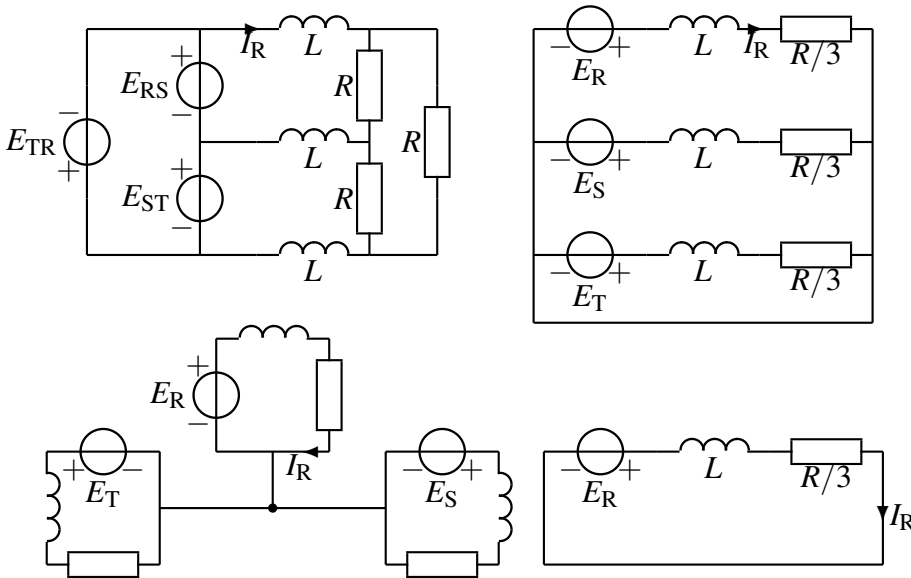
Muunnos ei vaikuta piirin toimintaan mitenkään. Piirin jännitteet ja virrat muunnettavan alueen ulkopuolella pysyvät samoina. Komponenttien ottamat tehotkaan eivät muunnoksessa muutu, koska impedanssin muutos kompensoituu jännitteen muuttumisella: pienempää impedanssia ($Z_\nabla/3$) vastaa pienempi jännite ($U_\nabla/\sqrt{3}$). Toisaalta teho on verrannollinen jännitteen itseisarvon neliöön. Jännitelähteiden kolmio-tähti-muunnoskaavat on esitetty aiemmin; jännite jaetaan neliöjuurikolmella ja kulgusta vähennetään 30° .

Yksivaiheiseen sijaiskytkentään otetaan jokaisesta tähteen kytketystä komponenttiryhmästä yksi edustaja (esimerkiksi R-vaiheesta) ja näiden lisäksi kaikille vaiheille yhteinen nollajohdin. Vaikka nollajohdinta ei olisi, se tulee aina yksivaiheiseen sijaiskytkentään mukaan. Nollajohdin voidaan liittää piiriin myös käytännössä, koska tähtipisteet ovat symmetrian takia samassa potentiaalissa. Nollajohtimessa mahdollisesti olevaa sarjaimpedanssia (Z_0) ei oteta mukaan, koska sen läpi kulkee virtaa

vain vikatilanteessa, jolloin piiri on epäsymmetrinen. R-vaiheesta lasketut tulokset voidaan tarvittaessa soveltaa S- ja T-vaiheisiin **vähentämällä vaihekulmista** joko 120° tai 240° . Viime mainittu vastaa 120° lisäämistä kulmaan. R-vaiheen tuloksen perusteella on mahdollista ratkaista myös kolmiovirrat ja kolmiojännitteet.

Yleensä vain vikatilanteissa kolmivaihejärjestelmä on merkittävästi epäsymmetrinen. **Epäsymmetrisen järjestelmän** analyysi lienee helpointa tehdä kaikille vaiheille samalla kertaa esimerkiksi silmukka-menettelällä. Jos epäsymmetriaa on vain lähteissä, käytetään joskus ns. kolmivaihejärjestelmän **symmetrisiä komponentteja**.

Lasketaan kuvan 20 kuormavastusten ottama teho yksivaiheisen sijaiskytkennän avulla $E_{RS} = \sqrt{3} \cdot 230 \angle 60^\circ$ V, $\omega L = 10 \Omega$, $R = \sqrt{3} \cdot 30 \Omega$. Muunnetaan ensin kolmiokytkentäiset jännitelähteet ja vastukset tähtikytkentään (kelat ovat valmiiksi tähtikytkennässä). Yhdistetään näin syntyvät tähtipisteet nollajohtimella. Otetaan lopuksi yksivaihesijaiskytkentään R-vaiheen kolme komponenttia ja edellä mainittu nollajohdin.



