

Fourier-analyysi, I/21, Laskuharjoitus 9.

Digitaalinen signaali $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ on N -periodinen, jos $s(t - N) = s(t)$ jokaisella $t \in \mathbb{Z}$: silloin merkitään $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, ja vastaava diskreetti Fourier-muunnos eli DFT (Discrete Fourier Transform) $\widehat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään kaavalla

$$\widehat{s}(\nu) := \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \nu / N} s(t).$$

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Kotitehtävä (3p.) palautetaan Mycoursesiin.

Harjoitustehtävä 9.1. Laske digitaalisen signaalin $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetin ajan Fourier-muunnos $\widehat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, kun

$$s(t) = 2^{-|t|}.$$

(Symmetrian vuoksi muunnos on tässä reaaliarvoinen, joten sievennä vastauksesi reaalisiksi!)

Harjoitustehtävä 9.2. Modulaarisen aritmetiikan alkeita — tässä mod 7 ja mod 24:

- Mikä viikonpäivä on 7654 vuorokauden kuluttua ensi sunnuntaista?
- Mikä kellonaika on 7654 tunnin kuluttua huomisesta keskipäivästä?

Harjoitustehtävä 9.3. Hahmottele kuva kompleksitason pisteistä $e^{i2\pi k/N}$, missä $k \in \mathbb{Z}$ ja

- $N = 3$,
- $N = 12$.

Laske $\sum_{k=1}^N e^{i2\pi k/N}$, kun $N \in \mathbb{Z}^+$ (tällä on jokin geometrinen merkitys...).

Harjoitustehtävä 9.4. Laske signaalin $s : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos, kun $s(t) = (-1)^t$.

Harjoitustehtävä 9.5. a) Miten $\widehat{r} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ liittyy signaaliin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, kun $r = \widehat{s}$?

b) Mikä on DFT:n käänteismuunnoksen kaava? Siis miten $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ saadaan laskettua, kun $\widehat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ tunnetaan?

Kotitehtävä 9.1. Laske 4-periodisen digitaalisen signaalin $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos $r = \widehat{s}$, kun

$$s(0) = 9, \quad s(1) = -6, \quad s(2) = 8 \quad \text{ja} \quad s(3) = -6.$$

Laske myös $\widehat{r} = \widehat{\widehat{s}}$. Sievennä tulokset reaalisiksi.