ENY-C2001 Termodynamiikka ja lämmönsiirto, syksy 2015

JOHDATUSTA LÄMMÖNSIIRTO-OPPIIN
Markku J. Lampinen ja Voitto W. Kotiaho

Lämpö voi siirtyä kolmella eri tavalla: *Konduktiolla* eli johtumalla, *konvektiolla* ja *säteilynä*. Konduktio tapahtuu kiinteässä aineessa, konvektio *fluidissa* (liikkuvalle aineelle kuten nesteelle tai kaasulle käytetään yleisnimitystä fluidi) ja säteily puolestaan voi tapahtua myös tyhjiössä. Seuraavassa tarkastellaan kutakin lämmönsiirtymistyyppiä erikseen.

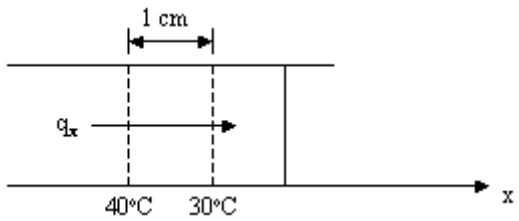
LÄMMÖN JOHTUMINEN

Poikkipinta-alayksikön läpi siirtyvää [W/m^2] lämpövirtaa aineessa kuvataan Fourierin lämmönjohtumisyhtälöllä, joka yksidimensioisessa tapauksessa on:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (1)$$

Kuvassa 1 on esimerkki 1-dimensioisesta konduktiosta. Aineen läpi menee x-suunnassa joka kohdassa yksi ja sama lämpövirta q_x joka on siis vakio. Samoin aineen lämmönjohtavuus λ, joka on aineominaisuus, on yleensä vakio. Täten lämpötilagradientti voidaan laskea seuraavasti:

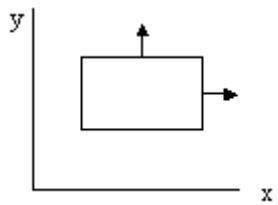
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{30^{o}\,C - 40^{o}\,C}{10^{-2}\,m} = -10^{3}\ {}^{o}C/m = -10^{3}\ K/m$$



Kuva 1. Yksidimensioinen konduktio.

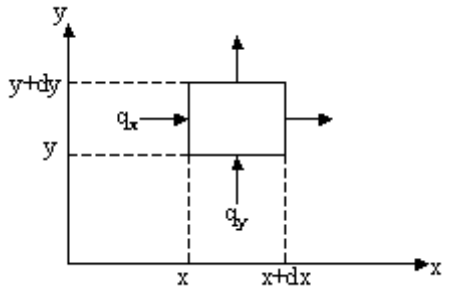
2 - dimensioisessa tapauksessa, kuva 2, voidaan kirjoittaa Fourierin yhtälöt erikseen x- ja y-suunnille seuraavasti jolloin lämpötila on x:n ja y:n funktio: T = T(x,y):

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$
$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \qquad (2)$$



Kuva 2. 2-dimensioinen konduktio.

Tarkastellaan 2-dimensioista konduktiota differentiaalisen alkion läpi, kuva 3.



Kuva 3. 2-dimensioinen konduktio differentiaalisen alkion läpi.

Alkiolle voidaan kirjoittaa seuraavat yhtälöt:

$$
\begin{aligned}
q_x\,(\text{kohdassa } x) &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \\
q_x\,(\text{kohdassa } x+dx) &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x} dx = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + (-\lambda)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \\
q_y\,(\text{kohdassa } y) &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \\
q_y\,(\text{kohdassa } y+dy) &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)}{\partial x} dx = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + (-\lambda)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy
\end{aligned}
\tag{3}
$$

missä yhtälöt kohdissa x+dx ja y+dy perustuvat Taylorin sarjakehitelmään. Kun kerrotaan kukin näistä poikkipinta-alalla, jonka läpi kyseinen lämpövirta siirtyy, saadaan:

$$
\begin{aligned}
\Phi_x\,(\text{kohdassa } x) &= \left[-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right]\cdot(dy\ L) \\
\Phi_x\,(\text{kohdassa } x+dx) &= \left[-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + (-\lambda)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx\right]\cdot(dy\ L) \\
\Phi_y\,(\text{kohdassa } y) &= \left[-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right]\cdot(dx\ L) \\
\Phi_y\,(\text{kohdassa } y+dy) &= \left[-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + (-\lambda)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy\right]\cdot(dx\ L)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Stationaarisessa tilanteessa se lämpövirta, joka menee alkioon sisään, täytyy tulla sitä myös ulos jolloin pätee energiatase

$$\left[\Phi_x(x) + \Phi_y(y)\right] - \left[\Phi_x(x+dx) + \Phi_y(y+dy)\right] = 0 \tag{5}$$

ja kun sijoitetaan tähän yhtälöt (4) saadaan:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\,. \tag{6}$$

Yleisemmässä tilanteessa osa lämmöstä varastoituu alkioon:

$$\left[\Phi_x(x)+\Phi_y(y)\right]-\left[\Phi_x(x+dx)+\Phi_y(y+dy)\right]=dx\,dy\,L\,\rho\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (7)$$

missä termi $dx\,dy\,L\,\rho\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}$ on massa × ominaislämpö × lämpötilan muutos/aikayksikkö.

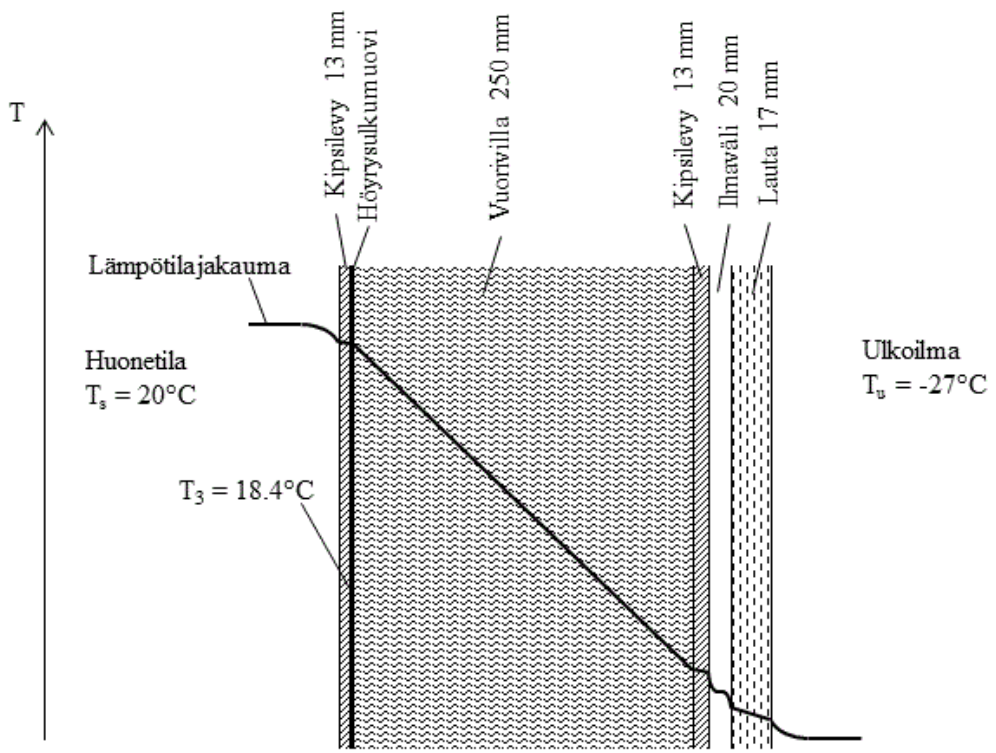
Yhtälöistä (4) ja (7) saadaan (vrt. kurssikirjan [2] kaava (231)):

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{\rho c_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (8)$$

Kurssikirjan [2] kaavassa (232) on otettu huomioon lisäksi konvektio, eli lämmön siirtyminen liikkuvassa aineessa eli fluidissa. Konvektioon palataan myöhemmin.

