



Aalto University
School of Science

PHYS-C0220 Termodynamiikka ja statistinen fysiikka

Kevät 2022

Emppu Salonen
Leevi Viitanen
Erika Forss

Viikko 5: Kemiallinen potentiaali ja kvanttistatistiikat
ma 7.2. ja ke 9.2.



Aalto University
School of Science

Aiheet

1. Ideaalikaasun tilansuureet (jatko viime viikolta)
2. Kemiallinen potentiaali: intro
3. Termodynaaminen tasapaino
4. Kemiallisesta potentiaalista lisää
5. Eksergia ja avoin systeemi
6. Suurkanoninen joukko ja Gibbsin jakauma
7. Partitiofunktio ja vapausasteet
8. Ideaalinen kvanttikaasu
9. Fermionit ja bosonit

Osaamistavoitteet

1. Osaat määrittellä kemiallisen potentiaalin sekä selittää minkäläisten fysikaalisten ilmiöiden tarkastelussa se on avainasemassa (ja miksi).
2. Osaat johtaa ja selittää suurkanonisen jakauman (μVT -systeemille) sekä selittää mikä on suuren potentiaalin Φ_G fysikaalinen merkitys. Osaat laskea termodynaamisia ominaisuuksia avoimille systeemeille suurkanonisesta jakaumasta lähtien.
3. Tunnet fermioni- ja bosonijakaumafunktiot, ja osaat soveltaa niitä yksinkertaisten fysikaalisten ominaisuuksien tarkastelussa. Osaat myös selittää missä tapauksissa ideaalisesta kaasusta voidaan käyttää klassista kuvausta ja milloin taas kvanttiefekteistä tulee merkittäviä.

Ideaalikaasun tilansuureet

Partitiofunktio

$$Z_N = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_{\text{th}}^3} \right)^N \quad \text{jossa} \quad \lambda_{\text{th}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

$$Z_N \propto (VT^{3/2})^N \quad \text{Termodynaamisten ominaisuuksien laskemisen kannalta keskeiset skaalaukset}$$

$$\ln Z_N = N \left[\ln \left[\frac{(2\pi m k_B T)^{3/2} V}{N h^3} \right] + 1 \right] \quad \text{Stirlingin approksimaatio}$$

Sisäenergia

$$\ln Z_N = N \left[\ln \left[\frac{(2\pi m k_B T)^{3/2} V}{N h^3} \right] + 1 \right]$$

$$U = - \left(\frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta} \right) = k_B T^2 \left(\frac{\partial \ln Z_N}{\partial T} \right)$$
$$= \frac{3}{2} N k_B T$$

Huom! Derivaatan laskemisen kannalta olennainen muoto

$$\ln Z_N = N \ln \left(\alpha T^{3/2} \right) + N$$

jolloin

$$\frac{\partial \ln Z_N}{\partial T} = \frac{3 \alpha T^{1/2}}{2 \alpha T^{3/2}} = \frac{3}{2} T^{-1}$$

Helmholtzin funktio

$$\begin{aligned} F &= -k_{\text{B}}T \ln Z_N \\ &= Nk_{\text{B}}T \left[\ln \left[\frac{(2\pi mk_{\text{B}}T)^{3/2} V}{Nh^3} \right] + 1 \right] \\ &= Nk_{\text{B}}T \left[\ln \left(\frac{V}{N\lambda_{\text{th}}^3} \right) + 1 \right] \end{aligned}$$

Paine

$$F = Nk_B T \left[\ln \left(\frac{V}{N \lambda_{\text{th}}^3} \right) + 1 \right]$$

Termodynaaminen relaatio

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{N,T}$$

$$= Nk_B T \frac{1}{V} = nk_B T$$

ideaalikaasun tilanyhtälö!

Entropia

$$S = \frac{1}{T} (U - F)$$

$$= \frac{3}{2} Nk_B + Nk_B \left[\ln \left(\frac{V}{N\lambda_{\text{th}}^3} \right) + 1 \right]$$

$$= Nk_B \left[\frac{5}{2} - \ln (n\lambda_{\text{th}}^3) \right]$$

Nk. Sackurin ja Tetroden yhtälö

Kemiallinen potentiaali

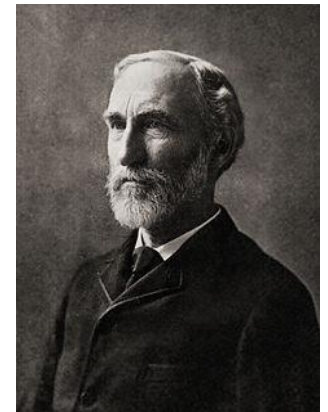
Kemiallinen potentiaali

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

Gibbsin esittelemä lisäys 1. pääsääntöön: miten systeemin sisäenergia muuttuu, kun se vaihtaa hiukkasia ympäristön kanssa (tai hiukkaset vaihtavat "tyyppiä" – joko kemiallisesti tai fysikaalisesti – systeemissä)?

