



Aalto-yliopisto

MS-A0004 Matriisilaskenta

Laskuharjoitus 2 / vko 38

Tehtäviä 1–4 lasketaan alkuviikon harjoituksissa. Näistä tehtävät 1 ja 2 esittelet valmistuttuaan assistentille (merkitty kirjaimella L = Lasketaan), tehtävien 3 ja 4 ratkaisut palautat sähköisesti kurssin MyCourses-kotisivujen kautta pe 24.9. klo 17.00 mennessä (merkitty kirjaimella P = Palautetaan). Tehtäviä 5–8 lasketaan loppuviikon harjoituksissa: 5 ja 6 paikanpäällä, kun taas 7 ja 8 palautetaan sähköisesti kurssin MyCourses-kotisivujen kautta ti 28.9. klo 17.00 mennessä. Tarkemmat palautusohjeet löytyvät kurssin kotisivuilta.

Tehtävä 1 (L): Hahmottele kompleksitasoon ne pisteet, jotka toteuttavat

- $|z + 3| = 1$,
- $|z - 1 + 2i| < 2$,
- $|1/z| > 2$.

Tehtävä 2 (L): Sanotaan, että kuvaus $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on *lineaarinen*, jos

$$\begin{cases} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) & \text{ja} \\ f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}) \end{cases}$$

jokaisella $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ja $t \in \mathbb{R}$.

- Anna esimerkki vektorista $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ siten, että kuvaus $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, **ei** ole lineaarinen.
- Osoita, että jokaisella vektorilla $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ kuvaus $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, on lineaarinen. Kuvausta g kutsutaan ns. *projektioksi* suuntaan \mathbf{v} .

Tehtävä 3 (P): Sievennä $(\cos(x) + i \sin(x))^3$ muotoon, jota käyttäen voit ilmoittaa luvut

$$\cos(3x) \quad \text{ja} \quad \sin(3x)$$

termien $\cos(x)$ ja $\sin(x)$ potenssien avulla.

Tehtävä 4 (P): Olkoon $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Esitä z polaarimuodossa. Laske neliöjuuri \sqrt{z} karteesisessä muodossa $x + iy$.

Tehtävä 5 (L): Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

käyttämällä Gaussin eliminaatiota tarpeellisin rivinvaihdoin. Mitä saamasi ratkaisu kertoo näistä kolmesta avaruuden tasosta?

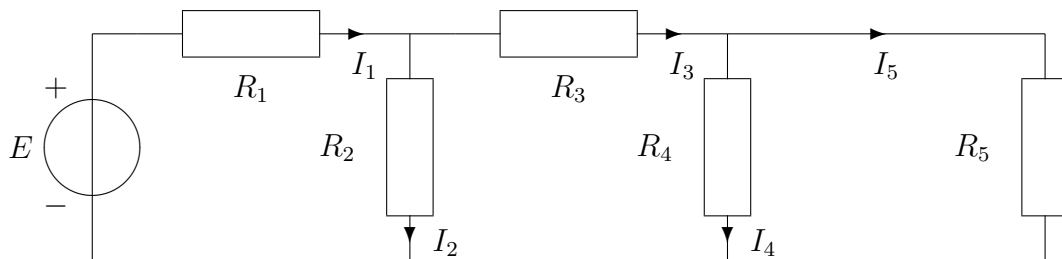
Tehtävä 6 (L): Määritä sellaiset kertoimet $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, että

$$a(x^3 - x^2 + x - 1) + b(x^3 + x^2 + 3x - 2) + c(x^2 + 3x + 1) + d(x^3 + 2x^2 - 2) + 7 = 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Käytä Gaussin eliminaatiota.

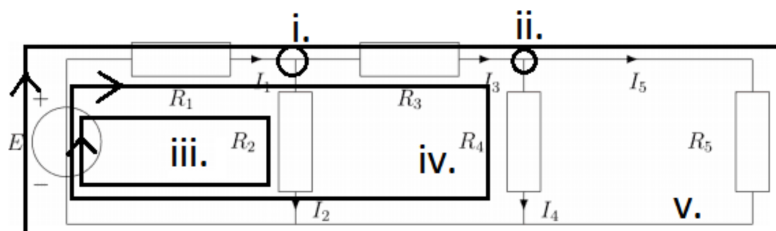
Vihje: Polynomi saa arvon nolla kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jos ja vain jos kaikki sen kertoimet ovat nollia.

Tehtävä 7 (P): Etsi Gaussin eliminaatiomenetelmän avulla virrat I_1, \dots, I_5 , kun vastukset ovat kaikki suuruudeltaan 1Ω ja jännite $E = 2V$. Tarvittavat yhtälöt saat Kirchoffin virta- ja jännitelakien avulla.



Vihje: Kirchoffin jännite- ja virtalait:

- K1: Virtapiirissä tiettyyn pisteeseen tulevien ja siitä lähtevien virtojen summa on sama
- K2: Potentiaalierojen summan virtapiirin ympäri täytyy olla nolla



Kuva 1: Kuvaan on merkitty käytettyjen yhtälöiden vaatimat risteykset ja kierrokset

Virtapiirissä on 5 tuntematonta, joten tarvitaan 5 yhtälöä:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_3 - I_4 - I_5 = 0 \\ E - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \\ E - I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0 \\ E - I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_5 R_5 = 0 \end{array} \right.$$

Tämä on kuin luennoilla: Ensimmäiset i ja ii tulevat virtalaista K1: esimerkiksi yläreunan keskellä olevassa risteyksessä täytyy lain K1 nojalla päteä $I_1 = I_2 + I_3$, josta saadaan yhtälö i. Yhtälöissä iii, iv ja v käytämme lakia K2: muistetaan, että vastuksen aiheuttama potentiaalin muutos on $U = IR$, joten kierroksessa (iii) esimerkiksi $E - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$.

Tässä $I_i \forall i$ ovat tuntemattomia, $E = 2V$ ja $R_i = 1\Omega \forall i$, joten voit ratkaista virrat I_i .

Tehtävä 8 (P): Nautalaumassa on 83 täysin ruskeata eläintä, 77 sarvipäätä, 36 sukupuoleltaan sonnia, 22 ruskeata sarvipäätä, 15 ruskeata sonnia, 25 sarvipäistä sonnia ja 7 ruskeata sarvipäistä sonnia. Kaikki lauman eläimet kuuluvat johonkin mainituista ryhmistä. Montako eläintä laumassa on?

Vihje: Jaa eläimet pistevieraisiin ryhmiin (eli kukin eläin kuuluu täsmälleen yhteen ryhmään). Esim. ruskeita sarvipäisiä sonneja x_1 kpl ... ei-ruskeita sarvettomia lehmiä x_8 kpl. Kirjoita lineaarinen yhtälöryhmä ja ratkaise!