MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto)
Turunen / Mustonen

**Välikoe 2 (9.4.2015 klo 9–12)**

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

**Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.**

**Tällä kertaa** saa olettaa tunnetuksi Fourier-käänteismuunnosten kaavat.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen. Kurssin läpipääsyyn tarvitaan kummastakin välikokeesta vähintään 3 pistettä.

1. Määritellään 1-jaksollinen analoginen signaali $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ kaavalla

$$s(t) := \frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(2\pi t \cdot k).$$

   a) Laske Fourier-kertoimet $\widehat{s}(\nu) \in \mathbb{C}$. (Vihje: $\cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$.)

   b) Näytä, että $s(t) = t^2$, kun $|t| \leq 1/2$. (Vihje: osittaisintegroi kahdesti.) Laske tämän tiedon avulla myös luku $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2}$.

2. Miten määritellään digitaalisen jaksottoman signaalin $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diskreetin ajan Fourier-muunnos $\widehat{s}$ (eli DTFT)? Minkä tyyppinen signaali $\widehat{s}$ on? Laske signaalin $r : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ Fourier-muunnos $\widehat{r}$, kun $r(t) := e^{-\pi|t|}$. Vastausta ei tarvitse nyt sieventää reaaliseksi.

   (Vihje: geometrinen sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$, kun $|q| < 1$.)

3. a) Miten määritellään digitaalisen jaksollisen signaalin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos $\widehat{s}$ (eli DFT)? Minkä tyyppinen signaali $\widehat{s}$ on? Miten määritellään signaalien $r, s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ konvoluutio $r * s$?

   b) Näytä, että $\widehat{r * s}\,(\nu) = \widehat{r}(\nu)\,\widehat{s}(\nu)$, kun $r, s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

   c) Tiedetään, että yleisen signaalin $q : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diskreetin Fourier-muunnoksen $\widehat{q}$ laskenta vie noin $N \log(N)$ aikayksikköä, kun $N$ on "suuri". Selitä tämän tiedon ja b-kohdan avulla, miksi konvoluution $r * s$ laskenta vie noin $3\,N \log(N)$ aikayksikköä.