



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2022

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

Luentoviikko 4

Kapasitanssi ja eristeet (YF 24)

Kondensaattorit ja kapasitanssi

Sarja- ja rinnankytketyt kondensaattorit

Sähkökentän energia

Eristeet

Eriste molekyyalitasolla

Gaussin laki eristeissä

Yhteenveto

Virta, resistanssi ja sähkömotorinen voima (YF 25)

Virta

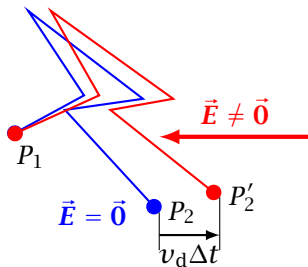
Resistiivisyys

Resistanssi

Sähkömotorinen voima

Energia ja teho

Yhteenveto

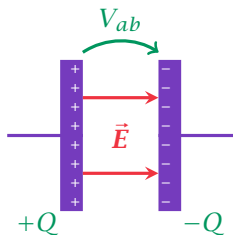


Tavoitteena on oppia

- ▶ kondensaattoreiden olemus ja miten lasketaan kondensaattorin varauskykyä kuvaava suure
- ▶ analysoimaan yhteenkytkettyjä kondensaattoreita
- ▶ laskemaan kondensaattoriin varastoidun energian määrä
- ▶ mitä eristeet ovat ja miten niitä voi käyttää parantamaan kondensaattoreita
- ▶ miten Gaussin lakia käytetään eristeissä

Kondensaattori

- ▶ **Kondensaattori** varastoi sähköistä potentiaalienergiaa ja varausta
- ▶ Käyttökohteita: pulssilaserien energialähteet, dynaamiset virtapiirit, kiihtyvyyssanturit, ...
- ▶ Muodostuu (yksinkertaisimmillaan) kahdesta toisistaan eristetyistä johdekappaleesta



- ▶ Aluksi johdekappaleilla on nollavaraus
- ▶ Kondensaattori **varataan** (ladataan) kun ulkoinen voima tekee työtä siirtämällä elektroneja johdekappaleesta toiseen.
- ▶ Tehty työ varastoituu kondensaattorin **sähkökentän energiaksi**
- ▶ Varaamisen jälkeen johdekappaleiden varaukset ovat $+Q$ ja $-Q$
- ▶ Sähkökenttä $E \propto Q$ joten **potentiaaliero V_{ab} on verrannollinen varaukseen Q**

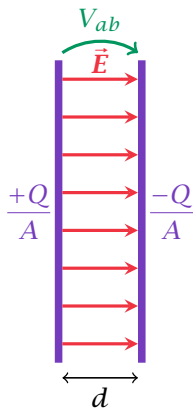
Kapasitanssi C

- ▶ Kondensaattorin **kapasitanssi**

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \quad [C] = \frac{C}{V} = F = \text{faradi}$$

- ▶ Kapasitanssi mittaa **kondensaattorin kykyä varastoida energiaa** (ja varausta)
- ▶ ”Yksinkertaisella” väliaineella eristetyin kondensaattorin kapasitanssi riippuu vain **kondensaattorin geometriasta** (koosta ja muodosta) ja **eristeaineen tyypistä**
- ▶ **Huomaa:** (kursivoitu) C on kapasitanssi, (antiikva-) C on coulombi

Levykondensaattori



Yksinkertainen mutta tärkeä perusrakenne:

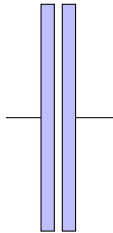
- ▶ Kaksi A -pinta-alaista levyä välimatkalla d toisistaan.
- ▶ Sähkökenttä suurten lähekkäisten levyjen välillä on likimain vakio $E = \sigma / \epsilon_0$ ja pintavaraus on likimain tasainen $\sigma = \pm Q / A$, joten

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}, \quad V_{ab} = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

- ▶ Tämä on siis **approksimaatio**, joka pätee kun A on iso ja d on pieni.