<u>Yksidimensioinen konduktio monikerroksisen seinän läpi</u>

Tarkastellaan kuvan 5 mukaista omakotitalon seinärakennetta.



Kuva 5. Omakotitalon seinärakenne ja sen lämpötilajakauma.

Materiaalien lämmönjohtavuudet ovat:

Kipsi: λ_{kip} = 0,26 W/mK

Vuorivilla: λ_{vuo} = 0,045 W/mK

Lauta (puu): λ_{puu} = 0,11 W/mK

Seinämän kullakin kerroksella on jokin lämpövastus. Sisä- ja ulkopinnalla, sekä ilmavälin pinnoilla on lisäksi kullakin pintavastus, jonka määräävät konvektio- ja säteilylämmönsiirto (näitä käsitellään myöhemmin). Eri kerrosten lämpövastukset ovat

- sisäseinän sisäpintavastus (konvektio + säteily): $r_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 0{,}15\,\frac{m^2K}{W}$ (9)

- kipsilevy 13 mm: $r_2 = \frac{s_2}{\lambda_{kip}} = \frac{0{,}013\,m}{0{,}26\,W/mK} = 0{,}05\,\frac{m^2K}{W}$ (10)

- höyrysulku (polyeteenikalvo): $r_3 \approx 0$ (kalvo on ohut joten sen lämpövastus on mitätön).

- vuorivilla 250 mm: $r_4 = \frac{s_4}{\lambda_{vuo}} = \frac{0{,}250\,m}{0{,}045\,W/mK} = 5{,}5\,\frac{m^2K}{W}$

- kipsilevy 13 mm: $r_5 = \frac{s_5}{\lambda_{kip}} = 0{,}05\,\frac{m^2K}{W}$

- ilmaväli (merkitään ilmavälin pintoja alaindekseillä a ja b):

  Konvektio $\frac{1}{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_a} + \frac{1}{\alpha_b}$, (11)

  säteily $\alpha_s = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\sigma(T_a + T_b)(T_a^2 + T_b^2)$ (kaavaa on perustelu sivulla 17),

  $r_6 = \frac{1}{\alpha_k + \alpha_s} = 0{,}05\frac{m^2K}{W}$

- lauta 17 mm: $r_7 = \frac{s_7}{\lambda_{puu}} = 0{,}15\,\frac{m^2K}{W}$

- ulkopinta (konvektio + säteily): $r_8 = \frac{1}{\alpha_8} = 0{,}05\,\frac{m^2K}{W}$

Kokonaislämpövastus $r = \sum_{i=1}^{8} r_i = 6{,}00\,\frac{m^2K}{W}$.

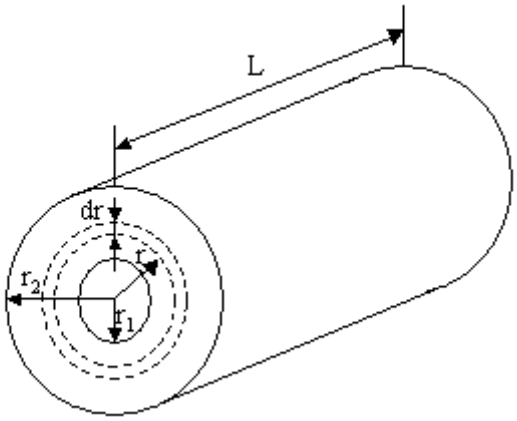
Talonrakennuksessa käytetään seinän kokonaislämpövastuksen käänteisluvulle nimitystä U-arvo (ennen vanhaan nimeltään k-arvo). Tässä siis U = k = 1/r = 0,167 W/m^{2}K.

Lämpöhäviö $q = \frac{T_s - T_u}{r} = \frac{20°C - (-27°C)}{6{,}00\ m^2K/W} = 7{,}8\ W/m^2$ (12)

Lämpötilat eri kohdissa saadaan lämpövastusten avulla. Esimerkkinä höyrysulun lämpötila:

$T_3 = T_s - (r_1 + r_2)\,q = 20 - (0{,}15 + 0{,}05) \cdot 7{,}8 = 18{,}4°C$.

Yksidimensioinen konduktio putken seinämän läpi



Kuva 6. Putken seinämä.

Fourierin lämmönjohtumisyhtälö (1), kirjoitettuna putken seinämästä erotetulle differentiaalisen paksulle alkiolle, (kuva 6) saa muodon:

$$q_r = \frac{\Phi}{A} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}. \qquad (13)$$

Pinta-ala A = 2 π r L, joten

$$\Phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} A = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r L.$$

Tästä saadaan

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda L} = \text{vakio},$$

joten päädytään differentiaaliyhtälöön

$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda L}\frac{dr}{r}. \qquad (14)$$

Kun (14) integroidaan puolittain, saadaan

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}, \qquad (15)$$

josta seuraa lopulta

$$\Phi = \frac{2\pi\lambda L}{\ln(r_2/r_1)}\left(T_1 - T_2\right). \qquad (16)$$

Tarkastellaan kuvan 7 lämpöeristettyä putkea, jonka pituus on L ja jonka sisällä virtaa vettä lämpötilassa T_v. Ulkoilman lämpötila on T_∞ ja putken seinämän läpi menee sisältä ulos lämpöteho Φ. Lämpöteholle voidaan yhtälöiden (16) ja (19) perusteella kirjoittaa yhtälöketju

$$\Phi = \alpha_s A_s (T_v - T_s) = \frac{2\pi\lambda_p L}{\ln(d_u/d_s)}(T_s - T_1) = \frac{2\pi\lambda_e L}{\ln(D_u/d_u)}(T_1 - T_u) = \alpha_u A_u (T_u - T_\infty),$$

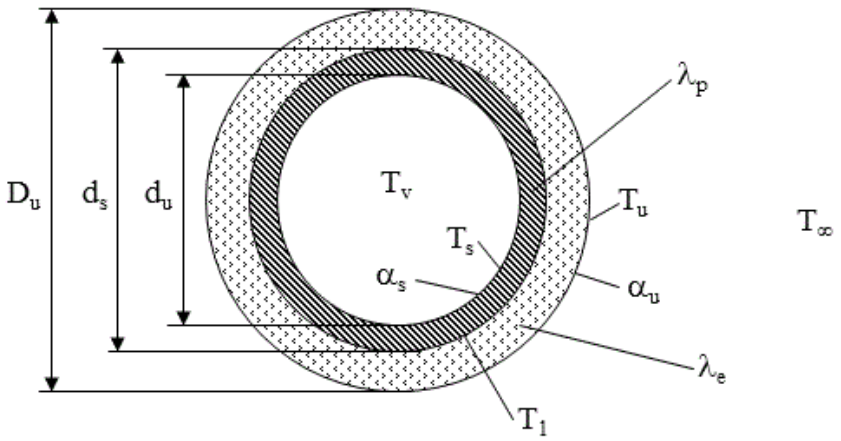
missä $A_s = \pi d_s L$ = putken sisäpinnan pinta-ala, $A_u = \pi D_u L$ = putken ulkopinnan pinta-ala, λ_p on (sisemmän) putken lämmönjohtavuus ja λ_e on lämpöeristeen (ulomman putken) lämmönjohtavuus, T_s ja T_u ovat sisä- ja ulkopinnan lämpötilat ja T_1 on lämpötila putken ja lämpöeristeen kosketuskohdassa.