Kuva 20. Piiri muunnetaan ensin tähtikytkentäiseksi (ylh. oik.), minkä jälkeen yksivaiheinen sijaiskytkentä on helposti erotettavissa (alh. oik.). Nollajohtimen lisäämisen jälkeen jokainen kolmesta vaiheesta muodostaa oman toisista riippumattoman virtapiirinsä (vrt. kolmiapilan lehdykät). Piirit on yhdistetty toisiinsa

vain tähtipisteidensä kautta (alh. vas.).

$$E_R = \frac{E_{RS}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 230 \angle 30^\circ \quad (70)$$

$$I_R = \frac{E_R}{\frac{R}{3} + j\omega L} = \frac{115(\sqrt{3} + j1)}{10(\sqrt{3} + j1)} = 11,5 \angle 0^\circ \quad (71)$$

$$P = 3 \cdot \frac{R}{3} |I_R|^2 = 6872 \text{ W} \quad (72)$$

3 Vaihtovirtamoottorit

Moottori toimii usein generaattorina, tosin ei aina; tästä syystä puhutaan usein yleisemmin tasa- tai vaihtovirtakoneista. Vaihtovirtamoottorit ovat rakenteellisesti yksinkertaisempia kuin tasavirtamoottorit. Tasavirtakoneissa tarvitaan pyörimisliikkeen takia kommutointi eli napaisuuden vaihto. Virta pyörivään roottoriin kytketään hiiliharjojen kautta. Koska harjat liukuvat kuparielektrodeja vasten, ne eivät kestä ikuisesti. Harjattomat DC-moottorit ovat todellisuudessa vaihtovirtamoottoreita, jotka on varustettu tasavirtaa käyttävällä ohjauselektronikalla. Vaihtovirralla napaisuuden vaihto hoituu virran suunnanvaihdosten mukana.

Vaihtovirtakoneen toiminta on usein verrattavissa muuntajaan. Staattori indusoi roottoriin virran, joka muodostaa magneettikentän; magneettikentän voimavaikutus saa moottorin akselin pyörimään. Sähkökentän avulla ei käytännössä ole mahdollista saada aikaan yhtä suuria voimia. Tahtikoneen roottori pyörii samalla nopeudella kuin magneettikenttä. Tätä nopeutta kutsutaan synkroniseksi nopeudeksi n_s . Epätahtikoneessa roottori pyörii pienemmällä nopeudella kuin magneettikenttä, jolloin syntyy jättämä. Yleisin epätahtikone on oikosulkumoottori. Se on saanut nimensä häkkikäämityksestä: urissa on sauvat ja niiden päissä sauvoja yhdistävät oikosulkurenkaat.

3.1 Pyörimisnopeus n

Kolmivaihemoottorissa on vähintään kuusi napaa. Tällöin napapariluku $p = 1$ ja napaluku $2p = 2$. Napajako kertoo, miten navat sijoittuvat tasavälein ympyrän kaarelle $\tau = 180^\circ/p$. Tahtinopeus $n_s = \frac{f}{p}$ on sama kuin

magneettikentän pyörimisnopeus. Pyörimisnopeuden n säätö on aina mahdollista taajuusmuuttajalla. Myös napaparien määrän muuttaminen muuttaa pyörimisnopeutta.

Epätahtimoottorissa roottorin pyörimisnopeus on pienempi kuin magneettikentän pyörimisnopeus — siihenhän nimikin viittaa. Jättämä määrittellään suhteena

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{\Delta n}{n_s} \quad (73)$$

Jättämä ilmoitetaan usein prosentteina. Moottorin kuormitus vaikuttaa jättämään ja siten pyörimisnopeuteen. Tyhjäkäynnissä eli ilman mekaanista kuormaa $s = 0$ eli $n \approx n_s$. Mekaaninen kulmanopeus on verrannollinen jättämään

$$W = \frac{(1-s)\omega}{p} \quad (\omega = 2\pi f) \quad (74)$$

Epätahtimoottorin käynnistysvirta on moninkertainen verrattuna jatkuvan tilan virtaan. Tähti–kolmio -käynnistin pienentää kolmivaiheisen moottorin käynnistysvirtaa kertoimella $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$, koska tähtikytkennän jännite on suhteessa $\sqrt{3}$ pienempi. Moottorin hyötysuhde η on akselitehon suhde sähkötehoon. Moottorin momentti on voima kertaa säde (eli kohtisuora etäisyys akselin keskikohdasta) kuten yleensäkin.

Seuraavassa taulukossa on moottorin pyörimisnopeus eri napapari-lu-
vuilla ja kahdella eri jättämän s arvolla: 0 ja 0,15.

p	n_s	$[rpm = \frac{1}{60s}]$	$n = (1-s)n_s$, kun $s = 0,15$
1		3000	2550
2		1500	1275
3		1000	850
4		750	637,5
5		600	510
6		500	425