Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos — Malinen/Laurén

MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1, I/2021

Laskuharjoitus 3A alkuviikolla 39
Aihepiiri: Funktion jatkuvuus ja raja-arvo, derivaatta

Tehtävät 1–3 lasketaan ennen alkuviikon harjoitusta ja harjoituksissa opiskelijat esittävät ratkaisunsa taululla. Tehtävät 4–6 palautetaan MyCoursesin kautta tiistaihin 5.10. klo 23:59 mennessä. Muista myös verkkotehtävät MyCoursesissa.

1. (Adams & Essex 1.2.39) Raja-arvo
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
on funktion f derivaatta $f'(x)$, jos se on olemassa. Laske määritelmän perusteella funktion $f(x)=1/x$ derivaatta, kun $x\neq 0$.

2. a) (A & E 4.4.15) Laske raja-arvo
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}.$$
b) Voiko L'Hospitalin sääntöä käyttää raja-arvon $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}$ laskemiseen?

3. a) Toisen asteen yhtälön $ax^2-x+b=0$ yksi ratkaisu on muotoa
$$f(a)=\frac{1-\sqrt{1-4ab}}{2a},$$
kun $a\neq 0$. Laske raja-arvo $\lim\limits_{a\to 0}f(a)$.
b) Mitä tapahtuu yhtälön toiselle ratkaisulle, kun $a\to 0$?

4. Laske seuraavien funktioiden derivaatat kohdassa $x=1$:
$$f(x)=(4x-3)^5,\ \ g(x)=\sqrt{7-3x^2},\ \ h(x)=x(\sin(\pi x)-\cos(\pi x/2)).$$

5. (A & E 4.8.41) Poikkileikkaukseltaan suorakulmion muotoisen vaakasuoran palkin taivutusjäykkyys pystysuorassa suunnassa on suoraan verrannollinen sen leveyden ja korkeuden kuution tuloon, ts. se on muotoa cxy^3, missä $c>0$ on vakio. Määritä jäykimmän palkin leveys ja korkeus, kun se sahataan R-säteisestä tukista.

6. (Maple tai symbolinen laskin: Palauta 1 sivu Maple-koodia tai sopivia välivaiheita.) Kuulantyönnön tulos riippuu kuulan alkunopeudesta v, lähtökorkeudesta h ja työnnön suuntakulmasta x seuraavan lausekkeen mukaisesti:

$$f := x \to \frac{v\cos(x)\left(v\sin(x) + \sqrt{v^2\sin(x)^2 + 2hg}\right)}{g},$$

jossa $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Käytetään SI-järjestelmän yksiköitä ja oletetaan, että $v = 14$ ja $g = 9.81$. **Lähtökorkeus lasketaan opiskelijanumerosta (mahdolliset kirjaimet pois):** $301234 \Rightarrow h = 3.01234$. Määritä työnnön optimaalinen suuntakulma asteina ja maksimitulos.
Vihje: Muista kertomerkit. Kuvaajasta voit tarkistaa, että olet oikeilla jäljillä.

Laskuharjoitus 3L loppuviikolla 39
Aihepiiri: Taylor-polynomi, alkeisfunktiot

Näitä tehtäviä lasketaan ja käsitellään harjoituksen aikana.

1. Muodosta kolmannen asteen Maclaurin-polynomit $P_3(x) = P_3(x; 0)$ funktiolle $f(x) = \cos(2x)$ ja $g(x) = xe^{3x}$
   a) laskemalla tarvittavat derivaatat;
   b) käyttämällä apuna kosinin ja eksponenttifunktion tunnettuja polynomeja.

2. Ns. Mooren lain (alkuperäisen version) mukaan uusimman mallin mikropiirillä olevien komponenttien lukumäärä $N = N(t)$ kaksinkertaistuu n. 24 kuukauden välein.
   a) Funktiolla $N(t) = N_0e^{kt}$ on lakiin liittyvä ominaisuus $N(t + 24) = 2N(t)$ kaikilla t, kun vakio $k > 0$ valitaan sopivalla tavalla: Miten?
   b) Missä ajassa komponenttien lukumäärä kolminkertaistuu?

3. (vrt. Adams & Essex 4.8.46, s.267) Teekkari katselee valkokangasta, jonka korkeus on 5 metriä ja jonka alareuna on 1 m silmien tason yläpuolella.
   a) Päättele, että valkokangas näkyy (pystytasossa) kulmassa

   $$\alpha(x) = \arctan(6/x) - \arctan(1/x),$$

   kun x on teekkarin vaakasuora etäisyys kankaasta.
   b) Määritä $\lim_{x\to 0+} \alpha(x)$ ja $\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$ joko kuvion tai a-kohdan lausekkeen avulla.
   c) Miltä etäisyydeltä kangas näkyy suurimmassa mahdollisessa kulmassa (pystytasossa mitattuna)? Välivaiheet on tarkoitus laskea käsin, mutta tuloksen voi toki tarkistaa koneella.