Muutaman laskutoimituksen jälkeen, eliminoimalla yhtälöketjusta lämpötilat T_s, T_1 ja T_u, saadaan lämpövirralle

$$\Phi = k_p L (T_v - T_\infty), \tag{17}$$

missä k_p on putken lämmönläpäisykerroin pituusyksikköä kohden (W/mK).

$$\frac{1}{k_p} = \frac{1}{\pi d_s \alpha_s} + \frac{\ln(d_u/d_s)}{2\pi\lambda_p} + \frac{\ln(D_u/d_u)}{2\pi\lambda_e} + \frac{1}{\pi D_u \alpha_u}. \tag{18}$$



Kuva 7. Lämpöeristetty putki.

Kun putkea eristetään, niin on huomattava, että joissain tapauksissa saattaa liian ohut eristekerros huonontaa eristystä. Tämän asian voi todeta yhtälön (18) avulla: Kun yhtälöstä ratkaistaan k_p ja ajatellaan se ulkohalkaisijan D_u funktioksi siten että pidetään muut suureet vakioina, niin on helppo todeta derivoimalla että k_p:llä on maksimiarvo tietyllä D_u:n arvolla. Todellisuudessa α_u riippuu ulkopinnan lämpötilasta joka puolestaan riippuu eristekerroksen paksuudesta.

KONVEKTIIVINEN LÄMMÖNSIIRTO

Kun lämpö siirtyy johtumalla ja kuljettumalla liikkuvassa nesteessä tai kaasussa eli fluidissa, ja erityisesti fluidin ja sitä koskettava kiinteän pinnan välillä, puhutaan konvektiosta. Fysikaalisessa mielessä konvektiossa on yksinkertaisesti vain kyse siitä, että lämpö siirtyy ensinnäkin konduktiolla, ja toisekseen kuljettumalla koska fluidin mukana liikkuu siihen varastoitunutta lämpöä. Konvektion matemaattinen mallintaminen on kuitenkin käytännössä niin monimutkaista, että konvektio joudutaan laskennallisessa mielessä käsittelemään kokonaan omana lämmönsiirtymismuotonaan.

Konvektioteorian varsinaisena ongelmana on aina lämmönsiirtokertoimen α määrittäminen. Lämmönsiirtokerroin α määritellään yhtälöllä

$$q = \alpha(T_{pinta} - T_{fluid}), \qquad (19)$$

missä q on lämmönsiirto fluidin ja kiinteän pinnan välillä [W/m^2] ja T_{fluid} on fluidin lämpötila kaukana pinnasta.

Lämmönsiirtokertoimelle on kehitetty useimpia teknisiä tapauksia varten laskentakaavoja. Nämä laskentakaavat, eli ns. *korrelaatiokaavat*, on yleensä saatu osittain teoreettisesti ja osittain kokeellisesti. Erityisesti dimensioanalyysiä on käytetty tässä asiassa hyväksi.

Lämmönsiirtokerroin ja dimensioanalyysi

Suureiden, joihin dimensioanalyysiä voidaan soveltaa, on oltava sellaisia että kahden suureen suhde on riippumaton käytetystä dimensiojärjestelmästä. Esimerkiksi jos jonkin nesteen viskositeetti on kaksi kertaa niin suuri kuin jonkin toisen nesteen, niin tulee tämä verranto olla sama sekä suomalaisilla viskositeetin mittayksiköillä että englantilaisilla viskositeetin mittayksiköillä.

Tarkastellaan seuraavassa dimensioanalyysin käyttöä konvektioteoriassa. Olkoon tarkasteltavana tapaus, jossa fluidi virtaa putkessa jonka halkaisija on d ja tapahtuu lämmönsiirtoa joko fluidista putken pintaan tai päinvastoin, eli ns. pakotettu konvektio putkessa.

Ensimmäiseksi voidaan erittäin hyvällä syyllä olettaa, että α on paitsi halkaisijan d, myös fluidin aineominaisuuksien funktio, eli

$$\alpha = g(\lambda, d, \eta, \rho, v, c_p), \qquad (20)$$

missä λ = lämmönjohtavuus, η = viskositeetti, ρ = tiheys, v = virtausnopeus ja c_p = ominaislämpökapasiteetti. Tämä saadaan muotoon $\alpha - g(\lambda, d, \eta, \rho, v, c_p) = 0$, josta

$$f(\alpha, \lambda, d, \eta, \rho, v, c_p) = 0. \qquad (21)$$

Buckinghamin pii-teoreema sanoo että jos on olemassa fysikaalista asiaa kuvaava funktio muotoa

$$f(a_1, a_2, \ldots a_n) = 0, \qquad (22)$$

missä termit $a_1, a_2, \ldots a_n$ ovat n fysikaalista suuretta joissa on yhteensä m kpl perusdimensioita, niin nämä suureet voidaan, mitään informaatiota menettämättä, järjestellä uudeksi funktioksi

$$F(\pi_1, \ldots \pi_{n-m}) = 0, \qquad (23)$$

missä termit $\pi_1, \ldots \pi_{n-m}$ ovat dimensiottomia suureita jotka on muodostettu suureiden $a_1, a_2, \ldots a_n$ potenssien tuloina:

$$\pi_i = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}, \qquad (24)$$

missä eksponentit p_i ovat rationaalilukuja (voi olla myös $p_i = 0$ jolloin $a_i^{p_i} = 1$).
Funktiossa (22) on suureiden lukumäärä n = 7 ja siinä olevien suureiden dimensiot ovat:

$$[\alpha] = \frac{W}{m^2 K} \quad \text{(nähdään yhtälöstä } q = \alpha(T_{pinta} - T_{fluid}))$$

$$= \frac{J/s}{m^2 K} = \frac{N\,m/s}{m^2 K} = \frac{kg\,m\,s^{-2} m\,s^{-1}}{m^2 K} = kg\,s^{-3} K^{-1}$$

$$[\lambda] = \frac{W}{m\,K} = \frac{J}{s\,m\,K} = \frac{N\,m}{s\,m\,K} = kg\,\frac{m}{s^2}\,\frac{m}{s\,m\,K} = kg^1 m^1 s^{-3} K^{-1}$$

$$[d] = m^1$$
$$[\eta] = kg\,m^{-1}\,s^{-1}$$
$$[\rho] = kg\,m^{-3}$$
$$[v] = m^1\,s^{-1}$$
$$[c_p] = J\,kg^{-1}K^{-1} = Nm\,kg^{-1}K^{-1} = kg\,m\,s^{-2}\,m\,kg^{-1}K^{-1} = m^2\,s^{-2}\,K^{-1}$$

