MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto) Turunen / Mustonen
10.11.2015, 16:30–19:30

Tehtävät / Övningar / Problems:
Välikoe 1 / Mellanförhör 1 / 1st midterm exam: 1,2,3.
Välikoe 2 / Mellanförhör 2 / 2nd midterm exam: 4,5,6.
Tentti / Tentamenten / Final exam: Tehtävät/Övningar/Problems 1,2,4,5.

Pisteitä myös hyvästä yrityksestä! **Laskimet ja kirjallisuus kielletty.**
Poäng också för goda försök! **Kalkylator och litteratur är förbjudna.**
Points also for good effort! **Calculators and literature forbidden.**

1. Tiedetään, että $\widehat{r} = r$, kun $r(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$. Laske signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourier-muunnos, missä $s(t) = r(3t-4) + r(4-3t)$. Sievennä tulos reaaliseksi!

2. Mitä tarkoittaa, että Fourier-integraalimuunnos säilyttää energian? Laske signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ energia, missä $s(t) = \displaystyle\int_{-3}^{5} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t\cdot\nu}\, \mathrm{d}\nu$.

3. Signaalien $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *korrelaatio* on $q = COR(r,s) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, jolle
$$q(u) = COR(r,s)(u) := \int_{\mathbb{R}} r(t+u)\, \overline{s(t)}\, \mathrm{d}t.$$
Esitä signaalin q Fourier-muunnos $\widehat{q}$ Fourier-muunnosten $\widehat{r}, \widehat{s}$ avulla.

4. Kun $0 < r < 1$, *Poisson-ydin* $P_r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ on $P_r(t) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{-|k|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot k}$.

   a) Laske $\widehat{P_r} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. b) Näytä, että $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(2\pi t)}$.

5. Miten määritellään signaalin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos $\widehat{s}$? Näytä, että s voidaan laskea takaisin signaalista $\widehat{s}$.

6. Signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *Wigner-jakauma* $W[s] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ määritellään
$$W[s](t,\nu) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi u\cdot\nu}\, s(t+u/2)\, s(t-u/2)^*\, \mathrm{d}u.$$
Laske $W[s]$, kun $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ (tiedetään, että silloin $\widehat{s} = s$).

---

1. Vi vet att $\widehat{r} = r$, när $r(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$. Räkna Fourier-transformen av signalen $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, där $s(t) = r(3t-4) + r(4-3t)$. Skriv ditt svar reelt!

2. Vad menar man med att "Fourier-transformen bevarar energin"? Beräkna energin av signalen $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, där $s(t) = \displaystyle\int_{-3}^{5} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t\cdot\nu}\, \mathrm{d}\nu$.

3. *Korrelation* mellan $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är signal $q = COR(r, s) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, där

$$q(u) = COR(r, s)(u) := \int_{\mathbb{R}} r(t + u)\ \overline{s(t)}\ \mathrm{d}t.$$

Presentera Fourier-transformen $\widehat{q}$ av signalen q med hjälp av $\widehat{r}, \widehat{s}$.

4. När $0 < r < 1$, *Poisson-kärnan* $P_r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ är $P_r(t) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{-|k|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t \cdot k}$.

   a) Beräkna $\widehat{P_r} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. b) Visa, att $P_r(t) = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\ \cos(2\pi t)}$.

5. Hur definierar man den diskreta Fourier-transformen $\widehat{s}$ av signalen $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$? Argumentera, hur kan man beräkna s tillbaka från $\widehat{s}$.

6. *Wigner-distributionen* $W[s] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ av $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieras som

$$W[s](t, \nu) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi u \cdot \nu}\, s(t + u/2)\, s(t - u/2)^*\ \mathrm{d}u.$$

Beräkna $W[s]$, när $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ (vi vet att då gäller $\widehat{s} = s$).

---

1. We know that $\widehat{r} = r$ if $r(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$. Find the Fourier transform of signal $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, where $s(t) = r(3t-4) + r(4-3t)$. Write your answer real-valued!

2. What do we mean by the phrase "Fourier transform preserves energy"? Find the energy of the signal $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, where $s(t) = \displaystyle\int_{-3}^{5} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t \cdot \nu}\ \mathrm{d}\nu$.

3. *Correlation* between $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is $q = COR(r, s) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, where

$$q(u) = COR(r, s)(u) := \int_{\mathbb{R}} r(t + u)\ \overline{s(t)}\ \mathrm{d}t.$$

Present the Fourier transform $\widehat{q}$ of the signal q using $\widehat{r}, \widehat{s}$.

4. For $0 < r < 1$, the *Poisson kernel* $P_r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ is $P_r(t) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{-|k|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t \cdot k}$.

   a) Find $\widehat{P_r} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. b) Show that $P_r(t) = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\ \cos(2\pi t)}$.

5. How do we define the discrete Fourier transform $\widehat{s}$ of the signal $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$? Show that we can find s back from $\widehat{s}$.

6. The *Wigner distribution* $W[s] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ of $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is defined by

$$W[s](t, \nu) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi u \cdot \nu}\, s(t + u/2)\, s(t - u/2)^*\ \mathrm{d}u.$$

Find $W[s]$ when $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ (then we know that $\widehat{s} = s$).