Termodynamiikan 1. pääsääntö (yleisin muoto)

$$dU = TdS + \text{Kaikki työhön liittyvät termit} + \sum_j \mu_j dN_j$$



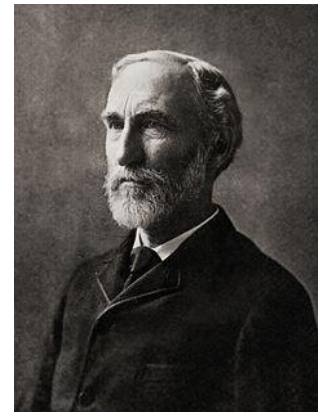
J. Willard Gibbs

Kemiallinen potentiaali

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \Rightarrow \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V}$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V}$$

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,p}$$

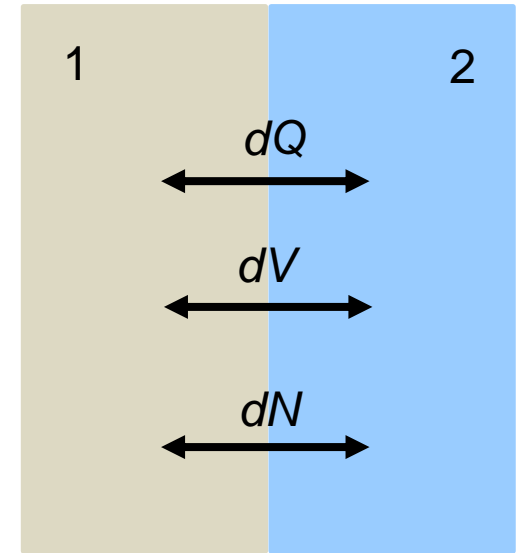


J. Willard Gibbs

Kaksi osasysteemiä

Tasapainotilassa entropia on maksimaalinen
(eristetty systeemi)

Yleisesti entropian $S(U, V, N)$ kokonaisdifferentiaali:



$$dS(U, V, N) = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V, N} dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U, N} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U, V} dN$$

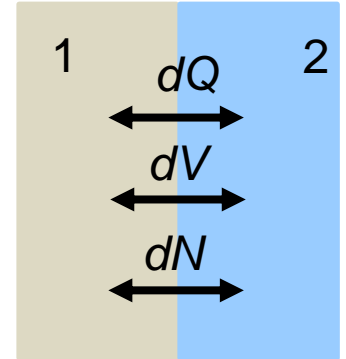
$\frac{1}{T}$ $\frac{p}{T}$ $-\frac{\mu}{T}$

Blue arrows point from the terms $\frac{1}{T}$, $\frac{p}{T}$, and $-\frac{\mu}{T}$ below to the corresponding partial derivatives in the equation above.

Nämä relaatiot suoraan 1. pääsäännöstä

Kaksi osasysteemiä

Eristetylle kokonaisuudelle siis



$$dS_{\text{tot}} = dS_1 + dS_2$$

$$= \left(\frac{dU_1}{T_1} + \frac{dU_2}{T_2} \right) + \left(\frac{p_1 dV_1}{T_1} + \frac{p_2 dV_2}{T_2} \right) - \left(\frac{\mu_1 dN_1}{T_1} + \frac{\mu_2 dN_2}{T_2} \right)$$

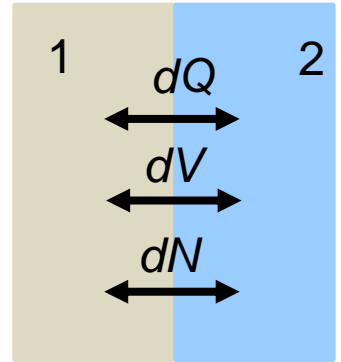
$$dU_1 = -dU_2$$

$$dV_1 = -dV_2$$

$$dN_1 = -dN_2$$

Kaksi osasysteemiä

Termodynaaminen tasapaino, kun



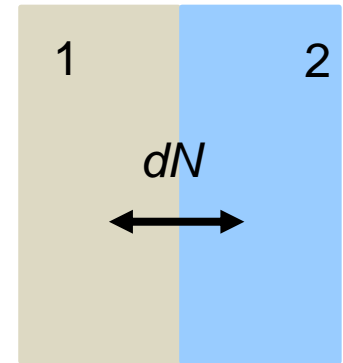
$$dS_{\text{tot}} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dU_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) dV_1 - \left(\frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_2}{T_2} \right) dN_1$$
$$= 0$$

- 1) Terminen tasapaino, $T_1 = T_2$
- 2) Mekaaninen tasapaino, $p_1 = p_2$
- 3) Kemiallinen tasapaino, $\mu_1 = \mu_2$

Huom! Riippuen systeemin ja ympäristön välisestä kytkennästä, kaikkien ehtojen ei välttämättä täydy olla voimssa. Esim. jäykkä väliseinä voi estää tilavuuksien muuttumisen paine-eron vuoksi. Tällöin $dV = 0$ aina.