Suureissa olevat perusdimensiot ovat: massa (kg), aika (s), matka (m) ja lämpötila (K) eli m = 4. Nyt on siis n-m = 7 - 4 = 3 ja täten $F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$ eli on muodostettava 3 pii-ryhmää. Ryhmät voidaan muodostaa useilla eri tavoilla mutta kannattavinta on muodostaa ne niin, että funktio F kuvaa fysikaalista ilmiötä mahdollisimman selkeästi. Kokemus on osoittanut, että tässä tapauksessa ryhmät kannattaa muodostaa siten, että α, v ja c_p esiintyvät kukin vain yhdessä ryhmässä ja λ, d, η ja ρ kaikissa ryhmissä (jollei suureen eksponentiksi tule 0). Esiintyköön α ryhmässä π_1, jolloin

$$\pi_1 = \lambda^{p_1} d^{p_2} \eta^{p_3} \rho^{p_4} \alpha\,. \tag{25}$$

Jotta π_1 olisi dimensioton, pitää perusdimensioiden supistua pois eli pitää olla

$$(kg^1 m^1 s^{-3} K^{-1})^{p_1} (m^1)^{p_2} (kg^1 m^{-1} s^{-1})^{p_3} (kg^1 m^{-3})^{p_4} (kg^1 s^{-3} K^{-1}) = 1,$$

jolloin eksponenteille saadaan yhtälöryhmä, josta ne voidaan ratkaista:

$$\left.\begin{array}{ll} kg: & p_1 + p_3 + p_4 + 1 = 0 \\ m: & p_1 + p_2 - p_3 - 3p_4 = 0 \\ s: & -3p_1 - p_3 - 3 = 0 \\ K: & -p_1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_1 = -1 \\ p_2 = 1 \\ p_3 = 0 \\ p_4 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \lambda^{-1} d^1 \alpha = \frac{\alpha\,d}{\lambda}$$

Luku π_2 muodostetaan vastaavalla menettelyllä siten, että siinä on v ja luku π_3 siten että siinä on c_p.

Putkivirtaukselle saatavat dimensiottomat luvut ovat seuraavanlaiset ja ne on nimetty seuraavasti:

$$\pi_1 = Nu \equiv \frac{\alpha\,d}{\lambda} = \text{Nusseltin luku} \tag{26}$$

$$\pi_2 = Re \equiv \frac{v\,d\,\rho}{\eta} = \text{Reynoldsin luku ("dimensioton virtausnopeus")} \tag{27}$$

$$\pi_3 = \mathrm{Pr} \equiv \frac{\eta\, c_p}{\lambda} = \text{Prandtlin luku} \qquad (28)$$

Kun kyseessä on putkivirtaus, on Reynoldsin luvussa ja Nusseltin luvussa ns. *karakteristisena mittana* putken halkaisija. On syytä huomata että Prandtlin luku on pelkkä aineominaisuus, kun taas Nu ja Re riippuvat myös geometrisista ominaisuuksista (d ja v).

$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$ saa täten muodon

$$\mathrm{Nu} = g(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}). \qquad (29)$$

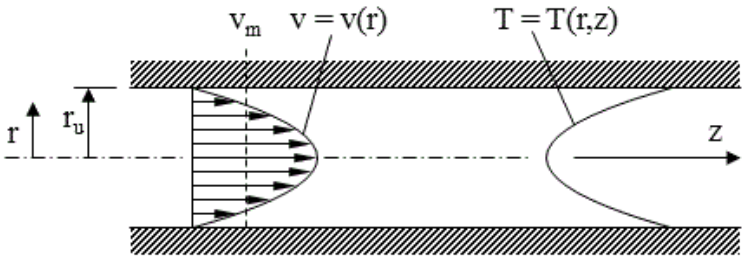
Alunperin 7 muuttujan ongelma (20) on täten saatu muutettua kolmen muuttujan ongelmaksi (29). Kun kaavalle (29) määritetään approksimatiivinen analyyttinen muoto eli korrelaatiokaava, tarvitaan sekä teoriaa että mittaussarjoja. Tarvittavien mittaussarjojen määrä on suuri mutta kuitenkin suunnattomasti pienempi kuin se olisi ollut seitsemän muuttujan ongelmassa. Jäljempänä esitetään joitakin korrelaatiokaavoja.

Laminaarinen ja turbulenttinen virtaus

Yksi konvektioon liittyvä oleellinen asia on, että onko virtaus *laminaarinen* vai *turbulenttinen*. Laminaarisessa virtauksessa virtaviivat ovat suoria ja se esiintyy pienillä nopeuksilla (pienillä Reynoldsin luvun arvoilla). Laminaarista virtausta voisi kuvailla "siistiksi".Turbulenttisessa virtauksessa puolestaan virtaviivat ovat pyörteisiä ja muodoltaan epämääräisiä mutta niillä on kuitenkin tietty keskimääräinen nopeussuunta. Turbulenttinen virtaus esiintyy suurilla nopeuksilla (suurilla Reynoldsin luvun arvoilla). Laminaarisessa virtauksessa konvektio noudattaa aina jotain aivan muuta korrelaatiota kuin turbulenttisessa.

Tietyssä virtausgeometriassa muuttuu virtaus laminaarisesta turbulenttiseksi aina tietyllä Reynoldsin luvun arvolla. Putkivirtauksessa, kuvat 8 ja 9, on kokeellisesti todettu, että jos $\mathrm{Re} \leq 2300$, on virtaus laminaarinen ja kun $\mathrm{Re} > 4000$, on virtaus turbulenttinen. Kun $2300 < \mathrm{Re} \leq 4000$, on kyseessä ns. siirtymävyöhyke, jossa virtaus voi olla joko laminaarinen tai turbulenttinen. Siirtymävyöhykkeen ylärajalle ei voida esittää tarkkaa yleistä arvoa. Siirtymävyöhykkeellä oleva virtaus käyttäytyy usein siten, että se on hetkittäin laminaarinen ja hetkittäin turbulenttinen.

Putkivirtaus



Kuva 8. Nopeus- ja lämpötilajakaumat laminaarisessa putkivirtauksessa. Lämpötilajakauma koskee tapausta, jossa lämpöä siirtyy putken seinämästä virtaavaan aineeseen.

Laminaariselle putkivirtaukselle, kuva 8, voidaan johtaa analyyttisesti että

$$\begin{cases} \mathrm{Nu} = 48/11, \text{ kun lämpövirta pinnan läpi on vakio} \\ \mathrm{Nu} = 3.66, \text{ kun pinnan lämpötila on vakio} \end{cases} \qquad (30)$$

Laminaarisen putkivirtauksen nopeusprofiilille voidaan johtaa kaava

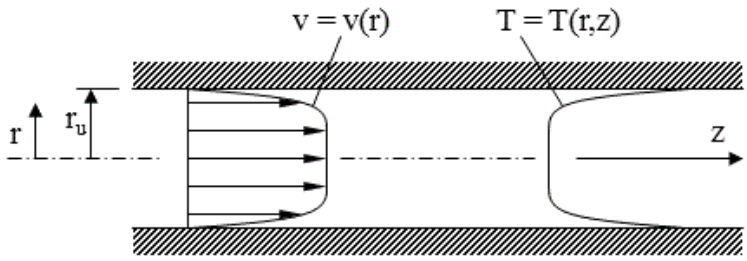
$$v = 2\, v_m \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right], \tag{31}$$

ja lämpötilaprofiili T = T(r,z) on neljännen asteen polynomi.

Turbulenttisen putkivirtauksen nopeusprofiili on tulppamainen, kuva 9, ja sille on määritetty, tekemällä mittaussarjoja yhtälölle (29), Hausenin korrelaatio:

$$Nu = 0.037\left(Re^{0.75} - 180\right)Pr^{0.42}. \tag{32}$$

Turbulenttiselle putkivirtaukselle on kehitetty myös muita vaihtoehtoisia korrelaatiokaavoja.



Kuva 9. Turbulenttinen putkivirtaus. Lämpötilajakauma koskee tapausta, jossa lämpöä siirtyy putken seinämästä virtaavaan aineeseen.

