Fourier-analyysi, I/21, Laskuharjoitus 4.

Analogisten signaalien $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvoluutio $r * s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ määritellään kaavalla

$$r * s(t) := \int_{\mathbb{R}} r(t-u)\, s(u) \mathrm{d}u.$$

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Matlab-tehtävä (3p.) palautetaan Mycoursesiin.

Harjoitustehtävä 4.1. Laske normaalijakauman tiheysfunktion $s = \varphi_{\mu,\sigma}$ Fourier-muunnos, missä

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \mathrm{e}^{-((t-\mu)/\sigma)^2/2}.$$

Voit palauttaa integraalin sopivilla muuttujanvaihdoilla tunnettuun tilanteeseen $\widehat{r} = r$, kun $r(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$.

Harjoitustehtävä 4.2. Tarkastellaan signaaleja $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, missä $s_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ja

$$\widehat{s_0} = s_1,\ \widehat{s_1} = s_2,\ \widehat{s_2} = s_3 \text{ ja } \widehat{s_3} = s_4.$$

Miten s_0 ja s_4 liittyvät toisiinsa ja miksi näin on?

Harjoitustehtävä 4.3. Signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ itseinen integroituvuus tarkoittaa $\|s\|_{L^1} < \infty$, missä

$$\|s\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}} |s(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Todista seuraavat väitteet:
a) Konvoluutiolle pätee $\|r * s\|_{L^1} \leq \|r\|_{L^1}\, \|s\|_{L^1}$.
b) $\widehat{r * s} = \widehat{r}\,\widehat{s}$.
c) $(r * s)' = r' * s$, jos r, r', s ovat itseisesti integroituvia.

Harjoitustehtävä 4.4. Laske $s * s$ ja $\widehat{s * s}$, kun

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{jos } |t| \leq 1/2, \\ 0, & \text{jos } |t| > 1/2. \end{cases}$$

Harjoitustehtävä 4.5. Näytä, että analogisille signaaleille $q, r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pätee

$$r * s = s * r \quad \text{ja} \quad q * (r * s) = (q * r) * s.$$

Matlab-tehtävä 4.1. Tässä tehtävässä käsitellään kohinaisen signaalin Fourier-muunnosta. Yleensä voimme laskea Fourier-integraalimuunnoksesta vain numeerisia likiarvoja tietokoneella. (Myöhemmin kurssilla opettelemme myös Matlabin `fft`-komennon, mutta vielä toistaiseksi paiskitaan töitä karun askeettisesti... ;)

(a) Palauta lyhyt kirjallinen selitys siitä, mitä seuraava Matlab-ohjelma tekee — siis mitä kukin ohjelman rivi tekee, ja miten tämä liittyy Fourier-analyysin matematiikkaan (erityisesti, mitä vektorit `fs` ja sp edustavat?).

```
clear all;
a=0; b=1; n=100; h=(b-a)/n; t=a+h:h:b;
s0=sin(2*pi*t*5)';
s=s0+(rand(n,1)-.5)*2;
plot(t,s0,'-',t,s,'-');
nu=0:0.1:50;
matr=exp(-1i*2*pi*nu'*t)*h;
fs=matr*s;
sp=abs(fs.*fs);
figure; plot(nu,sp);
```

(b) Palauta yllä olevan Matlab-ohjelman tuottamat kuvat — lisää kuvateksteihin oma nimesi ja opiskelijanumerosi (Matlabin `title`-komennolla)!