Hiukkasten vaihto

Termisessä ja mekaanisessa tasapainossa, kun systeemi hakeutuu kohti uutta tasapainotilaa hiukkasten vaihdon suhteen,

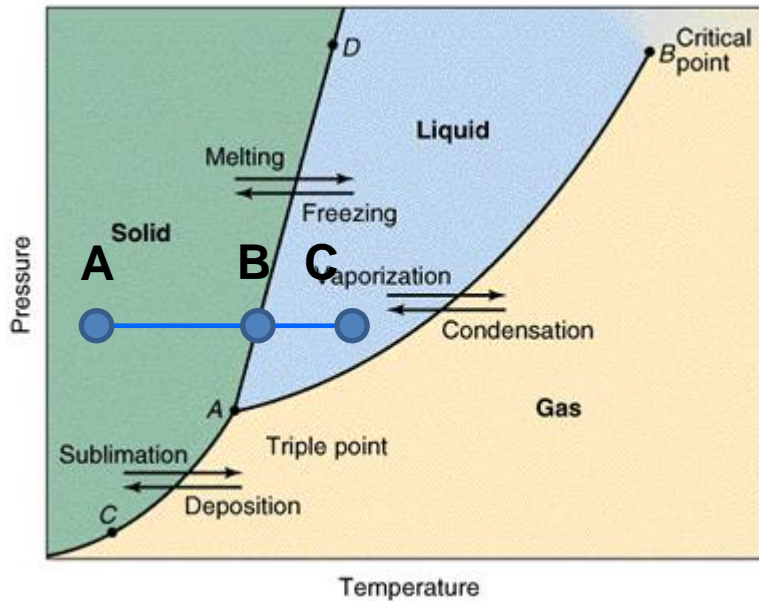


$$dS_{\text{tot}} = - \left(\frac{\mu_1}{T} - \frac{\mu_2}{T} \right) dN_1 \geq 0$$

Mieti vaihtoehtoa $\mu_1 > \mu_2$. Miten hiukkaset kulkeutuvat kokonaisuuden hakeutuessa tasapainotilaan?

Mikäli kemialliset potentiaalit ovat erisuuret, hiukkasten nettovirta on pienemmän kemiallisen potentiaalin suuntaan. (Vertaa energian virtaus lämpötilaeron vuoksi matalamman lämpötilan osasysteemin suuntaan.)