Mainittakoon lyhyesti tässä yhteydessä, että painehäviö Δp putken virtaussuunnassa lasketaan kaavalla

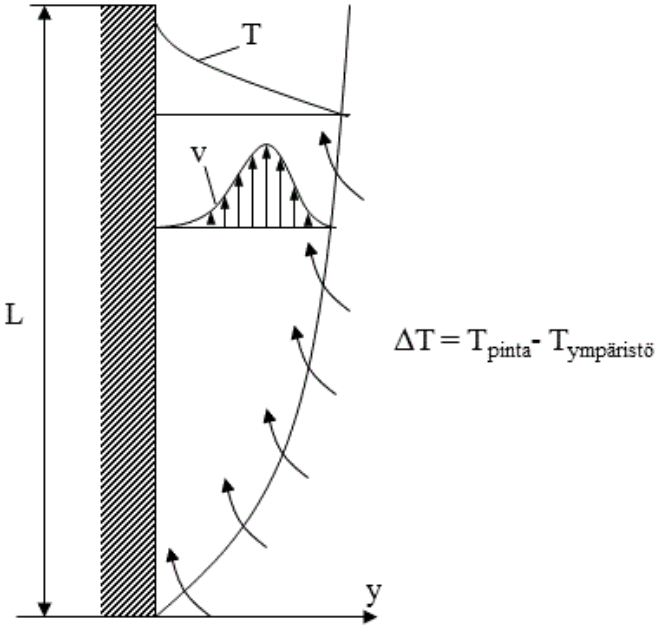
$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} \frac{1}{2} \rho\, v_m^2, \tag{33}$$

missä λ on *vastuskerroin* (huomaa, että samaa symbolia käytetään tässä myös lämmönjohtavuudelle, joka on aivan eri asia).

Vastuskertoimelle λ pätee laminaarisessa virtauksessa λ = 64/Re ja turbulenttisessa vastuskertoimen voi määrittää Moodyn diagrammista, joka löytyy taulukkokirjasta [1] (taulukko 34). Taulukkokirjassa [1] on myös esimerkki painehäviön laskemisesta kanavassa.

Vapaa konvektio

Kun aluksi paikallaan olevaa ilmaa lämmitetään tai jäähdytetään, syntyy ilmaan tiheyseroja, jotka puolestaan aiheuttavat nosteen joka edelleen aiheuttaa virtauksen, jossa lämmin ilma pyrkii kevyempänä kylmemmän ilman yläpuolelle. Tällöin puhutaan vapaasta eli luonnollisesta konvektiosta. Esimerkiksi kuvan 10 pystysuorassa seinässä on seinän pinta lämpimämpi kuin ympäröivä ilma jolloin lämpö siirtyy pinnasta ilmaan mutta samalla siis tiheyserot aikaansaavat ilman virtauksen ylöspäin.



Kuva 10. Vapaa konvektio pystysuorassa seinässä.

Vapaassa konvektiossa pätee

$$Nu = f(Gr, Pr), \tag{34}$$

missä

$$Gr \equiv \frac{\beta g \rho^2 L^3 (T_s - T_\infty)}{\eta^2} = \text{Grashofin luku}, \tag{35}$$

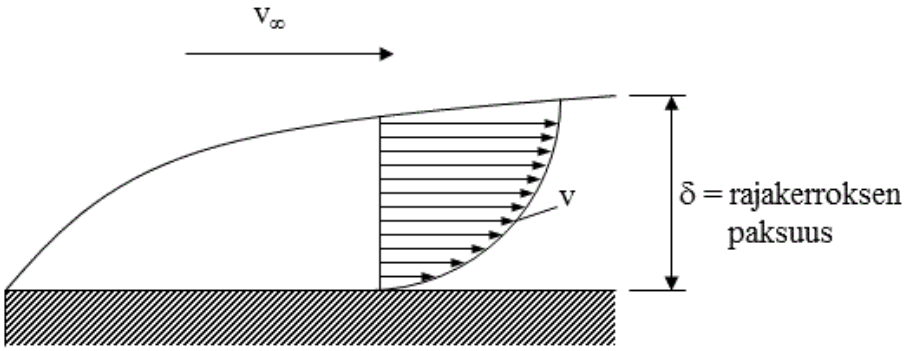
missä β = lämpölaajenemiskerroin, $g = 9{,}81\ m/s^2$, L = seinämän korkeus, T_s = seinämän lämpötila ja T_∞ = ympäröivän ilman lämpötila. Kun kyseessä on ilma, pätee likimain $\beta = 1/T$, missä $T = (T_s + T_\infty) / 2$. Yhtälössä (33) on Nusseltin luvussa karakteristisena mittana seinämän korkeus L.

Vapaa konvektio kuvan 10 pystysuorasta seinästä on laminaarista, kun $Gr\ Pr = 10^4 ... 10^9$ ja turbulenttista kun $Gr\ Pr > 10^9$, ja siinä pätevät korrelaatiokaavat

$$\begin{cases} Nu = 0.59(Gr \cdot Pr)^{1/4}, \text{ kun } Gr \cdot Pr = 10^4 ... 10^9 \\ Nu = 0.10(Gr \cdot Pr)^{1/3}, \text{ kun } Gr \cdot Pr > 10^9 \end{cases} \tag{36}$$

Pakotettu konvektio

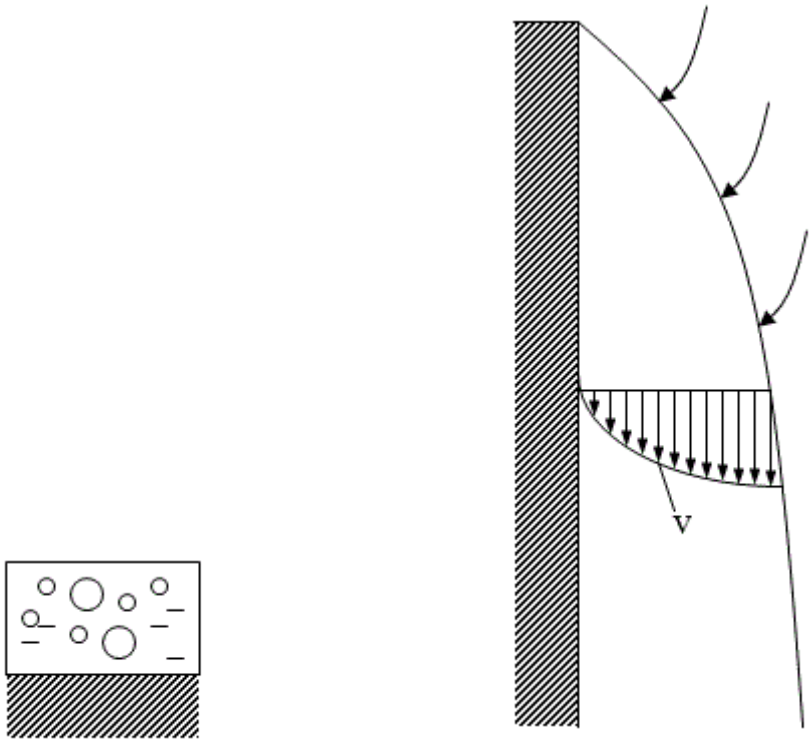
Pakotetussa konvektiossa, kuva 11, virtauksen aikaansaa jokin ulkoinen tekijä kuten puhallin, ja sille korrelaatiokaavat ovat muotoa Nu = f (Re, Pr). Edellä käsitelty putkivirtaus on yksi pakotetun konvektion muoto.



