

Harjoitus 4: Differentiaaliyhtälöt (Matlab)

SCI-C0200 Fysiikan ja matematiikan menetelmien studio 2023



Harjoituksen aiheita

- Matlab:n `ode` komento differentiaaliyhtöiden ratkaisemiseen
- Differentiaaliyhtälömallien käyttö ilmiöiden mallintamisessa
 - Infektion leviäminen
 - Radioaktiivinen hajoaminen
 - Ajettu värähtelijä
- Matlabin `contour` ja `surface` -komennot 3D visualisointiin

Oppimistavoitteet

- Osaat ratkaista differentiaaliyhtälön numeerisesti Matlabilla

Diff.yhtälöiden numeerinen ratkaiseminen

- DY:n yleinen muoto: $\frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t))$
 - $x(\cdot)$ mahdollisesti vektoriarvoinen
 - Derivaattaa $\frac{d}{dt}x(t)$ merkitään usein myös $\dot{x}(t)$
- Lineaarisia DY:tä voidaan ratkaista symbolisesti (Mathematica)
 - Tuloksena $x(t)$:n ”kaava”
- Sovelluksissa DY:t usein epälineaarisia, jolloin ne joudutaan ratkaisemaan numeerisesti (esim. Matlabilla)
 - Tuloksena arvot $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)$
- Matlab:ssa useita DY-ratkaisimia (ode45, ode113, ode23s)
- Suhteellisen yksinkertaisissa käytännön ongelmissa ei juurikaan ole väliä mitä ratkaisinta käyttää

DY:n ratkaiseminen Matlabilla: Vaiheet

1. Muuta DY muotoon $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$

- Yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella vain derivaatta

2. Toteuta $F(t, x(t))$ Matlab-funktiona:

```
function dx = minunF(t,x,param)
```

```
...
```

3. Kutsu jotakin Matlab:n valmista DY-ratkaisinta parametrina F (`minunF`), ratkaisuväli t :lle (`tspan`), sekä x :n alkuarvot (`x0`):

```
[tout,xout]=ode45(@minunF,tspan,x0,options,param)
```

(Merkintä `@` kertoo Matlabille, että parametrina funktio)

4. Validoi tulos esim. piirtämällä ratkaisu:

- `plot(tout,xout,'r.-')`

Esimerkki: Eksponentiaalinen vaimeneminen

- Ratkaistaan DY $\dot{y}(t) + y(t)/T_0 = 0$ välillä $t \in [0, 100]$, missä $y(0) = 1$ ja parametri $T_0 > 0$.

- **Vaihe 1:**

$$\underbrace{\dot{y}(t)}_{\dot{x}(t)} = - \underbrace{\frac{y(t)}{T_0}}_{F(t,x(t))}$$

- **Vaihe 2:** Luodaan tiedosto `ExpDecay.m` sisältäen koodin

```
function dy = ExpDecay(t, y, T0)
```

```
dy = - y/T0;
```

- Vaikka esimerkissämme ei esiinny explisiittistä aikariippuvuutta (eli F ei riipu t :stä), täytyy `t` kuitenkin olla listattu `ExpDecay`-funktion parametriksi

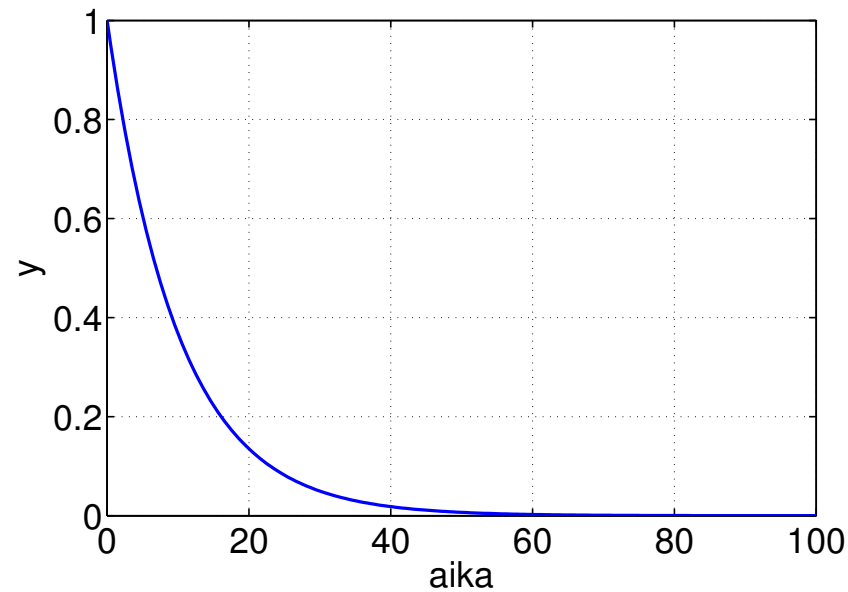
Esimerkki: Eksponentiaalinen vaimeneminen

