Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Lyhyt ohjeistus ryhmätehtäviin

Nämä ovat pienryhmissä ratkottavia tehtäviä. Teillä on kaksi tuntia aikaa keskustellen pohtia tehtäviä. Ratkaisuja ei palauteta eikä arvostella vaan suorituspisteet saa läsnäolosta, osallistumisesta ryhmätyöskentelyyn ja vastaamalla Mycourses-sivulla olevaan ryhmälaskarikyselyyn.

Tuttuja ilmiöitä ja kokeita?

Keskustelkaa keskenänne ja kartoittakaa kuinka hyvin tai heikosti tunnette seuraavat ilmiöt tai kokeet:

- Mustan kappaleen säteily
- Valosähköinen ilmiö
- Brownin liike
- Rutherfordin sirontakoe
- Rayleigh'n sironta
- Michelson-Morley koe
- Youngin kaksoisrakokoe

Onko jokin mikä on kaikille tuttu? Jotakin mistä olette kuulleet mutta ette sen enempää tiedä? Entä onko jokin mikä oli kaikille outo? Selittäkää toisillenne ilmiöt jotka osa tuntee hyvin mutta toiset eivät. Emme ehdi käsittelemään kaikkia näitä ilmiöitä kurssilla, mutta niistä mikä tahansa sopisi kurssin aihepiiriin.

Aaltoyhtälö

Johtakaa aaltoyhtälö mekaanisille aalloille. Katsokaa tämä Opi fysiikkaa-video
https://www.youtube.com/watch?v=EKNlCiubUJ0
ja tehkää ajatuksen kanssa sama lasku johtaen aaltoyhtälö mekaanisille aalloille:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Riippuuko aallon etenemisnopeus c aallonpituudesta λ? (Aallonpituuden ja aaltoluvun k välillä on yhteys $k = \frac{2\pi}{\lambda}$).

Seisovat aallot ja reunaehdot

Aaltoyhtälön ratkaisut ovat ajasta t ja paikasta x riippuvia funktiota $D(x,t)$. Esimerkkinä voidaan tarkastella värähtelevää kitaran kieltä. Kielen pituus on $L = 70\,\mathrm{cm}$ ja se on molemmista päistään tiukasti kiinnitetty kitaran runkoon. Nämä seikat muodostavat kitaran kielen värähtelylle reunaehdot: määritellään funktio $D(x,t)$ kuvaamaan kitaran kielen poikkeutusta tasapainotilasta paikassa x ja ajanhetkellä t. Nyt reunaehdot määräävät että kaikilla ajanhetkillä t täytyy toteutua ehdot $D(0,t) = D(L,t) = 0$. Lisäksi funktio $D(x,t)$ on fysikaalisesti mielekäs ainoastaan paikan arvoille $x \in [0, L]$ ja funktion $D(x,t)$ on oltava jatkuva niin ajan kuin paikankin suhteen. Keskustelkaa näistä määritelmistä ja varmistakaa että ne ovat kaikille selvät.

Aaltoyhtälöllä (1) on tärkeät harmonisesti värähtelevät perusratkaisut. Ne ovat ratkaisuja jotka ovat muotoa

$$D(x,t) = A \sin(kx + \omega t). \tag{2}$$

Ratkaiskaa kaikki mahdolliset harmoniset ratkaisut edellä esitetylle kitaran kielelle, eli määrittäkää mahdolliset arvot parametreille A, k ja ω. Huomaatte, että amplitudi A voi olla mitä vain, mutta aaltoluvulla k ja kulmataajuudella ω on tietty yhteys. Lisäksi näitä aaltoluvun ja kulmataajuuden ratkaisuja on (vain) numeroituva ääretön määrä (eli ne voidaan luetella tapaan (k_1, ω_1), (k_2, ω_2), ...)

Spektrianalyysi

Katsokaa tämä lyhyt youtube-video, jossa demonstroidaan kitaran tai vastaavan soittimen kielen värähtelyä

https://www.youtube.com/watch?v=_X72on6CSL0

Kielen liike saattaa näyttää monimutkaiselta mutta sen matemaattinen analyysi on itse asiassa aika helppo. Kielen mielivaltainen liike voidaan esittää sen edellä esiteltyjen harmonisten perusratkaisujen lineaarikombinaationa. Kitaran kielen seisovien aaltojen tapauksessa voimme kirjoittaa

$$D(x,t) = \sum_n A_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t), \tag{3}$$

missä k_n ja ω_n ovat edellä ratkaisemienne perusratkaisujen aaltoluvut ja kulmataajuudet. Varsinainen spektrianalyysin, tai sin-muotoisten aaltojen erikoistapauksessa kutsutun Fourier-analyysin tavoite onkin sitten painokertoimien A_n ratkaiseminen. Tärkeä havainto sarjakehitelmässä (3) on että kaikki aikariippuvuus yhtälön oikealla puolella on kertoimessa $\sin(\omega_n t)$. Erityisesti painokertoimet A_n ovat ajasta riippumattomat.