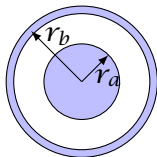
Kondensaattorgeometrioita

Levykondensaattori



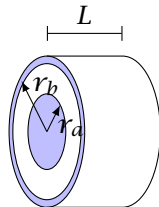
$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Pallokondensaattori



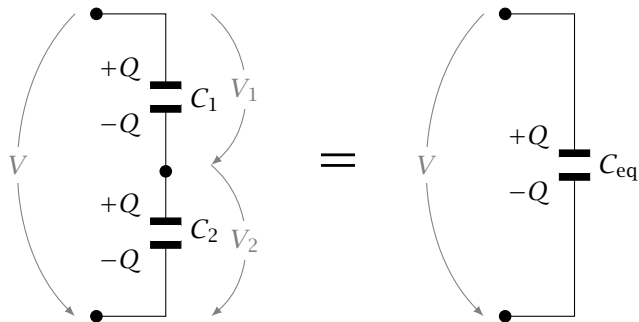
$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Sylinterikondensaattori



$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(r_b/r_a)}$$

Kondensaattorit sarjassa



- ▶ Kondensaattorien C_1 ja C_2 yli potentiaaliero V
 - ▶ Kondensaattorilevyillä varaukset $+Q$ ja $-Q$
- ▶ Vastaava (eli ekvivalentti) kondensaattori C_{eq} :

$$V_1 = \frac{Q}{C_1}, V_2 = \frac{Q}{C_2} \quad \text{ja} \quad V = V_1 + V_2 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Kondensaattorit sarjassa (jatkoa)

- ▶ Vastinkytkennälle saatiin

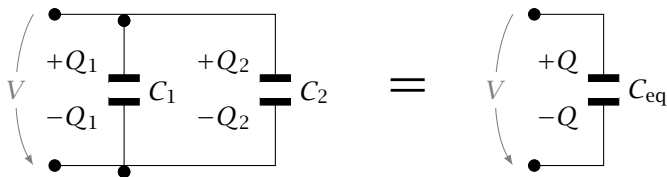
$$\frac{Q}{C_{\text{eq}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- ▶ N kondensaattoria **sarjassa** (kaikilla kondensaattorilevyillä varaus on suuruudeltaan sama)

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_i^N \frac{1}{C_i}$$

(sarjakytketyt kondensaattorit)

Kondensaattorit rinnan



- ▶ Kondensaattorien yli potentiaaliero V
 - ▶ Kondensaattoreilla erisuuret varaukset

$$Q_1 = C_1 V \text{ ja } Q_2 = C_2 V$$

- ▶ Vastaava kondensaattori C_{eq} :

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V = C_{eq}V$$

- ▶ N kondensaattoria **rinnan** (jokaisen osakondensaattorin jännite on sama)

$$C_{eq} = \sum_i^N C_i$$

(rinnankytketyt kondensaattorit)

Kondensaattorin varaaminen

- ▶ Kondensaattorien hyödyllisyys perustuu niiden kykyyn varastoida energiaa
- ▶ Määritetään kondensaattorin varaamiseen tarvittava työ:
 - ▶ Jos kondensaattorin jännite ja varaus ovat kesken varaamisen v ja q ja kondensaattorissa siirretään varaus dq , tehdään työ $dW = v dq = (q/C) dq$
 - ▶ Lopulta kondensaattorin jännite on V ja varaus Q
 - ▶ Kokonaistyö saadaan integroimalla

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

- ▶ Kondensaattorin potentiaalienergia (vrt. jousen potentiaalienergia)

