

Fourier-analyysi, I/21, Laskuharjoitus 7.

Jos signaali $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on 1-jaksollinen eli $s(t+1) = s(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, merkitään silloin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Tällaisen 1-jaksollisen signaalin Fourier-muunnos on funktio $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, missä Fourier-kertoimet lasketaan kaavalla

$$\widehat{s}(\nu) := \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} e^{-i2\pi t \nu} s(t) dt = \int_0^1 e^{-i2\pi t \nu} s(t) dt.$$

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Kotitehtävä (3p.) palautetaan Mycoursesiin.

Harjoitustehtävä 7.1. Hetkellä $t \in \mathbb{R}$ olkoon

$$s(t) = 1 + \cos(4\pi t) + \sin(6\pi t).$$

Laske tämän 1-periodisen signaalin s Fourier-kertoimet eli Fourier-muunnos $r = \widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. [Vihje: Eulerin kaavat $\cos(\alpha) = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$, $\sin(\alpha) = \dots$]

Harjoitustehtävä 7.2. Laske signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-kerroinmuunnos $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, kun

$$s(t) = \cos(2\pi t)^2.$$

[Vihje: Eulerin kaava $\cos(\alpha) = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$.]

Harjoitustehtävä 7.3. Laske Fourier-kertoimet, kun $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $s(t) = t$ (missä $|t| < 1/2$).

Harjoitustehtävä 7.4. Olkoon $0 < r < 1$. Poisson-näyteen $\varphi_r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään kaavalla

$$\varphi_r(t) := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} r^{|\nu|} e^{i2\pi t \nu}.$$

Näytä laskemalla, että $\int_0^1 \varphi_r(t) dt = 1$ ja että $\varphi_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(2\pi t)}$. Laske myös Poisson-ytimen suurin ja pienin arvo.

Harjoitustehtävä 7.5. Olkoon $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ sileä. Perustele välivaiheet seuraavassa laskussa:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^1 s(u) \varphi_r(t-u) \, du \\
 &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^1 s(u) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} r^{|\nu|} e^{i2\pi(t-u)\cdot\nu} \, du \\
 &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) r^{|\nu|} e^{i2\pi t \cdot \nu} \\
 &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) e^{i2\pi t \cdot \nu}.
 \end{aligned}$$

Kotitehtävä 7.1. Laske Fourier-kertoimet, kun $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $s(t) = 3 - 7|t|$ (missä $|t| \leq \frac{1}{2}$).