

MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC\*, ENG\*)  
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1  
Luento 1: Jonot

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 20, 2021

- **Luonnollisten lukujen joukko**  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .
- **Kokonaislukujen joukko**  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ .
- **Rationaalilukujen joukko**  $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ .
- **Reaalilukujen joukko**  $\mathbb{R}$ . Täsmällinen konstruointi palautuu rationaalilukuihin, jossa eri mahdollisuuksia:

Dedekindin leikkaukset, rationaaliset Cauchy-jonot,  
desimaaliapproksimaatiot...

Palaamme desimaaliapproksimaatioihin hetken kuluttua.

Suurin osa reaaliluvuista ei ole rationaalisia, esimerkiksi  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ , Neperin luku  $e$ . Luvun  $\sqrt{2}$  irrationaalisuus tunnettu jo antiikin Kreikassa, nyt **tauluesimerkinä**.

- Lukujonolla tarkoitetaan *ääretöntä* jonoa reaalilukuja  $a_n \in \mathbb{R}$ , kun indeksi  $n \in \mathbb{N}$ . Merkitään

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

- Lukujono on oikeastaan funktio  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , jolle  $f(n) = a_n$ .
- Jonon indeksointi voi alkaa myös jostakin muusta arvosta kuin 1. Jos indeksin alkuarvo ei ole tärkeä tai tilanne on muuten selvä, voidaan käyttää merkintää  $(a_n)$ .
- On myös *kahteen suuntaan äärettömiä* jonoja, joiden indeksijoukkona on kaikkien kokonaislukujen joukko  $\mathbb{Z}$ .

Jonoja voidaan määritellä

- antamalla yleisen termin lauseke; esimerkiksi

$$a_n = 2^n, \text{ kun } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{lukujono } (2, 4, 8, 16, \dots).$$

- rekursiivisesti palautuskaavojen avulla, erityisesti monissa numeerisissa menetelmissä. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \quad \text{kun } n \geq 2 \\ &\Rightarrow \text{Fibonaccin lukujono } (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

- tekemällä mittauksia jostakin systeemistä; esimerkiksi äänen voimakkuus tasaisin aikavälein (idealisoituna äärettömäksi jonoksi).

- Mitä jonon ominaisuuksia saadaan selville yleisen termin tai palautuskaavojen avulla?
- Miten palautuskaavasta saadaan yleisen termin lauseke? Esimerkiksi Fibonaccin jonolle

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-\varphi)^{-n}),$$

jossa

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

on ns. kultaisen leikkauksen suhteen  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$  käänteisluku.

## Määritelmä

Lukujono  $(a_n)$  on

- **ylhäältä rajoitettu**, jos on olemassa sellainen  $C \in \mathbb{R}$ , että  $a_n \leq C$  kaikilla  $n$ ;
- **alhaalta rajoitettu**, jos on olemassa sellainen  $c \in \mathbb{R}$ , että  $a_n \geq c$  kaikilla  $n$ ;
- **rajoitettu**, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu (t.s., jono  $(|a_n|)$  on ylhäältä rajoitettu);
- **nouseva**, jos  $a_{n+1} \geq a_n$  kaikilla  $n$ ;
- **laskeva**, jos  $a_{n+1} \leq a_n$  kaikilla  $n$ ; ja
- **monotoninen**, jos se on nouseva tai laskeva.

## Määritelmä

Lukujono  $(a_n)$  **suppenee** kohti raja-arvoa  $L \in \mathbb{R}$ , jos lausekkeen  $|a_n - L|$  arvo lähestyy nollaa, kun  $n \rightarrow \infty$ .

Täsmällisemmin: Jokaista  $\varepsilon > 0$  vastaa sellainen indeksi  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , että  $|a_n - L| < \varepsilon$  aina, kun  $n \geq n_\varepsilon$ .

Tällöin merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ tai } \lim a_n = L \text{ tai lyhyesti } a_n \rightarrow L.$$

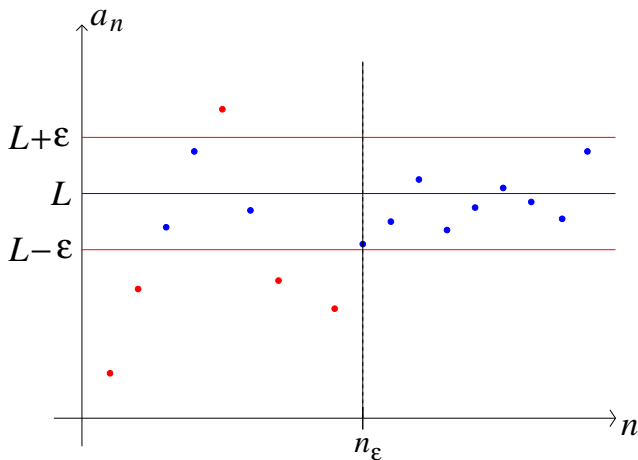
Jos lukujono ei suppenee, niin se **hajaantuu**.

Huom:  $|a_n - L|$  = jonon pisteen  $a_n$  ja raja-arvon  $L$  välinen etäisyys:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

# Suppeneminen II

Idea: Mitä pienempi  $\varepsilon$ , sitä suurempi  $n_\varepsilon$  tarvitaan.





# Täydellisyysaksiooma

Reaaliluvut ja rationaaliluvut eroavat toisistaan seuraavassa tärkeässä mielessä.