Faasimuutokset

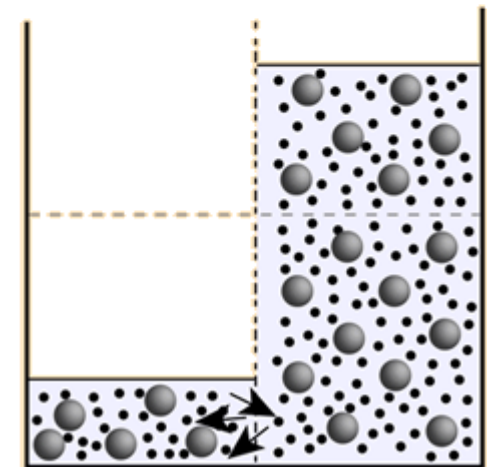
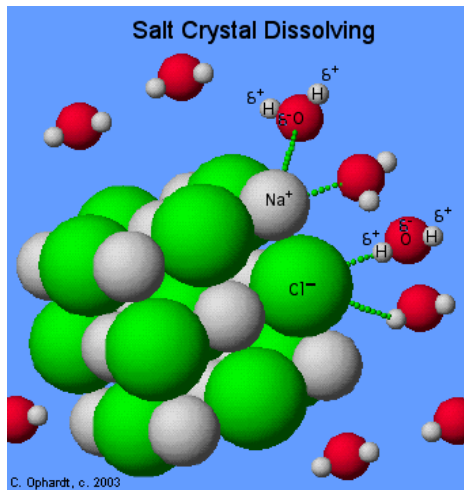
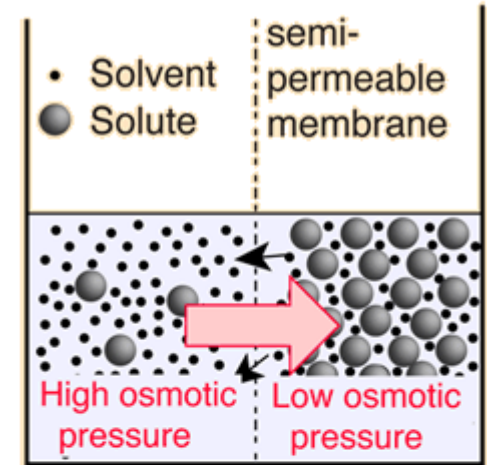
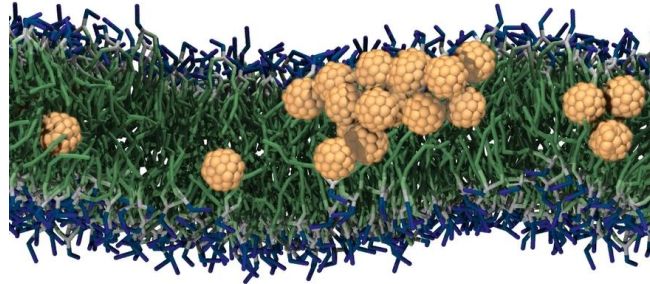
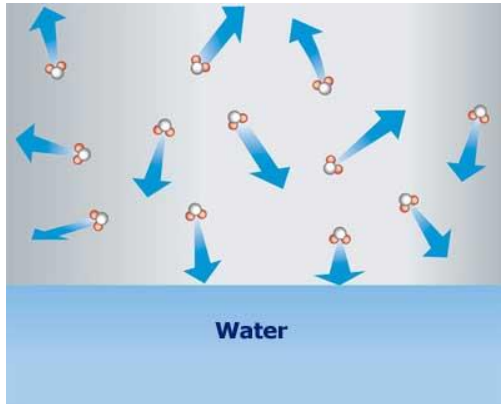


A. Kiinteä faasi $\mu_{\text{kiinteä}} < \mu_{\text{neste}}$

B. Faasimuutos
(*koeksistenssi*) $\mu_{\text{kiinteä}} = \mu_{\text{neste}}$

C. Nestefaasi $\mu_{\text{kiinteä}} > \mu_{\text{neste}}$

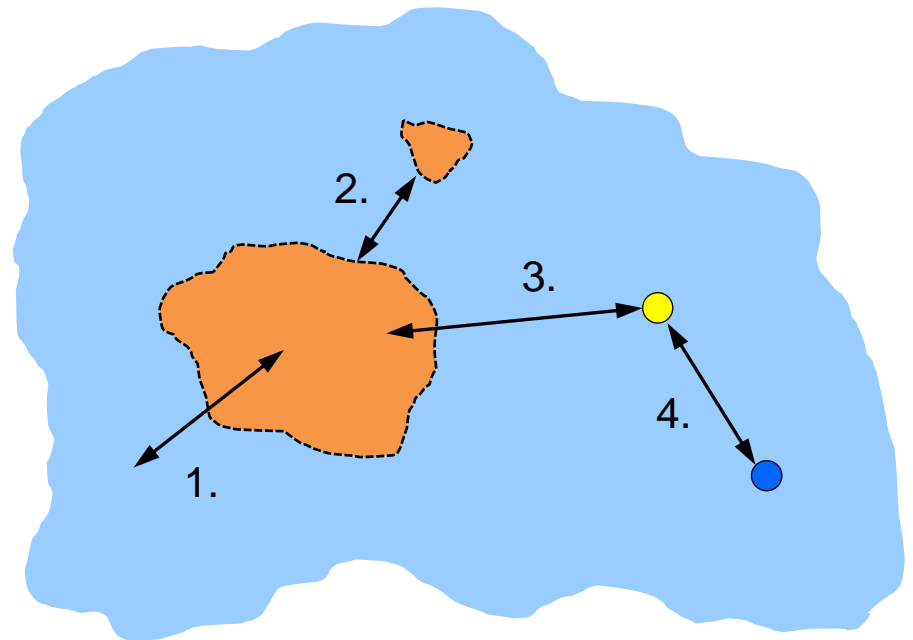
Jakautuminen faasien välillä



Kemiallinen potentiaali μ

1. Faasimuutokset
 2. Aggregoituminen ("klimppiintyminen")
 3. Jakautuminen faasien välillä
 4. Kemialliset reaktiot
- ... ja monia muita

Liittyy yleisesti ottaen kaikkiin prosesseihin, joissa hiukkaset (atomit, molekyylit, nanoklusterit jne.) muuttuvat toisiksi – kemiallisesti tai fysikaalisesti – tai joissa hiukkasten paikallinen ympäristö muuttuu (diffuusio, kulkeutuminen eri faasiin, faasimuutokset).