- **Vaihe 3:** Alustetaan muut ratkaisimen parametrit...
 - Luodaan esim. 200 pisteen aikavektori aikavälille $t \in [0, 100]$:
`tspan=linspace(0,100,200);`
 - Asetetaan alkuarvo ja parametri T_0 : `y0=1; T0=10;`
 - `options` - muuttuja (oikeammin `structure`) mahdollistaa mm. ratkaisulta vaaditun tarkkuuden kontrolloinnin:
`options=[];`
`options=odeset(options,'RelTol',1e-7,'AbsTol',1e-7);`
→ suurin sallittu suhteellinen ja absoluuttinen virhe on 10^{-7}
- ... ja ratkaistaan DY:
`[tout,yout]=ode45(@ExpDecay,tspan,y0,options,T0)`
(Huom! Parametrin T_0 arvo välittyy `ExpDecay` funktiolle)

Esimerkki: Eksponentiaalinen vaimeneminen

- **Vaihe 4:** Ihmetellään ratkaisua:

```
plot(tout,yout);  
xlabel('aika');  
ylabel('y');  
grid on
```



Korkeamman kertaluvun DY:t

- Jos DY:ssä esiintyy esim. toisia tai kolmansia derivaattoja, täytyy se muuttaa ensimmäisen kertaluvun (vektoriarvoiseksi) DY:ksi
- **Esim.** Värähtelijän DY-malli $\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$, ($\ddot{y}(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t)$)
 → Merkitään $x_1(t) = \dot{y}(t)$, $x_2(t) = y(t)$ ja saadaan DY

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\omega_0^2 x_2(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}}_{F(t,x(t))},$$

→ F Matlab-funktioksi: `function dx = Oscillator(t,x,omega0)`

$$\text{dx} = [-\text{omega0}^2 * \text{x}(2); \text{x}(1)];$$

→ Ratkaistaan: `[tout,xout]=ode45(@Oscillator,tspan,x0...)`, missä x_0 on 2-rivinen vektori ja x_{out} on 2-sarakkeinen matriisi

Tehtävä A: Infektiomalli

- Tarkastellaan infektion leviämistä kuvaavaa SIR-mallia. Populaatio on kolmeen ryhmään ajanhetkellä t : alttiit $s(t)$ (susceptible), infektoituneet $i(t)$ (infected) ja toipuneet $r(t)$ (recovered). Ryhmien kokojen muutoksia voidaan kuvata seuraavilla differentiaaliyhtälöillä (vrt. differenssiyhtälöt harjoituksessa 2B):

$$\dot{s}(t) = -\alpha \cdot i(t) \cdot s(t)$$

$$\dot{i}(t) = \alpha \cdot i(t) \cdot s(t) - \beta \cdot i(t)$$

$$\dot{r}(t) = \beta \cdot i(t)$$

missä $t \in [1, 100]$.

1. Toteuta Matlab koodi joka ratkaisee nämä differentiaaliyhtälöt.


VINKKI: Luo `Infektio.m` ja kirjoittamalla sen ensimmäiselle riville `function dsir=Infektio(t,sir,alpha,beta)`.

Tehtävä A: Infektiomalli


2. Ratkaise DYt käyttäen samoja parametrien α ja β arvoja kuin harjoituksessa 2B.

 Liitä vastauksiisi kuva eri ryhmien kehittymisestä ajan funktiona.

Lisää kuvaan myös `legend` ja anna akseleille nimet.

 Vertaa tuloksia Harjoituksen 2B differenssiyhtälöiden ratkaisuun, jossa ei ole kuolleiden ryhmää (eli $\gamma = 0$). Ovatko ratkaisut yhteneviä?

3. Ratkaise nyt sekä DY-malli että differenssiyhtälömalli käyttäen parametriarvoja $\alpha = 0.003$ ja $\beta = 0.03$ (ja $\gamma = 0$)

 Pohdi miksi ratkaisut eivät ole samanlaisia, vaikka mallit ovat periaatteessa samat.