## Täydellisyysaksiooma:

Nouseva ja ylhäältä rajoitettu reaalilukujono  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suppenee **kohti jotain reaalilukua**.

Aksiooma tarjoaa mahdollisuuden reaaliluvun intuitiiviseen *kuvaukseen* desimaalikehityksen avulla:

Reaaliluku  $n, d_1 d_2 \dots$ , jossa kokonaisosa  $n$  on kokonaisluku ja desimaalit  $d_1, d_2, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , on monotonisen rationaalilukujonon  $(n; n, d_1; n, d_1 d_2; n, d_1 d_2 d_3, \dots)$  raja-arvo.

Nousevien, ylhäältä rajoitettujen rationaalijonojen kohdalla ongelma on se, ettei raja-arvo ole aina **rationaaliluku**!

# Yleisiä tuloksia

- Laskeva ja alhaalta rajoitettu jono suppenee. **Miksi?**
- Suppeneva jono on rajoitettu. **Selvitä piirtämällä!**
- Suppiloperiaate: Jos  $a_n \leq b_n \leq c_n$  jostakin indeksistä alkaen ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L,$$

niin jono  $(b_n)$  suppenee ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ . **Piirrä!**

- Geometrinen jono  $(q^n)$  suppenee, jos suhdeluku  $-1 < q \leq 1$ , jolloin sen raja-arvo on joko 0 tai 1. Muissa tapauksissa geometrinen jono hajaantuu.
- Jonon suppenemista kohti nollaa voi tutkia lausekkeen  $|a_{n+1}/a_n|$  avulla: jos jostakin indeksistä alkaen on  $|a_{n+1}/a_n| \leq q$  ja  $0 \leq q < 1$ , niin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Seuraa suppiloperiaatteesta ja geometrisesta jonosta. **Tauluesimerkki.**

## Lause

Jos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  ja  $c \in \mathbb{R}$ , niin

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c a$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a/b$ , jos  $b \neq 0$ .

**Huom:** Viimeisen kohdan oletuksesta  $b \neq 0$  seuraa, että  $b_n \neq 0$  jostakin indeksistä alkaen.

Perustelu: Ensimmäinen kaava perustuu epäyhtälöön

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Toinen kaava seuraa yhtälöstä

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a|.$$

Kolmannen kaavan kohdalla käytetään epäyhtälöä

$$|a_nb_n - ab| = |(a_nb_n - a_nb) + (a_nb - ab)| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|$$

ja sitä, että  $|a_n| \leq C$  jollakin vakiolla  $C$ .

Neljannen kaavan kohdalla osoitetaan aluksi, että  $1/b_n \rightarrow 1/b$ , ja käytetään sen jälkeen tulokaavaa.

## Esimerkki

Laske raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n}{n^2 + 1}$ .

**Ratkaisu:** Koska

$$\frac{3n^2 + 4n}{n^2 + 1} = \frac{n^2(3 + 4/n)}{n^2(1 + 1/n^2)} = \frac{3 + 4/n}{1 + 1/n^2}$$

ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

niin raja-arvon laskusääntöjen mukaan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n}{n^2 + 1} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3.$$

# Eräitä raja-arvoja

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , kun  $a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \text{Neperin luku} \approx 2,7182818\dots$  Tähän palataan myöhemmin.
- Stirlingin kaava (jolle ei helppoa todistusta!):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1.$$

Idea: Ensimmäinen seuraa toisesta suppiloperiaatteen avulla. Toisen kohdalla merkitään  $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$  ja sovelletaan binomikaavaa:  $n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + n(n-1)x_n^2/2 + \dots > 1 + n(n-1)x_n^2/2$ , joten  $0 < x_n < \sqrt{2/n}$ . Väite seuraa tästä suppiloperiaatteen avulla.

Myös käsitteet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ ja } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

voidaan määritellä täsmällisesti.

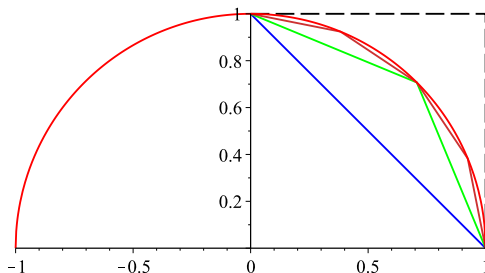
Esimerkiksi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \text{jokaista lukua } M \in \mathbb{R} \text{ vastaa sellainen indeksi } n_M \in \mathbb{N}, \\ \text{että } a_n \geq M \text{ aina, kun } n \geq n_M.$$

Sanotaan: Jono  $(a_n)$  **hajaantuu** kohti ääretöntä.

# Ympyrän kaarenpituus ja kulma I

Kaarenpituus yksikköympyrällä  $x^2 + y^2 = 1$  määritellään seuraavalla tavalla: Jaetaan tutkittava kaari tasavälisesti  $2^n$ :ään osaan ja lasketaan vastaavan murtoviivan pituus  $a_n$ . Näin saadaan nouseva ja ylhäältä rajoitettu jono, jonka raja-arvo on kyseessä olevan kaaren pituus.





# Ympyrän kaarenpituus ja kulma II

## Määritelmä

Luku  $\pi$  on yksikköympyrän puolikkaan kaarenpituus.

Kaarenpituuden avulla määritellään kulman yksikkö radiaani (lyh. rad), joka on dimensioton. Trigonometriset funktiot  $\sin x$  ja  $\cos x$  määritellään yksikköympyrän kaarenpituuden avulla kaikille  $x \in \mathbb{R}$ .