Kuva 11. Pakotettu konvektio.

Kiehuminen ja lauhtuminen

Tärkeitä konvektiotapauksia ovat myös faasimuutokset, kuten kiehuminen ja lauhtuminen. Kiehumisessakin käytetään kaavaa (19), jossa T_{fluid} on nyt nesteen kiehumislämpötila ja lauhtumisessa vastaavasti $q = \alpha(T_{fluid} - T_{pinta})$, missä T_{fluid} on lauhtumislämpötila. Kiehumisen ja lauhtumisen korrelaatiokaavat, joista α saadaan ratkaistua, ovat monimutkaisia, mutta niistä ei tässä yhteydessä tämän enempää (kuva 12).



Kiehuminen Lauhtuminen

Kuva 12. Veden kiehuminen ja höyryn lauhtuminen.

Konvektiivisen lämmönsiirtokertoimen laskemisesta

Konvektiivisen lämmönsiirtokertoimen lukuarvo on aina karkea approksimaatio koska laskutapaan jolla se on saatu, sisältyy aina hyvin paljon karkeita idealisointeja. Konvektiivisen lämmönsiirtotapauksen ratkaiseminen käytännön insinöörityössä tapahtuu yleensä siten että alan kirjallisuudesta haetaan korrelaatiokaava kyseiselle tapaukselle. Toisinaan yhdelle ja samalle tapaukselle löytyy useita erilaisia korrelaatiokaavoja, jotka antavat jonkin verran toisistaan poikkeavia, mutta kuitenkin samaa suuruusluokkaa olevia tuloksia. Kun korrelaatiokaava löytyy kirjallisuudesta, on tärkeää katsoa, mikä on kyseisessä korrelaatiossa valittu dimensiottomien lukujen karakteristiseksi mitaksi.

Esimerkki 1

Lasketaan Hausenin korrelaatiokaavan (32) avulla sisäpuolinen lämmönsiirtokerroin ∅15/∅13 - kokoisessa kupariputkessa, kun putkessa virtaa nopeudella v = 1.2 m/s a) 10°C vesi b) 10°C vesi-glykoliseos(30%).

a) 10°C veden aineominaisuudet taulukkokirjasta [1] s. 14: $\rho = 999.7$ kg/m^3,

$\eta = 1.308 \cdot 10^{-3}$kg/ms, $\lambda = 0.5767$ W/mK, $c_p = 4191$ J/kgK. Kinemaattinen viskositeetti

$\nu = \eta/\rho = 1.308 \cdot 10^{-6}$ m^2/s.

Prandtlin luku: $\mathrm{Pr} = \dfrac{\eta\, c_p}{\lambda} = \dfrac{1.308 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/ms} \cdot 4191\,\mathrm{J/kgK}}{0.5767\ \mathrm{W/mK}} = 9.506$.

Reynoldsin luku: $\mathrm{Re} = \dfrac{v\,d}{\nu} = \dfrac{1.2\,\mathrm{m/s} \cdot 0.013\,\mathrm{m}}{1.308 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} = 11927$. Koska nyt Re > 4000, on virtaus

turbulenttinen ja Hausenin korrelaatiokaavaa voidaan käyttää:

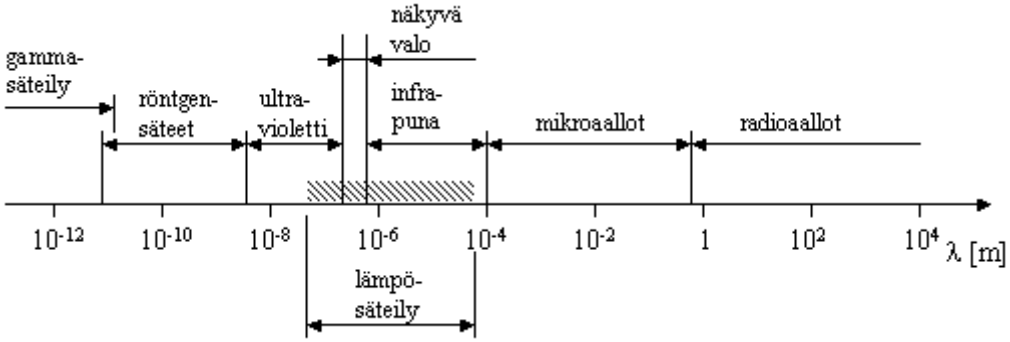
$$\mathrm{Nu} = 0.037\left(\mathrm{Re}^{0.75} - 180\right)\mathrm{Pr}^{0.42} = 0.037\left(11927^{0.75} - 180\right) \cdot 9.506^{0.42} = 91.58.$$

$\alpha = \dfrac{\lambda}{d}\mathrm{Nu} = \dfrac{0.5767\ \mathrm{W/mK}}{0.013\,\mathrm{m}} 91.58 = 4063\ \mathrm{W/m^2K}$. Huomaa että 4063 W/m^{2}K on pelkkä likiarvo!

b) 30% vesi-glykoliseoksen (glykolia 30%) aineominaisuudet: $\nu = 4.0 \cdot 10^{-6}$ m^2/s, $\lambda = 0.465$ W/mK, $c_p = 3650$ J/kgK, $\rho = 1040$ kg/m^3. Vastaavasti kuin edellä saadaan Pr = 32.8 ja Re = 4390. Hausenin korrelaatiokaavasta saadaan Nu = 57.6 josta $\alpha = 2060$ W/m^{2}K. Lämmönsiirtokerroin on pienentynyt puoleen edellisestä!

SÄTEILYLÄMMÖNSIIRTO

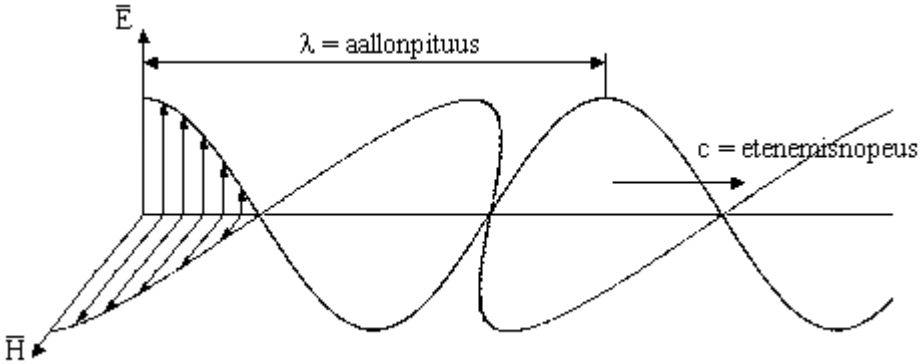
Lämpösäteilyksi kutsutaan sellaista sähkömagneettista säteilyä, jonka on aiheuttanut kappaleen lämpötila. Jokainen pinta lähettää lämpötilansa mukaista lämpösäteilyä - sitä lyhytaaltoisempaa mitä kuumempi on pinnan lämpötila. Kuva 13 esittää lämpösäteilyn paikkaa sähkömagneettisen säteilyn spektrissä:



Kuva 13. Sähkömagneettisen säteilyn spektri ja lämpösäteilyn paikka siinä. Sähkömagneettista säteilyä on jaettu eri alalajeihin paitsi aallonpituuden, myös säteilyn syntytavan ja historiallisten seikkojen perusteella. Eri lähteistä löytyy aallonpituusalueille hieman erilaisia arvoja.

