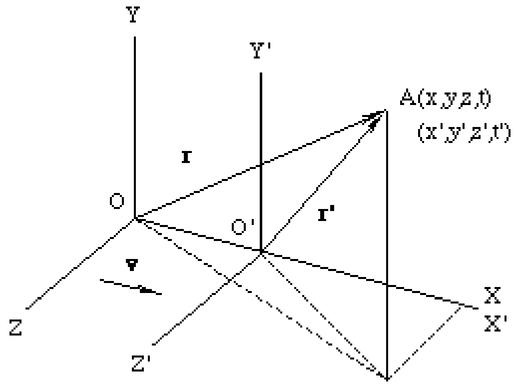
1.4 ELEKTRONIN SUHTEELLISUUSTEOREETTINEN LIIKEMÄÄRÄ

1.4.1 Lorentz-muunnos

Einstein esitti v. 1905 erikoisen suhteellisuusteorian perusperiaatteen, jonka mukaan kaikkien luonnonlakien tulee olla samoja havainnoitsijoille, jotka liikkuvat vakionopeudella toistensa suhteen. Yksi joukko näistä luonnonlaeista on sähkömagnetismi, jonka keskeisiä suureita on sähkömagneettisen aallon etenemisnopeus tyhjiössä, c. Siten suhteellisuusteorian mukaan valon nopeuden tulee olla sama kaikille havainnoitsijoille.

Tarkastellaan kahta koordinaatistoa O(x,y,z,t) ja O'(x',y',z',t'), jotka liikkuvat toistensa suhteen nopeudella **v** siten, että niiden x-akselit yhtyvät, ja y- ja z-akselit ovat keskenään samansuuntaiset (kuva 1).



Kuva 1: *Toistensa suhteen liikkuvat koordinaatistot O ja O'*

Oletetaan, että hetkellä t=t'=0 koordinaatistojen origot yhtyvät, ja samalla hetkellä lähetetään matkaan valonsäde. Koordinaatistossa O oleva havaitsija näkee valonsäteen ajanhetkellä t pisteessä A, ja kirjoittaa pisteen A etäisyydelle r yhtälön

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 . \qquad (1)$$

Koordinaatistossa O' oleva havaitsija näkee valonsäteen samassa pisteessä A ajanhetkellä t'. Koska valon nopeus on kummallekin havaitsijalle sama, pisteen A etäisyydelle r' saadaan koordinaatistossa O'

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 . \qquad (2)$$

Etsitään yhteys koordinaatistojen O ja O' koordinaattien välille. Koska liike tapahtuu koordinaatistojen x-akselien suuntaan, voidaan asettaa y=y' ja z=z'. Koordinaatistojen välimatka on havaitsijan O mielestä OO' =vt. Oletetaan, että x-koordinaattien välinen muunnos on muotoa

$$x' = k(x - vt), \qquad (3)$$

ja aikakoordinaattien välinen muunnos muotoa

$$t' = a(t - bx),\tag{4}$$

missä a, b ja k ovat vakioita. Kun muunnoskaavat (3) ja (4) sijoitetaan yhtälöön (2), ja vaaditaan, että saatu yhtälö on identtinen yhtälön (1) kanssa, saadaan vakioiksi

$$k = a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ ja } b = \frac{v}{c^2}.\tag{5}$$

Yhtälöitä, jotka saadaan sijoittamalla vakiot (5) muunnoskaavoihin (3) ja (4), kutsutaan Lorentz-muunnokseksi.

Tavallisessa elämässä maan pinnalla nopeudet ovat niin pieniä valon nopeuteen verrattuna, että $k=a\approx 1$ ja $b\approx 0$. Tämä vastaa klassisen mekaniikan tapausta, jolloin muunnoskaavoja (3) ja (4) kutsutaan Galilein koordinaattimuunnoksiksi. Kun nopeudet kasvavat lähelle valon nopeuden suuruusluokkaa, vakion k arvo kasvaa, ja on alettava soveltaa suhteellisuusteoriaa. Tällaisiin tilanteisiin joudutaan esim. suurenergiafysiikan käyttämissä hiukkaskiihdyttimissä.

1.4.2 Relativistisen hiukkasen liikemäärä ja energia

Lorentz-muunnoksesta seuraa että kappaleelle, joka liikkuu havaitsijan suhteen nopeudella **v**, liikemäärä **p** on

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = k m_0 \mathbf{v},\tag{6}$$

missä vakio k on määritelty kaavassa (5). Yhtälö (6) voidaan tulkita myös siten, että nopeudella **v** liikkuvan kappaleen massa on nopeuden funktio:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\tag{7}$$

jolloin suuretta m_0 kutsutaan hiukkasen lepomassaksi.