Eksergia ja avoin systeemi

Avoim osasysteemi

U, T, V, S, N, \dots

$U_0, T_0, V_0, S_0, N_0, \dots$

$$dS_{\text{tot}} = dS + dS_0 \geq 0$$

Ympäristön sisäenergian muutos

$$dU_0 = T_0 dS_0 - p_0 dV_0 + \mu_0 dN_0$$

$$\Leftrightarrow dS_0 = \frac{1}{T_0} (dU_0 + p_0 dV_0 - \mu_0 dN_0)$$


Kokonaisentropian muutos

$$T_0 dS + dU_0 + p_0 dV_0 - \mu_0 dN_0 \geq 0$$

$dU = -dU_0$, $dN = -dN_0$
jne.

$$-dU + T_0 dS - p_0 dV + \mu_0 dN \geq 0$$

Avoim osasysteemi



U, T, V, S, N, \dots

$U_0, T_0, V_0, S_0, N_0, \dots$

Eksergian muutokselle taas epäyhtälö

$$dU - T_0 dS + p_0 dV - \mu_0 dN \leq 0$$

Jos systeemi on termisesti kytketty, vakio-tilavuudessa ja se vaihtaa hiukkasia ympäristön kanssa,

$$dU - T dS - \mu dN \leq 0$$

Suuri potentiaali

$$dU - TdS - \mu dN \leq 0$$

$$U, T, V, S, N, \dots$$

$$U_0, T_0, V_0, S_0, N_0, \dots$$

Määritellään suuri potentiaali

$$\Phi_G = U - TS + \mu N$$

Kokonaisdifferentiaali

$$d\Phi_G = dU - TdS - SdT + \mu dN + Nd\mu$$

Jos T, V, μ vakioita

$$d\Phi_G = dU - TdS + \mu dN$$

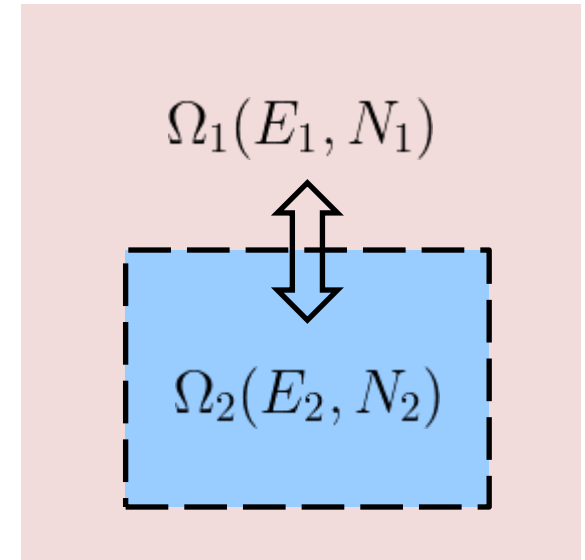
$$d\Phi_G \leq 0$$

Gibbsin jakauma

Kaksi avointa osasysteemiä

Todennäköisyys tilalle $E_2 = \varepsilon_r$ $N_2 = N_r$

$$P(\varepsilon_r, N_r) \propto \Omega_1(E - \varepsilon_r, N - N_r) \\ \propto \exp\left(\frac{1}{k_B} S_1(E - \varepsilon_r, N - N_r)\right)$$



$$E = E_1 + E_2$$

$$N = N_1 + N_2$$

Kirjoitetaan S_1 Taylorin sarjaksi

$$S_1(E - \varepsilon_r, N - N_r) \approx S_1(E, N) - \varepsilon_r \left(\frac{\partial S_1}{\partial E_1}\right)_{N_1, V_1, E_1=E} - N_r \left(\frac{\partial S_1}{\partial N_1}\right)_{E_1, V_1, N_1=N}$$

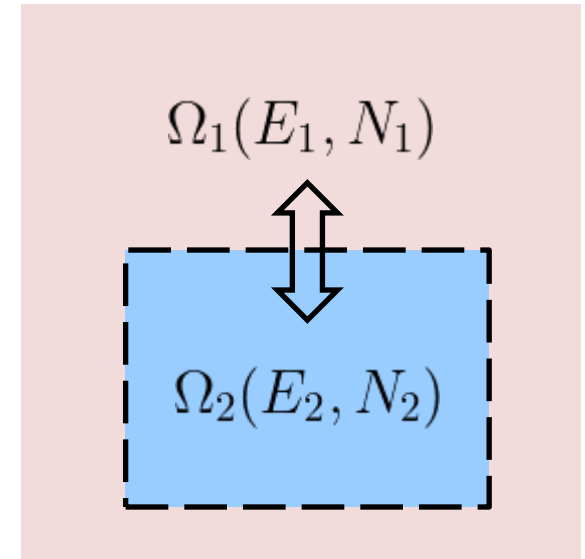
$$\frac{1}{T}$$

$$-\frac{\mu}{T}$$

Kaksi avointa osasysteemiä

$$S_1(E - \varepsilon_r, N - N_r) = S_1(E, N) - \frac{\varepsilon_r}{T} + \frac{N_r \mu}{T}$$

$$P(\varepsilon_r, N_r) \propto (\text{vakio}) \exp [\beta(N_r \mu - \varepsilon_r)]$$



