Fourier-analyysi, I/21, Laskuharjoitus 2.

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Matlab-tehtävä (3p.) palautetaan Mycoursesiin.

Harjoitustehtävä 2.1. Laske signaalin s energia $\|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \,\mathrm{d}t$, kun $s(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$.

Vihje: $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
jonka voi laskea napakoordinaateissa.

Harjoitustehtävä 2.2. Laske signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourier-muunnos $\widehat{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kun $s(t) = \mathrm{e}^{-3|t|}$. Symmetrian vuoksi $\widehat{s}(\nu) \in \mathbb{R}$, joten sievennä vastauksesi reaaliseksi! Hahmottele myös aika- ja taajuusjakaumien $|s|^2$ ja $|\widehat{s}|^2$ kuvaajat.

Harjoitustehtävä 2.3. Olkoon $s(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$, kun $t \in \mathbb{R}$. Näytä, että $s \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ eli että $s \in C^\infty(\mathbb{R})$ ja

$$\lim_{|t|\to\infty} t^m\, s^{(n)}(t) = 0$$

jokaisella $m, n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

Harjoitustehtävä 2.4. Olkoon $s \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ja $r(t) := t\, s(t)$, kun $t \in \mathbb{R}$. Näytä, että

$$\widehat{s}\,'(\nu) \quad = \quad -\mathrm{i}2\pi\, \widehat{r}(\nu),$$

Matlab-tehtävä 2.1. Huomaa, että aiempia Matlab-komentoja voi kelata nuolinäppäimillä. Jos kirjoitat jonkin aiemman komentorivin alun, saat "pikakelattua" vastaavanlaiset komentorivit näkyviin.
Usein on helpointa kirjoittaa pitkä laskutoimitus esimerkiksi tiedostoksi `laskut.m` työskentelyhakemistoon. Silloin voit ajaa tiedoston syöttämällä sanan `laskut` Matlabin komentoriville. Välillä voi olla tarpeen pyyhkiä muuttujat muistista komennolla `clear all`
Yksi kuva kummastakin osakohdasta riittää.

a.) Tarkastellaan fraktaalikäyrää $y = s(t)$, missä $s(t) := \lim_{n\to\infty} s_n(t)$ ja

$$s_n(t) := \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \sin\left(2\pi 2^k t\right).$$

Huomaa jaksollisuudet $s_n(t+1/2) = s_n(t)$ ja $s(t+1/2) = s(t)$.

Piirrä Matlab-kuvitus:

```
h=0.001; t=[h:h:1]; n=10; sn=zeros(size(t));
for k=1:n, sn=sn+2^(-k)*sin(2*pi*2^k*t); end;
plot(t,sn);
```

Kokeile muuttujalle `n` esimerkiksi arvoja $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

b.) Siloita edellä mainittua fraktaalikäyrää seuraavasti:

```
h=0.001; t=[h:h:1]; n=10; sn=zeros(size(t));
for k=1:n, sn=sn+2^(-k)*sin(2*pi*2^k*t); end;
m=length(t); steps=1000; u=zeros(steps,m); u(1,:)=sn;
for k=1:steps-1,
  u(k+1,:)=u(k,:)/2+[u(k,2:m) u(k,1)]/4+[u(k,m) u(k,1:m-1)]/4;
end;
plot(t,u(1,:),t,u(10,:),t,u(100,:),t,u(1000,:));
```

(Huomautus: Yllä voidaan ajatella, että $t \mapsto s(t)$ on äänisignaali eli ilmanpaine $s(t)$ ajanhetkellä t. Toisaalta $s(t)$ voisi myös olla lämpötila paikassa t, jolloin ylläoleva Matlab-laskenta kuvaa lämmönjohtumista ohuessa langassa!)