Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos — Malinen/Laurén

MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1, I/2021

Laskuharjoitus 4A alkuviikolla 40
Aihepiiri: Alkeisfunktiot, käänteisfunktio

Tehtävät 1–3 lasketaan ennen alkuviikon harjoitusta ja harjoituksissa opiskelijat esittävät ratkaisunsa taululla. Tehtävät 4–6 palautetaan MyCoursesin kautta tiistaihin 12.10. klo 23:59 mennessä. Muista myös verkkotehtävät MyCoursesissa.

1. Laske funktion $f(x) = e^{\sin(x^2)}$ derivaatta.

2. Laske ensin $\sinh(\ln(x + \sqrt{x^2+1}))$ ja tämän jälkeen funktion $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ derivaatta. Oletetaan, että F on kaikkialla derivoituva funktio ja F' on sen derivaatta. Määritä funktio, jonka derivaatta on
$$\text{(a)} \quad \frac{F'(x)}{\sqrt{1+F(x)^2}}, \qquad \text{(b)} \quad \frac{F'(2x+3)}{\sqrt{1+F(2x+3)^2}}.$$

3. Laske luvun $\sqrt{83}$ approksimaatio käyttäen hyväksi tietoa, että $\sqrt{81} = 9$ ja linearisoimalla funktiota $\sqrt{x}$. Onko tarkka arvo suurempi vai pienempi kuin laskemasi arvo?

4. Olkoot $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivoituvia funktioita. Olkoon f parillinen eli $f(-x) = f(x)$ kun $x \in \mathbf{R}$ ja olkoon g pariton eli $g(-x) = -g(x)$ kun $x \in \mathbf{R}$. Mitä voidaan sanoa funktioiden f' ja g' parillisuudesta tai parittomuudesta?

5. Olkoon $f(x) = x^2 \ln x$, kun $1 \le x < \infty$. Funktio f on aidosti kasvava (perustele tämä), joten f:llä on käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion derivaatan arvo $(f^{-1})'(y_0)$ pisteessä $y_0 = e^2$.

6. a) Derivoi funktiot $\ln(\ln x)$, $xe^x - e^x$ ja $x \ln x - x$.
   b) Sievennä lauseke $4 \ln \sqrt{x} + 6 \ln \sqrt[3]{x}$, kun $x > 0$.

Laskuharjoitus 4L loppuviikolla 40
Aihepiiri: Derivaatan ketjusääntö, integraali

Näitä tehtäviä lasketaan ja käsitellään harjoituksen aikana.

1. Laske seuraavat integraalit:

$$\text{a)} \int_0^4 (12x^2 - 6\sqrt{x} + 1)\,dx, \quad \text{b)} \int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx, \quad \text{c)} \int_{-2}^{2} e^{-x}\,dx.$$

2. Kaksi ajasta riippuvaa vastusta R_1 ja R_2 on kytketty rinnan, eli niiden yhdistetty resistanssi on $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Eräällä hetkellä, kun $R_1 = 300\Omega$ ja $R_2 = 600\Omega$, resistanssi R_1 kasvaa nopeudella $50\frac{\Omega}{\text{vuosi}}$.

   a) Kuinka nopeasti ja mihin suuntaan R_2:n arvoa pitää “trimmata”, jotta yhdistetty resistanssi R pysyisi vakiona?

   b) Millä nopeudella R_2:n pitäisi vanhetessaan muuttua, jotta R kasvaisi itsekseen nopeudella $20\frac{\Omega}{\text{vuosi}}$?

3. Osoita Bolzanon merkinvaihtolauseen (eli jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuuden) avulla, että yhtälöllä

$$3x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$$

   on vähintään kolme erisuurta ratkaisua.

4. Oletetaan, että F on kaikkialla derivoituva funktio ja F' on sen derivaatta. Määritä funktio, jonka derivaatta on

$$\text{(a)} \quad F(x)^3 F'(x), \qquad \text{(b)} \quad F(3x)^2 F'(3x), \qquad \text{(c)} \quad F(5x+2)^{-\frac{3}{2}} F'(5x+2).$$