Normitus

$$P(\varepsilon_r, N_r) = \frac{\exp [\beta(N_r \mu - \varepsilon_r)]}{\sum_i \exp [\beta(N_i \mu - \varepsilon_i)]} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp [\beta(N_r \mu - \varepsilon_r)]$$


Suurkanoninen partitiofunktio

Tilansuureet partitiofunktioista

$$\langle N \rangle = \sum_i N_i P_i = k_B T \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu} \right)_\beta$$

$$\langle E \rangle = U = \sum_i E_i P_i = - \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} \right)_\mu + \mu \langle N \rangle$$

$$S = -k_B \sum_i P_i \ln P_i = \frac{1}{T} (U - \mu \langle N \rangle + k_B T \ln \mathcal{Z})$$


 $-\Phi_G$

Suuri potentiaali

$$\Phi_G = -k_B T \ln \mathcal{Z}$$

$$S = - \left(\frac{\partial \Phi_G}{\partial T} \right)_{V, \mu}$$

$$p = - \left(\frac{\partial \Phi_G}{\partial V} \right)_{T, \mu}$$

$$N = - \left(\frac{\partial \Phi_G}{\partial \mu} \right)_{T, N}$$

Termodynaamiset potentiaalit

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$Z = \sum_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

$$\Phi_G = -k_B T \ln \mathcal{Z}$$

$$\mathcal{Z} = \sum_i e^{\beta(N_i \mu - \epsilon_i)}$$

$$G = -k_B T \ln Z_{pT}$$

$$Z_{pT} = \sum_i e^{-\beta(\epsilon_i + pV_i)}$$

Ideaalikaasulle

$$F = Nk_B T \left[\ln(n \lambda_{th}^3) - 1 \right] \quad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T, V}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T, V} = k_B T \left[\ln(n \lambda_{th}^3) - 1 \right] + Nk_B T \cdot \left(\frac{1}{N} \right)$$

$$\boxed{\mu = k_B T \ln(n \lambda_{th}^3)}$$

Ideaalikaasulle

$$\Phi_G = U - TS - \mu N \quad ; \quad \mu = k_B T \ln(n \lambda_{Th}^3)$$

$$\Phi_G = F - \mu N = N k_B T \left[\ln(n \lambda_{Th}^3) - 1 \right] - N k_B T \ln(n \lambda_{Th}^3)$$

$$= -N k_B T = -pV \quad (\leftarrow \text{EULERIN YHTÄLÖITÄ})$$

Ideaalinen kvanttikaasu

Ideaaliset kvanttikaasut

Jakaumafunktioiden johto tässä Gibbsin jakauman kautta.

Tämä onnistuu myös kanonisen jakauman kautta, mutta johto on varsin työläs.

Ideaalinen kvanttikaasu: vuorovaikutukset hiukkasten välillä mitättömiä → tilat ovat *yksihiukkastiloja*

Tilojen energiat $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \dots \leq \varepsilon_i \leq \dots$

Miehitysluvut $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$ $n_i = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathcal{Z} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} \exp \left[\beta \left(\underbrace{\mu (n_1 + n_2 + \dots)}_{N = \sum_i n_i} - \underbrace{(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots)}_{E_N = \sum_i n_i \varepsilon_i} \right) \right]$$

Partitiofunktio

$$\mathcal{Z} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} \exp [\beta (\mu (n_1 + n_2 + \dots) - (n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots))]$$

Todennäköisyys: N hiukkasta, miehitysluvut n_1, n_2, \dots

$$P_N(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp [\beta (\mu (n_1 + n_2 + \dots) - (n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots))]$$

Osoittaja

$$\begin{aligned} & \exp [\beta (\mu (n_1 + n_2 + \dots) - (n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots))] \\ &= \exp [\underbrace{\beta n_1 (\mu - \varepsilon_1)}_{\text{vain tila 1}}] \cdot \exp [\underbrace{\beta n_2 (\mu - \varepsilon_2)}_{\text{vain tila 2}}] \cdot \dots \end{aligned}$$