Kun lämpö siirtyy konduktiolla tai konvektiolla, pitää olla aina väliaine, mutta lämpösäteily sen sijaan voi siirtyä myös tyhjiössä ja tyhjiössä se itse asiassa siirtyykin parhaiten.

Kuva 14 esittää sähkömagneettista säteilyä kuvattuna sähkökentän E ja magneettikentän H aaltoliikkeenä:



Kuva 14. Sähkömagneettinen säteily kuvattuna sähkökentän $\overline{E}$ [V/m] ja magneettikentän $\overline{H}$ [A/m] aaltoliikkeenä. Aaltoliikkeen etenemisnopeudelle c [m/s] pätee $c = f \cdot \lambda$, missä f = taajuus [1/s] ja λ = aallonpituus [m].

Sähkökenttävektorin ja magneettikenttävektorin ristituloa kutsutaan nimellä Poytingin vektori, $\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H}$, jonka itseisarvo kuvaa säteilyn energiavirtaa [W/m^2]:

$$u \cdot c = \left|\overline{E} \times \overline{H}\right| = \text{säteilyn energiavirta [W/m}^2\text{]}, \qquad (37)$$

missä u = sisäenergia/tilavuus. Säteilyn teoreettinen tarkastelussa voidaan käyttää ns. Gibbsin yhtälöä:

$$dS = \frac{dU + p\,dV}{T}, \qquad (38)$$

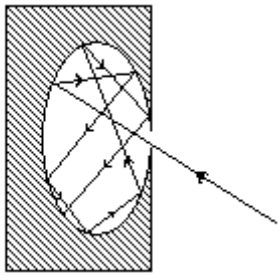
missä S = entropia ja U = uV = sisäenergia. Gibbsin yhtälö seuraa termodynamiikan I ja II pääsäänöistä.

Säteilyn paineelle, joka on konkreettinen mitattavissa oleva suure, pätee

$$p = u/3. \tag{39}$$

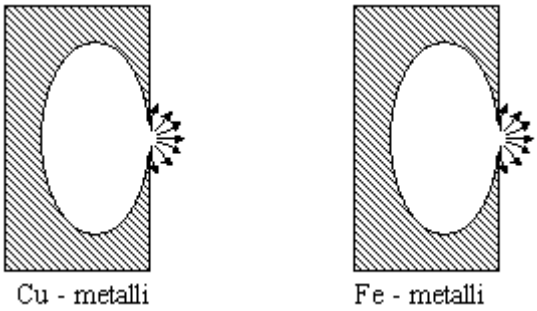
Mustan kappaleen säteily

Mustalla kappaleella tarkoitetaan ideaalista kappaletta, joka *absorpoi* (ottaa sisäänsä) kaiken siihen osuvan säteilyn. Käytännössä tällainen mustan kappaleen säteilijä voidaan järjestää tekemällä ontelo, jossa on pieni reikä. Lähes kaikki reiästä sisään mennyt säteily jää poukkoilemaan ontelon sisään, kuva 15.



Kuva 15. Ontelo toimii ns. mustana kappaleena.

Toisaalta ontelosta *emittoituva* (ulostuleva) säteily on samanlaista ontelon materiaalista riippumatta, kun lämpötila on sama (ns. mustan säteilyn periaate), kuva 16.



Kuva 16. Mustan kappaleen periaate.

Mustan kappaleen säteilyssä jokaista lämpötilaa T vastaa λ_{max} siten että

$$\lambda_{max}T = \text{vakio} = 2897.8\ \mu\text{mK}, \tag{40}$$

ja tämä tunnetaan nimellä Wienin siirtymälaki.

Lähtien kaavoista (38) ja (39) on johdettu että mustan kappaleen säteilyn energiavirta on verrannollinen lämpötilan neljänteen potenssiin seuraavasti (Stefanin-Boltzmannin laki)

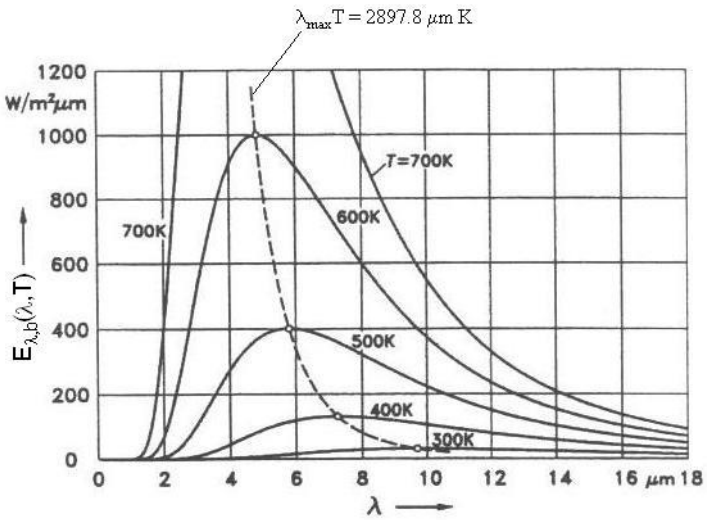
$$q = \sigma T^4, \tag{41}$$

missä σ = Boltzmannin vakio = $5.67 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4.

Hieman myöhemmin Planck on johtanut mustan kappaleen säteilylle toisen kuvaamistavan:

$$\text{Energiavirta/aallonpituus} = E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5\left[\exp\left(c_2/\lambda T\right) - 1\right]}, \tag{42}$$

missä $c_1 = 3.74 \cdot 10^{-16}$ Wm^2 ja $c_2 = 14387$ μmK. $E_{\lambda,b}(\lambda,T)$:n yksikkö on $\frac{W/m^2}{\mu m}$ eli energiavirta on jokaista μm mittaista aallonpituuskaistaa kohti. Kaavalla (42) saatava jakauma on esitetty eri lämpötiloilla kuvassa 17:



Kuva 17. Pinnasta puoliavaruuteen lähtevän mustan kappaleen spektrinen emissiosäteily μm aallonpituuskaistaa kohti.

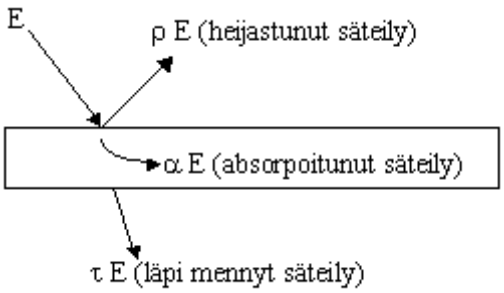
Harmaa pinta

Käytännössä pinnat ovat ns. *harmaita pintoja* jotka emittoivat säteilyä vähemmän kuin vastaavassa lämpötilassa oleva musta kappale. Tällöinkin käytetään vertailukohtana mustan kappaleen säteilyä käyttämällä emissiokerrointa ε jolloin kaava (41) modifioituu muotoon

$$q = \varepsilon \sigma T^4. \qquad (43)$$

Emissiviteetti on kyseiselle pinnalle ominainen dimensioton kerroin jonka arvo on aina välillä 0...1.

Kun sähkömagneettinen säteily E [W] kohtaa kappaleen niin osa säteilystä absorpoituu, osa heijastuu ja osa läpäisee kappaleen, kuva 18:



Kuva 18. Säteilymerkintöjä.

