

Tentti ja välikokeiden uusinnat (7.5.2015 klo 16–19)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Tentti: Tehtävät 1,2,5,6.

Välikokeen 1 uusinta: Tehtävät 1,2,3.

Välikokeen 2 uusinta: Tehtävät 4,5,6.

Kaikkia tehtäviä saa yrittää — opiskelijan kannalta paras tulkinta huomioidaan.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen. Muista mainita laskuissasi, jos käytät joitakin Fourier-analyysin kursilla tunnettuja muunnosten ominaisuuksia.

1. Tiedetään, että $\widehat{r} = r$, kun $r(t) = e^{-\pi t^2}$. Laske tämän tiedon avulla Fourier-muunnos $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, kun $s(t) := e^{-4\pi t^2} \cos(6\pi t)$.
[Vihje: Eulerin kaava $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ voi lyhentää vähän laskua.]
2. Todista, että Fourier-muunnos säilyttää sisätulon: siis näytä, että $\langle s, r \rangle = \langle \widehat{s}, \widehat{r} \rangle$ pätee “riittävän mukaville” signaaleille $s, r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.
(Vihje: saat olettaa tunnetuksi Fourier-käänteisintegraalin kaavan.)
3. “Mukavan” signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ autokorrelaatio $As : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ lasketaan

$$As(t) := \int_{\mathbb{R}} s(t+u) s(u)^* du.$$

Miten Fourier-muunnos \widehat{As} liittyy signaalin \widehat{s} energiatiheyteen?

[Autokorrelaatiolla voi etsiä signaalin melkein-periodisuuksia, kaikuja jne.]

4. Laske signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-kerroinmuunnos $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, missä $s(t) := \sin(2\pi t)^2$. Mikä on silloin signaalin s esitys Fourier-sarjana?
(Vihje: $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$.)
5. a) Miten määritellään digitaalisen jaksottoman signaalin $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetin ajan Fourier-muunnos \widehat{s} (eli DTFT)? Minkä tyyppinen signaali \widehat{s} on? Entä mikä on tällöin Fourier-käänteismuunnoksen kaava?
b) Todista a-kohdan käänteismuunnoksen kaava laskemalla!
6. a) Miten määritellään digitaalisen jaksollisen signaalin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos \widehat{s} eli DFT? Minkä tyyppinen signaali \widehat{s} on? Entä mikä on tällöin Fourier-käänteismuunnoksen kaava?
b) Tarkastellaan 2-periodista digitaalista signaalia $s_0 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, jolle $s_0(t) = |t|$, kun $|t| \leq 1$. Olkoon $s_{k+1} := \widehat{s_k}$. Laske $s_1, s_2, s_3, s_4 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.