Tehtävä B: Radioaktiivinen hajoaminen

- Tarkastellaan isotoopin y hajoamista aikavakiolla T_0 . Lisäksi oletetaan että ajanhetkellä t_z systeemiin tuodaan Z_0 kappaletta toista isotooppia z , joka hajoaa isotoopiksi y aikavakiolla T_1 . Näinollen isotoopin z hajoaminen lisää y :n määrää, mutta samalla myös y hajoaa. Ilmiötä voidaan mallintaa DY:llä

$$\dot{y}(t) = -y(t)/T_0 + z(t)/T_1,$$

missä

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_z) \\ Z_0 e^{-(t-t_z)/T_1} & t \in [t_z, \infty) \end{cases}$$

1. Toteuta DY:n ratkaisemiseen tarvittava Matlab-funktio

`function dy = ExpDecayTwo(t, y, T0, T1, Z0, tz).`

Vinkki: `if-else`

Tehtävä B: Radioaktiivinen hajoaminen


2. Ratkaistaan DY aikavälillä $t \in [0, 50]$ käyttäen vähintään 150 aikapistettä sekä aikavakiota $T_0 = 10$ ja siirtymähetkeä $t_z = 15$; lisäksi $Z_0 = 1$ ja $y(0) = 1$. Tutkiaksesi ratkaisun käyttäytymistä eri T_1 arvoilla, toteuta esim. seuraava Matlab-koodi, joka tallentaa kutakin T_1 :n arvoa vastaavan ratkaisun matriisiin yT1 riviksi:

```
T1 = linspace(1, 150, 150);  
for T1index = 1:length(T1)  
    [t, y] = ode45(@ExpDecayTwo, ....  
    yT1(T1index, :) = y;  
end
```


- Plottaa ratkaisu y ajanfunktiona t esim. parametriarvolla $T_1 = 75$ ja tarkista että se näyttää järkevältä
- ☞ Millä T_1 :n arvolla isotooppia y on eniten jäljellä loppuajanhetkellä $t = 50$? (VINKKI: max-komento)

Tehtävä B: Radioaktiivinen hajoaminen

3. Visualisoidaan ratkaisut sekä ajan t että aikavakion T_1 funktiona.

 Liitä vastaukseesi kuva, jossa vaaka-akselilla on aika, pystyakselilla T_1 ja $y(t)$:n arvo on kuvattu väriasteikolla. Lisää kuvaan colorbar ja nimeä akselit.

Vinkki: `surf(xscale, yscale, zmatrix)`

 Liitä vastaukseesi kuva, jossa vaaka-akselilla on aika, pystyakselilla T_1 ja $y(t)$:n arvot on kuvattu tasa-arvokäyrin. Nimeä akselit.

Vinkki: `[c,h]=contour(xscale, yscale, zmatrix,Ncontour)`

Vinkki: `clabel(c, h);`

- Tarkista, että 2-kohdan vastauksesi on sopusoinnussa kuvien kanssa.

Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

- Tarkastellaan harmonista värähtelijää, jonka värähtelyitä y ajaa sinimuotoinen voima ($F \cos(\omega t)$). Lisäksi liikettä vaimentaa esim. väliaineen kitka vaimennusvakiolla T_0 . Tilannetta kuvaa liikeyhtälö

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t)/T_0 + \omega_0^2 y(t) = \frac{F}{M} \cos(\omega t), \quad (1)$$

missä parametri ω_0 on värähtelijän resonanssitaajuus, M värähtelijän massa, F ajavan voiman amplitudi ja ω sen taajuus.

1. Muuta tämä 2. kertaluvun DY 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöksi $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$, missä $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$. Toteuta F Matlab-funktiona siten, että se voidaan myöhemmin asettaa parametreille T_0, ω_0, M, F ja ω .