Partitiofunktio

$$\mathcal{Z} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} \exp [\beta (\mu (n_1 + n_2 + \dots) - (n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots))]$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} \exp [\beta n_1 (\mu - \varepsilon_1)] \cdot \exp [\beta n_2 (\mu - \varepsilon_2)] \cdot \dots$$

$$= \left[\sum_{n_1} \exp [\beta n_1 (\mu - \varepsilon_1)] \right] \cdot \left[\sum_{n_2} \exp [\beta n_2 (\mu - \varepsilon_2)] \right] \cdot \dots$$

$$= \prod_i \mathcal{Z}_i \quad \text{jossa} \quad \mathcal{Z}_i = \sum_{n_i} \exp [\beta n_i (\mu - \varepsilon_i)]$$

“Tilan i suurkanoninen partitiofunktio”

Tilojen todennäköisyydet

$$P_N(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots) = \frac{1}{Z} \exp [\beta (\mu (n_1 + n_2 + \dots) - (n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots))]$$

Nyt

$$P_N(n_1, n_2, \dots) = \prod_i^{\infty} P_i(n_i)$$

jossa

$$P_i(n_i) = \frac{1}{Z_i} \exp [\beta n_i (\mu - \varepsilon_i)]$$

$$\sum_i P_i(n_i) = 1$$



Aalto University
School of Science

Fermionit ja bosonit



Aalto University
School of Science

Kahdenlaisia hiukkasia

Bosonit

Aaltofunktio vaihtosymmetrinen

$$\Psi(1, 2) = \Psi(2, 1)$$

Mielivaltainen määrä bosoneja voi olla samalla kvanttilalla.

Spin kokonaisluku (0, 1, 2, ...)

Fotonit, fononit, ^4He

Fermionit

Aaltofunktio vaihdon suhteen antisymmetrinen

$$\Psi(1, 2) = -\Psi(2, 1)$$

Yhdellä tietyllä kvanttilalla voi olla korkeintaan yksi fermioni.

Spin puoliluku (1/2, 3/2, 5/2, ...)

Elektronit, protonit, neutronit, ...

Fermionit

$$\mathcal{Z}_i = \sum_{n_i} \exp [\beta n_i (\mu - \varepsilon_i)] \quad \text{Nyt } n_i = 0, 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}_i = 1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}$$

$$\ln \mathcal{Z}_i = \ln \left[1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \right]$$

Bosonit

$$\mathcal{Z}_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} \left[e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \right]^{n_i}$$

Sarja suppenee, jos $e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} < 1$
eli $\mu < \varepsilon_i \quad \forall i$

Valitaan perustilalle $\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow \mu < 0$

Tällöin
$$\mathcal{Z}_i = \left(1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \right)^{-1}$$

$$\ln \mathcal{Z}_i = -\ln \left[1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \right]$$

Yhteenveto

$$\mathcal{Z}_i = \left[1 \pm e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \right]^{\pm 1}$$

$$\ln \mathcal{Z}_i = \pm \ln \left[1 \pm e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \right]$$

+ fermionit
Fermi-Diracin jakauma (FD)

- bosonit
Bose-Einsteinin jakauma (BE)

Keskimääräinen miehitysluku

$$\langle n_i \rangle = \sum_i n_i P(n_i)$$

$$P_i(n_i) = \frac{1}{\mathcal{Z}_i} \exp [\beta n_i (\mu - \varepsilon_i)]$$

$$\mathcal{Z}_i = \sum_{n_i} \exp [\beta n_i (\mu - \varepsilon_i)]$$

Lasketaan derivaatta

$$\left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_i}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \sum_i \beta n_i \frac{e^{\beta n_i (\mu - \varepsilon_i)}}{\mathcal{Z}_i}$$

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_i}{\partial \mu} \right)_{T,V}$$

Keskimääräinen miehitysluku

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_i}{\partial \mu} \right)_{T,V}$$

Fermionit (+) ja bosonit (-)