Tarkastellaan esimerkin vuoksi kitarankieltä joka on alussa poikkeutettu tasapainoasemastaan funktion $D(x, t = 0) = D_0(x)$ mukaisesti missä

$$D_0(x) = A\left(1 - \frac{2}{L}\left|x - \frac{L}{2}\right|\right). \tag{4}$$

Hahmotelkaa ensin miltä tämä alkuehto näyttää. Ajatus on siis määrittää tälle alkutilanteelle (jossa ei siis ole aikamuuttujaa) sarjakehitelmä

$$D_0(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x), \tag{5}$$

josta saadaan sitten koko aallon aikakehitys $D(x,t)$ lisäämällä jokaiseen perusratkaisuun $\sin(k_n x)$ ajasta riippuva vaihesiirto $\omega_n t$.

Tämän alkuehdon sarjakehitelmän painokertoimet saadaan laskettua integraalista

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(k_n x) D_0(x) dx. \tag{6}$$

Emme tätä kuitenkaan perustele emmekä edes laske, sillä se tulee teille vastaan aikanaan matematiikan kursseilla. Mutta tässä on lueteltuna muutama ensimmäinen painokerroin A_n:

$$\begin{aligned} A_1 &= A\frac{8}{\pi^2} \\ A_2 &= 0 \\ A_3 &= A\frac{8}{9\pi^2} \\ A_4 &= 0 \\ A_5 &= A\frac{8}{25\pi^2} \\ A_6 &= 0 \\ A_7 &= A\frac{8}{49\pi^2} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Keksitte varmaankin miten lukujono A_n jatkuu. Miksi joka toinen painokerroin on nolla?

Piirtäkää muutamia approksimaatioita alkuehdollemme $D_0(x)$: miltä näyttää alkuehdon sarjakehitelmä (5) jos katkaisette sarjakehitelmän yhtälön oikealla puolella, eli otatte huomioon vain N ensimmäistä termiä ? Kokeilkaa ainakin $N = 1$, $N = 5$ ja jokin suurempi N:n arvo. Huomioikaa, miten yhä pidempi sarjakehitelmä tuottaa aina vain paremman approksimaation alkuperäisestä alkuehdosta $D_0(x)$.

Aikakehitys

Alkuehdon $D_0(x) = D(x, t = 0)$ sarjakehitelmästä saadaan helposti ratkaistua kielen värähtelyn aikariippuvuus. Koska aaltoyhtälö (1) on lineaarinen, kehittyy sarjakehitelmän (5) jokainen perusratkaisu ajassa värähdellen oman kulmataajuutensa ω_n mukaisesti. Tämä siis tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että sarjakehitelmässä (5) esiintyvät painokertoimet A_n ovat samat kuin painokertoimet A_n ajasta riippuvassa sarjakehitelmässä (3). Koska tiedämme nyt painokertoimet A_n, aaltoluvut k_n sekä kulmataajuudet ω_n, pystymme ratkaisemaan värähtelevän kielen tilan (muodon) mielivaltaisella ajanhetkellä t yhtälöstä (3). Ratkomme aaltojen aikakehitystä myöhemmillä viikoilla numeerisesti.

Sointiväri

Erilaisten soittimien erilainen ääni, tai sointiväri, johtuu pääasiassa siitä että eri harmoniset värähtelyt kuuluvat erilaisella painoarvolla. Periaatteessa myös kitaran kielestä kuuluu erilainen ääni, riippuen siitä mistä kohti sitä venytetään – eo. laskuesimerkissä sitä venytettiin kielen puolesta välistä, joka ei toki ole se mistä kitaraa tavallisesti soitetaan. Jos kitaran kieltä venytetään eri kohdasta, muuttuu alkuehto $D_0(x)$ yhtälössä (4), mikä puolestaan muuttaa eri taajuuksien painokertoimia A_n sarjakehitelmässä (5). Toki soitinten fysiikka on vielä paljon monimutkaisempaa, koska esimerkiksi kitarassa kaikukopan omat värähdystaajuudet ovat tärkeitä – ehkä sähkökitara on lähimpänä tällaista ideaalista värähtelevän jousen mallia.

Katsokaa seuraava youtube video, jossa erilaisilla soittimilla soitetaan 128 Hz perustaajuista ääntä. Kukin soitin kuulostaa kuitenkin tyystin erilaiselta, ja videossa näkyykin graafisesti esitettynä pystyakselilla perustaajuuden (128 Hz) sekä eri taajuuksisten harmonisten yläsävelten painokerroin. Verratkaa erilaisia soittimia, tehkää havaintoja ja keskustelkaa miten soitinten erilaiset sointiäänet näyttäytyvät eri taajuuksien painotuksissa. Huomatkaa että videon y-akseli ei ole tasavälinen. Tämä aiheuttaa sen, että harmoninen sarja, jossa kunkin yläsävelsarjan viritykset ovat perustaajuuden 128 Hz moninkertoja, ei näytä tasajakoiselta vaikka se sellainen oikeasti olisikin ja lisäksi alhaisen taajuuden 'piikit' näyttävät suhteessa leveämmiltä kuin korkean taajuuden 'piikit'.

https://www.youtube.com/watch?v=VRAXK4QKJ1Q

Keskustelunne ja havaintojenne tueksi voitte pohtia seuraavia asioita:

- Monella soittimella (esim. sitar) perustaajuus ei ole se 'voimakkain' taajuus.
- Parilla soittimella (baritone sax, accordion) on aivan erityisen laaja yläsävelalue.
- Äänen korkeat taajuudet pääsääntöisesti vaimenevat nopeammin kuin matalat taajuudet. Keksittekö syitä miksi? Huomaatteko soittimen äänessä korkeampien taajuuksien voimakkaamman vaimenemisen?