Levosta nopeuteen **v** kiihdytetyn hiukkasen liike-energia lasketaan integraalina

$$E_k = \int_0^v \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.\tag{8}$$

Kun muistetaan, että **F**=d**p**/dt ja **v**=d**r**/dt, ja liikemäärä otetaan yhtälöstä (6), saadaan

$$E_k = \int_0^v \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^v \mathbf{v} \cdot d\left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).\tag{9}$$

Yhtälö (9) voidaan osittaisintegroida ottamalla huomioon, että $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}=v\cdot dv$, jolloin sievennyksen jälkeen saadaan

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2 , \tag{10}$$

joka on havaitsijan mittaama kineettinen energia hiukkaselle, joka liikkuu nopeudella **v** havaitsijan suhteen. Yhtälössä esiintyvää suuretta m_0c^2 kutsutaan hiukkasen lepoenergiaksi, ja siten hiukkasen kokonaisenergia on

$$E = E_k + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} , \tag{11}$$

Tämä on sopusoinnussa yhtälön (7) tulkinnalle massan muuttumisesta nopeuden funktiona. Vertaamalla kokonaisenergiaa yhtälön (6) liikemäärään, havaitaan, että

$$\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E} , \tag{12}$$

ja kokonaisenergia voidaan kirjoittaa muotoon

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} . \tag{13}$$

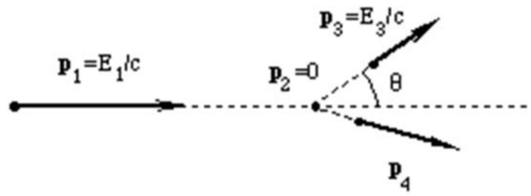
1.4.3 Kvantin siroaminen elektronista

Laboratoriotyössä tuotetaan suurienergisiä elektroneja antamalla radioaktiivisessa hajoamisessa saatavan gammasäteilyn sirota kiinteän aineen elektroneista (Comptonin sironta). Kvantin siroaminen elektronista noudattaa liikemäärän säilymislakia, kun kvanttia käsitellään hiukkasena, jonka lepomassa on nolla. Yhtälöstä (13) nähdään, että kvantin liikemäärä on tällöin

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h\upsilon}{c} . \tag{14}$$

Sijoittamalla tämä liikemäärä yhtälöön (12) nähdään, että lepomassaton hiukkanen voi edetä ainoastaan valon nopeudella.

Tarkastellaan suhteellisuusteorian mukaan tulevan kvantin (energia E_1, liikemäärä $\mathbf{p}_1=E_1/c$) siroamista levossa olevasta elektronista ($E_2=m_0c^2$, $\mathbf{p}_2=0$). Sironneen kvantin energia on E_3 ja liikemäärä $\mathbf{p}_3=E_3/c$, ja elektronin kokonaisenergia sironnan jälkeen on $E_4 = c\sqrt{m_0^2c^2 + p_4^2}$ ja liikemäärä $\mathbf{p}_4$ (kuva 2).



Kuva 2: *Kvantin siroaminen levossa olevasta elektronista*

Liikemäärän säilymislaista

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \tag{15}$$

saadaan elektronin liikemääräksi sironnan jälkeen $\mathbf{p}_4=\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3$, joka neliöön korotettuna on

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 . \tag{16}$$

Energian säilymislaki puolestaan antaa

$$E_1 + m_0 c^2 = E_3 + c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_4^2} , \tag{17}$$

josta elektronin liikemääräksi sironnan jälkeen saadaan

$$p_4^2 = \frac{1}{c^2}(E_1 + m_0 c^2 - E_3)^2 - m_0^2 c^2 . \tag{18}$$

Kun yhtälöt (16) ja (18) asetetaan yhtäsuuriksi, saadaan tulevan ja sironneen kvantin energioille yhteys

$$\boxed{\frac{1}{E_3} - \frac{1}{E_1} = \frac{1}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta),} \tag{19}$$

missä θ on sirontakulma (vektorien $\mathbf{p}_1$ ja $\mathbf{p}_3$ välinen kulma). Yhtälöstä (19) voidaan ratkaista E_1:n avulla E_3 ja siten saada selville kvantin kokema energianmenetys sironnassa. Toisaalta, vertaamalla yhtälöitä (11) ja (17) havaitaan, että energiaero E_3-E_1 on sama kuin elektronin saama kineettinen energia. Yhdistämällä nämä tulokset saadaan

$$E_1 - E_3 = E_{4,kin} = E_1\left(1 + \frac{m_0 c^2}{E_1(1 - \cos\theta)}\right)^{-1} . \tag{20}$$

Laboratoriotyössä määritetään tuloksista Comptonin elektronien saama suurin mahdollinen liike-energia. Yhtälöstä (20) havaitaan, että tämä energia on maksimissaan, kun sirontakulma θ=180°, eli kvantti siroaa takaisin tulosuuntaansa. Sirontakulman pienentyessä elektronin saama energia pienenee, kunnes se menee nollan sirontakulman ollessa θ=0.