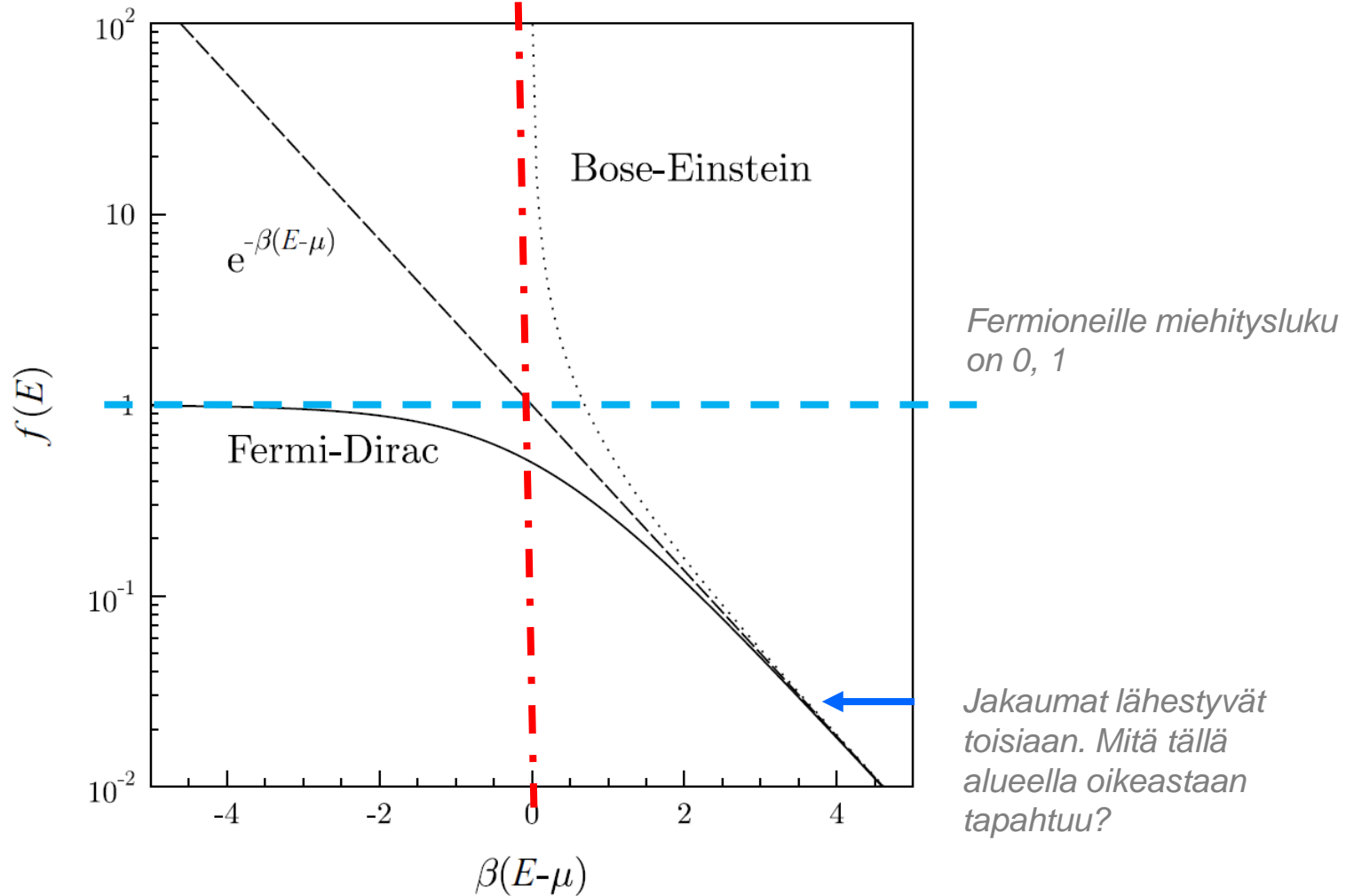
$$\ln \mathcal{Z}_i = \pm \ln \left[1 \pm e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \right]$$

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\beta e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}}{1 \pm e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}} \right)$$

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \pm 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ FD} \\ - \text{ BE} \end{array} \right.$$

Jakaumafunktiot

Raja $E = \mu$. Mikäli perustilan energia on $\varepsilon_1 = 0$,
täytyy kemiallisen potentiaalin olla $\mu < 0$.



Klassinen approksimaatio

Aiemmin: klassisen tarkastelun pätevyysalue $\langle n_i \rangle \ll 1 \quad \forall i$

Nyt

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \pm 1} \quad \varepsilon_1 = 0 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3 \leq \dots$$

Klassisen approksimaation ehto on voimassa, jos $e^{-\beta\mu} \gg 1$

Tällöin $\langle n_i \rangle \approx e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}$

Klassinen approksimaatio

Summataan yli kaikkien tilojen

$$\sum_i \langle n_i \rangle = e^{\beta\mu} \underbrace{\sum_i e^{-\beta\varepsilon_i}}_{\text{kanoninen partitiofunktio, } Z} = \langle N \rangle$$

$$\Leftrightarrow e^{\beta\mu} = \frac{1}{Z} \langle N \rangle$$

Keskimääräinen tilan i miehitysluku on siis

$$\langle n_i \rangle = \langle N \rangle \frac{e^{-\beta\varepsilon_i}}{Z}$$

Klassinen approksimaatio

Toisaalta meillä oli ehto $e^{-\beta\mu} \gg 1$

$$e^{-\beta\mu} = \frac{Z_1(T, V)}{\langle N \rangle} = \frac{V}{\langle N \rangle} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \gg 1$$