Vinkki: `function dx=DrivenOsc(t,x,T0,omega,M,F,omega0)`


Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

2. Kirjoita Matlab-koodi, joka ratkaisee yhtälön (1) mielivaltaisilla parametreilla ja alkuarvoilla aikavälillä $t \in [0, \infty)$. Ääretöntä aikaa ei numerikassa voida saavuttaa, mutta loppuajanhetkellä $t_\infty \simeq 10 \cdot T_0$ päästäneen tarpeeksi lähelle ääretöntä.
- Ratkaise yhtälö parametriarvoilla $T_0 = 10$, $\omega_0 = 1$, $M = 1$, $F = 1$ ja $\omega = 1$, kun värähtelijä on alkuhetkellä $t = 0$ levossa, eli $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. (Vinkki: `ode45`).
 - Visualisoi ratkaisu ja varmista että mallisi tulokset näyttävät järkeviltä: Kun voima alkaa vaikuttaa, värähtelijä lähtee liikkeelle pikkuhiljaa, ja lähestyy asymptoottisesti steady-state tilannetta, jossa värähtely on sinimuotoista.

Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

3. Tutkitaan, miltä ”asymptoottinen” ratkaisu näyttää, jos ajotaajuus ω on alle, yli, tai yhtäsuuri kuin resonanssitaajuus ω_0 . Ratkaise yhtälö (1) kolmella arvolla $\omega \in \{0.1, 1.0, 1.1\}$. Pidä muut parametriarvot ennallaan (ks. kohta 2)

 Liitä vastaukseesi `subplot` -komentoa hyödyntäen kuva, jossa ovat kolmessa kuvaikkunassa nämä kolme ratkaisua sekä ajava voima (vaaka-akselilla aika, pystyakselilla $y(t)$:n arvo). Lisää kuvaan `legend`:it ja nimeä akselit.

 Miten värähtelyn amplitudi ja sen vaihe (suhteessa ajavan voiman vaiheeseen) käyttäytyvät kvalitatiivisesti eri tapauksissa?

Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

4. Muuta vaimennusvakion T_0 arvoja, ja yritä päätellä, mikä yksinkertainen yhtälö sitoo toisiinsa vaimennusvakion ja asymptotoottisen värähtelyn amplitudin. Käytä muuten samoja parametriarvoja kuin edellä ($\omega_0 = 1$, $M = 1$, $F = 1$ ja $\omega = 1$). (Vinkki: Voit kokeilla esimerkiksi plotata kuvia eri tilanteista.)


✎ Kerro minkä yhtälön löysit?

- Huom! Numeeristen tulosten perusteella voi usein yrittää tehdä ”educated guess”:n ratkaisun yleisistä piirteistä. Tässä on oltava varovainen, sillä periaatteessa numeriikasta voi päätellä vain numeroiden välisiä relaatioita (ei suureiden välisiä).


Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

5. Ajatellaan nyt, että DY-mallin tuottamat ratkaisut edustavat mitattuja havaintoja todellisesta fyysisestä värähtelijästä (esim. kvartsivärähtelijä rannekellossa) ja sovitetaan regressiomalli havaittuihin mittauksiin.
- Ota kustakin ajotaajuuden $\omega \in \{0.1, 1.0, 1.1\}$ arvolla saadusta ratkaisusta käsittelyyn otos aikavälin lopusta. Otoksen tulee sisältää vähintään kolme värähtelyjaksoa (Huom! tarvittava pituus riippu ω :n arvosta).
 - Sovita kuhunkin otokseen epälineaarinen regressiomalli $f(t; A, \hat{\omega}, \varphi) = A \cos(\hat{\omega}t + \varphi)$, missä A , $\hat{\omega}$ ja φ ovat sovituspärametreja.
 - Vihje: Toteuta Matlab-funktio `function ysovite=Kosini(beta,t)` ja käytä sitten `lsqcurvefit`-komentoa (vrt. Harjoitus 3B). Sovituksen onnistumiselle on tärkeää asettaa sovituspärametreillä hyvät alkuarvaukset (käytä tuottamiasi kuvia hyödyksi ja kokeile muuttella alkuarvaustasi, jos sovite ei näytä hyvältä).

Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

 Liitä vastaukseesi kolme kuvaa, joissa aika on vaaka-akselilla: Kussakin kuvassa on yhdestä ‘mittauksesta’, käsitelty otos merkittynä punaisina pisteinä ja siihen sovitettu regressiomalli sinisenä jatkuvana käyränä. Lisää `grid` ja nimeä akselit.

- Piirrä käyrä ensin, jotta pisteet eivät jää peittoon.

 Mitkä ovat PNS-estimaatit sovitusparametreille A , $\hat{\omega}$ ja φ ? Ovatko ne sopusoinnussa kohdassa 3 antamiesi vastausten kanssa?

 Liitä koko kotitehtävän lähdekoodi vastauksiisi