

## Fourier-analyysi, I/21, Laskuharjoitus 10.

Digitaalinen signaali  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  on  $N$ -periodinen, jos  $s(t - N) = s(t)$  jokaisella  $t \in \mathbb{Z}$ : silloin merkitään  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , ja vastaava diskreetti Fourier-muunnos eli DFT (Discrete Fourier Transform)  $\widehat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään kaavalla

$$\widehat{s}(\nu) := \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \nu / N} s(t).$$

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Matlab-tehtävä (3p.) palautetaan Mycourse-siin.

**Harjoitustehtävä 10.1.** Laske signaalin  $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  diskreetti Fourier-muunnos, kun  $s(t) = i^t$ .

**Harjoitustehtävä 10.2.** Määritellään  $e_\beta, \delta_b : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  kaavoilla

$$e_\beta(t) := e^{+i2\pi t \cdot \beta / N}, \quad \delta_b(t) := \begin{cases} 1, & \text{jos } (t - b)/N \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Laske  $\widehat{e}_\beta, \widehat{\delta}_b : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Harjoitustehtävä 10.3.** Oletetaan, että haluat laskea signaalin  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  diskreetin Fourier-muunnoksen  $\widehat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ; kuinka käytät tähän `fft`-komentoa?

Muistutus: Matlab-ohjelman `fft`-komento laskee vektorin  $y = \text{fft}(x)$  vektorista

$$x = [x(1) \ x(2) \ \dots \ x(N)]$$

siten, että

$$y(m) = \sum_{k=1}^N e^{-i2\pi(k-1)(m-1)/N} x(k) \quad (\text{jossa } m \in \{1, 2, \dots, N\}).$$

**Harjoitustehtävä 10.4.** Analogisen jaksottoman signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ja sen Fourier-integraali-muunnoksen  $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  energiat ovat tunnetusti samat. Sen sijaan digitaalisen jaksollisen signaalin  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  energia

$$\|s\|^2 := \sum_{t=1}^N |s(t)|^2$$

ei yleensä säily tavallisella kaavalla määritellyssä diskreetissä Fourier-muunnoksessa, vaan  $\|s\|^2 = c_N \|\widehat{s}\|^2$ . Etsi tämä vakio  $c_N$ .

(Huom. Jos olisi ehdottomasti haluttu energian säilyvyys, olisi DFT pitänyt määritellä sopivasti painotettuna.)

**Matlab-tehtävä 10.1.** Tällä kertaa tarkastelussa on spektrogrammi.

(a) Kokeile seuraavaa ohjelmaa:

```
clear all;
n=1000; t=(1:n)/n;
s=sin(2*pi./t);
for k=1:n,
    window=exp(-(t-k/n).^2*1000);
    specs(:,k)=abs(fft(s.*window)).^2;
end;
spec=specs(1:n/2,:);
image(spec); colormap(1-gray);
set(gca, 'YDir', 'normal');
```

(b) Palauta (a)-kohdassa tuotettu Matlab-kuva ja kirjoita lyhyt selostus ohjelman laskemasta Fourier-analyysistä ja siitä, mitä kuva esittää. Oletetaan tässä, että tarkoitus oli tutustua signaaliin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , jolle

$$s(t) = \begin{cases} \sin(2\pi/t), & \text{kun } t > 0, \\ 0, & \text{kun } t \leq 0. \end{cases}$$

Miksi Matlab-kuva ei ole luotettava ajanhetken  $t = 0$  lähistöllä?