Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Malinen/Laurén

MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1, I/2021

Laskuharjoitus 6A alkuviikolla 42
Aihepiiri: Differentiaaliyhtälöt

Tehtävät 1–3 lasketaan ennen alkuviikon harjoitusta ja harjoituksissa opiskelijat esittävät ratkaisunsa taululla. Tehtävät 4–6 palautetaan MyCoursesin kautta **sunnuntaihin 24.10.** klo 23:59 mennessä. Muista myös verkkotehtävät MyCoursesissa.

1. Ratkaise separoituvat differentiaaliyhtälöt
   a) $y' = 2 + y$, $y(0) = 2$;
   b) $y' = y/x$, $y(1) = 3$.

   B-luokan vihje: Alkuehdon perusteella tutkitaan tapausta $x > 0,\ y > 0$.

2. Kaukolämpöputken sisäsäde on 1 ja ulkosäde 2. Putken sisäpinnan lämpötila on 100 ja ulkopinnan lämpötila 0. Määritä putken lämpötila $u = u(r)$ säteen r funktiona arvoilla $1 \leq r \leq 2$. Lämpötila toteuttaa differentiaaliyhtälön $ru'' + u' = 0$.

   Vihje: Merkitään $u'(r) = v(r)$, jolloin $u'' = v'$. Ratkaise ensin $v(r)$ separoituvasta differentiaaliyhtälöstä $rv' + v = 0$ ja sen jälkeen $u(r)$ integroimalla. Menetelmän nimi on *kertaluvun pudotus*.

3. a) Määritä yleinen ratkaisu yhtälölle $y'' = \sin 2x$. Etsi se erikoisratkaisu, joka toteuttaa $y(0) = -1/4,\ y(\pi/4) = \pi/2$.
   b) Anna jokin 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu on $y = x^4$. Keksitkö toista?

4. Näytä, että funktiopari

$$\begin{cases} y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ z(t) = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t \end{cases}$$

   toteuttaa differentiaaliyhtälösysteemin

$$\begin{cases} y'(t) - z'(t) = y(t), \\ 2y'(t) - z'(t) = z(t). \end{cases}$$

5. Etsi differentiaaliyhtälön $x'' + 2x' - 3x = 0$ yleinen ratkaisu. Kirjoita ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö $x'' + 2x' - 3x = t^2$ alkuehdoilla $x(0) = 1$ ja $x'(0) = 1$.

Laskuharjoitus 6L loppuviikolla 42
Aihepiiri: Differentiaaliyhtälöt

Näitä tehtäviä lasketaan ja käsitellään harjoituksen aikana.

1. Etsi differentiaaliyhtälön $x'' - 2x' + 5x = e^t$ ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

2. Etsi differentiaaliyhtälön

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = C \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

   yleinen ratkaisu.

   Vihje: Kokeile erikoisratkaisuyritettä $x_p(t) = Kt \sin(\omega t) + Lt \cos(\omega t)$.

3. Tarkastellaan vaimennettua massajousisysteemiä. Punnuksen poikkeamalle $x(t)$ tasapainoasemastaan hetkellä $t \geq 0$ on johdettu differentiaaliyhtälö

$$mx''(t) + \mu x'(t) + kx(t) = 0, \tag{1}$$

   jossa $m > 0$ on punnuksen massa, $\mu \geq 0$ on kitkasta johtuva vaimennuskerroin ja $k > 0$ on jousivakio.

   Systeemiin varastoitunut kokonaisenergia hetkellä $t \geq 0$ saadaan kaavasta

$$E_{tot}(t) = \tfrac{1}{2} m \left[x'(t)\right]^2 + \tfrac{1}{2} k \left[x(t)\right]^2. \tag{2}$$

   Perustele kaava (2). Osoita että kokonaisenergia on ei-kasvava ajan funktio. Osoita vielä että kokonaisenergia säilyy kun $\mu = 0$, eli kun kitkaa ei ole.

   Vihje: Laske derivaatta $\frac{d}{dt} E_{tot}(t)$ ja sievennä saatua lauseketta käyttäen differentiaaliyhtälöä (1).