Kuvan 18 kappaleen energiatase on

$$E = \rho E + \alpha E + \tau E, \qquad (44)$$

josta seuraa että

$$\rho + \alpha + \tau = 1, \qquad (45)$$

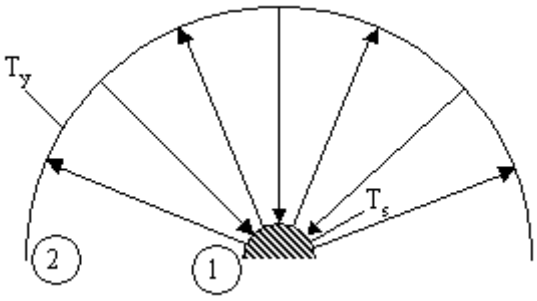
missä ρ = heijastuskerroin, α = absorptiokerroin ja τ = läpäisykerroin. Nämä ovat kaikki dimensiottomia ja niiden arvo on aina välillä 0...1.

Säteilylämmönsiirron laskemisesta

Säteilylämmönsiirron laskenta on melko monimutkaista mm. siksi että kun pinta a säteilee pintaa b, tulee pinnasta b vastasäteilyä takaisin pintaan a. Nettosäteily pinnasta suureen ympäristöön, kuva 19, voidaan esittää kaavalla (kurssikirjan [2] kaava (57)):

$$q_s = \varepsilon\sigma\left(T_s^4 - T_y^4\right), \qquad (46)$$

missä ε = pinnan emissiokerroin, T_s = pinnan lämpötila ja T_y = ympäristön lämpötila. Kaava (46) pätee likimain myös kahden pinnan välillä, kun pinta 2 on paljon suurempi kuin pinta 1.



Kuva 19. Pinnan 1 ja ympäristön 2 välinen nettosäteily.

Yleisesti nettosäteilyteholle kahden pinnan välillä, kun säteily tapahtuu vain ja ainoastaan näiden kahden pinnan välillä, pätee

$$\Phi_{1-2} = \frac{\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}\sigma T_s^4 - \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2}\sigma T_y^4}{\frac{1}{A_1\frac{\alpha_1}{\rho_1}} + \frac{1}{F_{12}A_1} + \frac{1}{A_2\frac{\alpha_2}{\rho_2}}}, \qquad (47)$$

missä F_{12} on pintojen 1 ja 2 välinen *näkyvyyskerroin*.

Sivulla 4 esiintyi kaava seinän ilmavälin säteilylämmönsiirtokertoimelle α_s. Säteilylämpöteholle ilmavälin läpi (W/m^2) pätee: $q = \frac{\Phi_s}{A} = \frac{\sigma(T_a^4 - T_b^4)}{1/\varepsilon_a + 1/\varepsilon_b - 1} = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\sigma(T_a^4 - T_b^4)$, missä viimeinen muoto saadaan, kun $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon$. Kun säteilylämpöteho q esitetään muodollisen säteilylämmönsiirtokertoimen α_s avulla: $q = \alpha_s(T_a - T_b)$, seuraa $\alpha_s = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\sigma(T_a + T_b)(T_a^2 + T_b^2)$.

Esimerkki 2

Kun vaakasuorasta kuumasta pinnasta siirtyy lämpöä vapaalla konvektiolla sen yläpuolella olevaan ilmaan, pätee konvektiolle korrelaatio [3]

$$Nu = 0{,}54(Gr \cdot Pr)^{1/4}, \text{ jonka pätevyysalue on } Gr{\cdot}Pr = 10^4...10^7, \qquad (48)$$

missä Nusseltin luvun ja Grashofin luvun karakteristisena mittana L on

$$L = A / P, \qquad (49)$$

missä A = pinnan pinta-ala ja P = pinnan piiri.

Huomaa, että tämä korrelaatio pätee vain tälle nimenomaiselle tapaukselle ja jossain toisessa korrelaatiossa voi karakteristinen mitta olla määritelty eri tavalla kuin tässä korrelaatiossa (Esim. sivulla 11 olevassa pystysuoran seinän korrelaatiossa on karakteristisena mittana seinän korkeus)!

Lasketaan tämän avulla kokonaislämmönsiirto (konvektio + säteily) 100°C lämpötilassa olevasta sähköhellan keittolevystä, halkaisija 20 cm, huoneeseen jonka lämpötila on 20°C (kun levy on paljaana).

Konvektio:

Karakteristinen mitta: $L = \frac{A}{P} = \frac{\pi d^2/4}{\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{4} = 0{,}05\,\mathrm{m}.$

Ilman aineominaisuudet keskimääräisessä lämpötilassa $T = \frac{20^\circ\mathrm{C} + 100^\circ\mathrm{C}}{2} = 60^\circ\mathrm{C}$

taulukkokirjan [1] taulukosta 37: $\rho = 1{,}045\ \mathrm{kg/m^3}$; $\eta = 19{,}99\cdot10^{-6}$ kg/sm; $\lambda = 28{,}48\cdot10^{-3}$W/mK; Pr = 0,707. Lämpölaajenemiskerroin = $\beta = 1/T = 1/(60 + 273.15)\mathrm{K} = 0{,}00300\ \mathrm{K^{-1}}$.

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 (T_s - T_i)}{\eta^2} = \frac{0{,}00300\ \mathrm{K^{-1}}\, 9{,}81\mathrm{m/s^2}\,(1{,}045\mathrm{kg/m^3})^2\,(0{,}05\mathrm{m})^3\,(100-20)\mathrm{K}}{(19{,}99\cdot10^{-6}\,\mathrm{kg/sm})^2} = 804261.$$

$Gr\cdot Pr = 804261\cdot 0{,}707 = 568613 \approx 5{,}7\cdot10^5 \Rightarrow$ ollaan korrelaatiokaavan (48) pätevyysalueella: $Nu = 0{,}54(Gr\cdot Pr)^{1/4} = 0{,}54\cdot568613^{1/4} = 14{,}8$.

Nusseltin luvun määritelmästä (26): $\alpha = \frac{\lambda}{L}Nu = \frac{28{,}48\cdot10^{-3}\,\mathrm{W/mK}}{0{,}05\mathrm{m}}14{,}8 = 8{,}45\ \mathrm{W/m^2K}$.

Konvektiolla siirtyvä lämpöteho on täten $q_k = \alpha(T_p - T_i) = 8{,}45\ \mathrm{W/m^2K}(100 - 20)\mathrm{K} = 676\ \mathrm{W/m^2}$.

Säteily:

Ympäristön eli huoneen seinien lämpötila voidaan olettaa samaksi kuin huoneilman lämpötila eli $T_y = T_i = 20^\circ$C. Taulukkokirjan [1] taulukosta 29 valuraudan emissiviteetti $\varepsilon = 0.8$. Kaava (46):

$$q_s = \varepsilon\sigma\left(T_s^4 - T_y^4\right) = 0{,}8\cdot5{,}67\cdot10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}\left(373{,}15^4 - 293{,}15^4\right)\mathrm{K^4} = 544\ \mathrm{W/m^2}.$$

Kokonaislämpöteho:

$\Phi = A(q_k + q_s) = (\pi d^2/4)(q_k + q_s) = (\pi\cdot0{,}2^2\,\mathrm{m^2}/4)(676\ \mathrm{W/m^2} + 544\ \mathrm{W/m^2}) = 153\ \mathrm{W} \approx 0{,}15\ \mathrm{kW}$.

LÄHDEVIITTEET:

[1] Kotiaho, Lampinen, Seppälä: Termodynamiikan ja lämmönsiirto-opin aineominaisuustaulukoita. Sovelletun termodynamiikan laboratorio, raportti 136.

[2] Markku J. Lampinen: Termodynamiikan perusteet, Otatieto 582

[3] Incropera, F.P, DeWitt, D.P.: Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 3.ed. Wiley 1990.