Fourier-analyysi, I/21, Laskuharjoitus 8.

Jos signaali $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on 1-jaksollinen eli $s(t+1) = s(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, merkitään silloin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Tällaisen 1-jaksollisen signaalin Fourier-muunnos on funktio $\widehat{s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, missä Fourier-kertoimet lasketaan kaavalla

$$\widehat{s}(\nu) := \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}\, s(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}\, s(t)\,\mathrm{d}t.$$

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Matlab-tehtävä (3p.) palautetaan Mycourseesiin.

Harjoitustehtävä 8.1. Laske Fourier-kertoimet, kun $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $s(t) = t^2$ (missä $|t| \leq 1/2$).

Harjoitustehtävä 8.2. Miten derivaatan s' ja signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ Fourier-kertoimet liittyvät toisiinsa?

Harjoitustehtävä 8.3. Kurssilla käyttämämme "moderni" Fourier-sarja on muotoa

$$s(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}\,\widehat{s}(\nu).$$

Monissa lähteissä käytetään kömpelöä trigonometrista versiota

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(2\pi tk) + b_k \sin(2\pi tk)\right).$$

Etsi muunnoskaavat vakioiden a_k, b_k ja Fourier-kerrointen $\widehat{s}(\nu)$ välillä.

Harjoitustehtävä 8.4. Näytä, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Vihje: Tarkastele tapauksessa $s(t) = t$ (kun $|t| < 1/2$) Fourier-sarjaa

$$s * s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot n}\,\widehat{s * s}(n)$$

kohdassa $t = 0$. Laske siis $s * s(0)$ ja $\widehat{s * s}(n)$.
Tässä signaalien $q, r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ konvoluutio lasketaan

$$q * r(t) := \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} q(t-u)\,r(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 q(t-u)\,r(u)\,\mathrm{d}u.$$

Matlab-tehtävä 8.1. Tällä kertaa tarkastelussa on Gibbs-ilmiö (Gibbs phenomenon: tutustu esimerkiksi Wikipedian artikkeliin tai vastaavaan lähteeseen).

a.) Kokeile seuraavassa ohjelmassa muuttujan arvoja $\mathrm{p} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$:

```
clear all;
p=8; q=2^p;
n=2^10; h=1/n; t=h:h:1;
f=zeros(1,n);
for k=1:q,
  f=f+sin(2*pi*t*(2*k-1))/(2*k-1);
end;
plot(t,f);
```

b.) Kirjoita lyhyt kuvailu aiheesta ”Fourier-sarjan Gibbs-ilmiö”. Käytä esimerkkinä tämän tehtävän (a)-kohdan laskentaa eri arvoilla $q = 2^p$: montako prosenttia (a)-kohdassa on Gibbs-ylilyönti (engl. *overshoot*)? Ilmiön tarkkaa syytä ei tarvitse selittää, mutta kuvitus mukaan!

Huom: Tässä muodostetaan Fourier-sarjaa 1-jaksolliselle kanttiaallolle, jonka korkeus on pi/4 ja epäjatkuvuuskohta mm. pisteessä 1/2. Ylilyönti tarkoittaa tässä sitä, paljonko Fourier-approksimaatio poikkeaa enimmillään oikeista funktion arvoista epäjatkuvuuskohdan ympärillä.