1.4.4 Koejärjestely

Laboratoriotyössä gammalähteestä saatava säteily osuu valomonistinputken tuikeaineeseen (natriumjodidi). Tuikekide toimii samanaikaisesti kolmessa tehtävässä: 1) ilmaisee tulevan gammasäteilyn energian, 2) vuorovaikuttaa säteilyn kanssa Compton-sironnassa ja tuottaa siten nopeita elektroneja ja 3) ilmaisee Compton-sironnassa syntyneiden elektronien energian. Valomonistinputken tuottamat energiaan verrannolliset jännitepulssit johdetaan monikanava-analysaattorille spektriksi.

Comptonin ilmiö on tärkein gammasäteilyn ja kiinteän aineen välinen vuorovaikutusmekanismi energiavälillä 100 keV–3 MeV. Tällä energia-alueella säteilyn puoliintumispaksuus on tavallisimmissa ilmaisinkiteissä 10–200 mm. Elektronit puolestaan hidastuvat törmäämällä kimmottomasti ilmaisinkiteen atomeihin, jolloin niiden kantama on vain sadasosan luokkaa gammakvanttien kantamasta. Koska tyypillisen ilmaisinkiteen koko on tuuman suuruusluokkaa, kiteessä kerran Compton-sironnut kvantti karkaa kiteestä suurella todennäköisyydellä. Sironnassa syntynyt vapaa elektroni sen sijaan jää kiteeseen ja havaitaan kineettiseen energiaan verrannollisena jännitepulssina. Työssä määritetään näiden elektronien suurin mahdollinen energia, joka spektrissä on Compton-sironnan tuottaman rakenteen maksimienergia. Huomattakoon, että yhtälön (19) mukaan kvantin energia sironnan jälkeen ei voi olla nolla, joten vapaa hiukkanen ei voi kokonaan absorboida siihen osuvan kvantin energiaa. Tähän perustuu se, että spektristä voidaan erottaa tulevan gammasäteilyn energiaa vastaava piikki Comptonin sironnan aiheuttamasta rakenteesta. Gammaspektristä ja sen mittaamisesta on kerrottu yksityiskohtaisemmin liitteessä A.

Työssä määritetään Comptonin elektronien maksimienergia käyttäen muutamaa erilaista gammakvantin energiaa. Tarkoituksena on tutkia, onko elektronin liikemäärän ja liike-energian riippuvuus klassisen mekaniikan vaiko suhteellisuusteorian mukainen. Klassisen mekaniikan mukaan tämä riippuvuus on

$$\frac{p^2}{2m_0} = E_{kin}, \tag{21}$$

kun taas suhteellisuusteorian mukaan (yhtälöistä (11) ja (13))

$$E_{kin} = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2} - m_0c^2. \tag{22}$$

Yhtälö (22) voidaan kirjoittaa suureen $p^2/2m_0$ funktiona muotoon

$$\frac{p^2}{2m_0} = E_{kin} + \frac{E_{kin}^2}{2m_0c^2}. \tag{23}$$

Jos siis piirretään suure $p^2/2m_0$ parametrin E_{kin} funktiona, saadaan klassisen mekaniikan mukaan suora ja suhteellisuusteorian mukaan paraabeli. Kokeellinen riippuvuus liikemäärän ja kineettisen energian välille saadaan liikemäärän säilymislaista (yhtälö (15)). Kun sirontakulma θ=180°, niin elektronin liikemäärä on

$$p_4 = p_1 + p_3. \tag{24}$$

Kun muistetaan, että yhtälön (14) mukaan kvantin liikemäärän ja energian välinen riippuvuus on $p_\gamma = E_\gamma/c$, niin yhtälö (24) voidaan kirjoittaa muotoon

$$cp_4 = cp_1 + cp_3 = E_1 + E_3. \qquad (25)$$

Kun vielä lausutaan sironneen kvantin energia E_3 tulevan kvantin energian ja elektronin kineettisen energian avulla (yhtälö (20)), saadaan elektronin liikemäärän ja kineettisen energian väliseksi kokeelliseksi riippuvuudeksi

$$\boxed{p_4 = \frac{1}{c}(2E_1 - E_{4,kin})}. \qquad (26)$$

Kun suure $p_4^2/2m_0$ piirretään suureen $E_{4,kin}$ funktiona samaan kuvaan yhtälöiden (21) ja (23) kuvaajien kanssa, voidaan päätellä, noudattaako Comptonin elektronien liike suhteellisuusteoriaa vaiko klassista mekaniikkaa.