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$

- ▶ Kapasitanssi mittaa kondensaattorin kykyä varastoida energiaa ja varausta

Sähkökentän energiatiheys

- ▶ Varausten (elektronien) siirtäminen kondensaattorin johdekappaleelta toiselle vaatii työtä sähkökenttää vastaan \Rightarrow voimme ajatella, että **energia varastoituu** kondensaattorin sähkökenttään
- ▶ Kondensaattorin **energiatiheys** (energia tilavuusyksikössä) $u = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{\text{tilavuus}}$
- ▶ Esim. levykondensaattorin kapasitanssi $C = \epsilon_0 A/d$, potentiaaliero $V = Ed$ ja tilavuus $= Ad$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}$$

(sähköenergiatiheys tyhjiössä, **yleispätevä tulos**)

- ▶ Sähkökentän energian käsite on vaihtoehtoinen tapa **tulkita** varausjoukon potentiaalienergia
- ▶ **Onko tyhjiö tyhjä?**

Eristeet

- ▶ Tähän asti kondensaattorilevyjen (eli johdekappaleiden realisaatioiden) välissä on ollut tyhjiö (\approx ilma)
- ▶ Käytännössä levyjen välissä on eristeainetta (eristettä)
 1. Eriste pitää levyt (luotettavasti) **erillään**
 2. **Suurempi jännite** (suurempi kentänvoimakkuus) mahdollinen ennen **läpilyöntiä**
 3. Jos levyjen väliin lisätään eristettä, huomataan, että **kapasitanssi** C_0 (kapasitanssi, kun levyjen välissä ilmaa) **kasvaa** kertoimella

$$K = \varepsilon_r = \text{suhteellinen permittiivisyys} = \text{eristevakio} > 1$$

arvoon C (kapasitanssi, kun levyjen välissä eristettä):

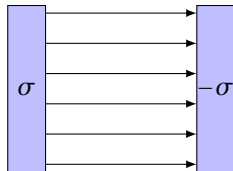
$$K = \frac{C}{C_0} \qquad \text{(eristevakion määritelmä)}$$

- ▶ K on suuruusluokkaa 1 (tyhjiö) ... 5–10 (lasi) ... ^{jopa} 80 (**vesi**)

Indusoitunut varaus ja eristeen polarisaatio

- ▶ Kondensaattorilevyjen väliin eristettä $\Rightarrow C$ kasvaa, jännite V pienenee (jos Q vakio) \Rightarrow sähkökenttä pienenee $E_0 \rightarrow E$:

$$E = \frac{E_0}{K} \quad (\text{jos } Q \text{ on vakio})$$

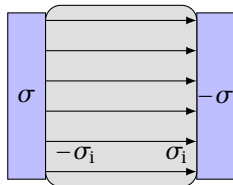


- \Leftrightarrow eriste on **polarisoitunut**
- \Leftrightarrow eristeseen on **indusoitunut pintavarausta**

- ▶ Sähkökenttä on muuttunut indusoituneen pintavaraustiheyden σ_i vuoksi (**oletus**: $\sigma_i \propto E$):

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma_{\text{netto}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{K\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \text{indusoitunut pintavaraustiheys } \sigma_i = \sigma \left(1 - \frac{1}{K}\right)$$



Permittiivisyys

- ▶ **Permittiivisyys** ϵ (= materiaalin ominaisuus)

$$\epsilon = K \epsilon_0$$

- ▶ **Levykondensaattorin** kapasitanssi eristeen kanssa

$$C = K C_0 = K \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d}$$

- ▶ **Sähköenergiatiheys** **materiaalissa**

$$u = \frac{1}{2} K \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

- ▶ **Tyhjiössä** (ja likimain ilmassa) $K = 1$ ja $\epsilon = \epsilon_0$

Läpilyönti

- ▶ Kun sähkökentän voimakkuus esimerkiksi ilmassa nousee riittävän suureksi ($E_m \approx 3 \times 10^6 \text{ V/m}$), ilmamolekyylit **ionisoituvat** ja ilma alkaa johtaa sähkövirtaa
 - ▶ Varatun johdepallon potentiaalia ei voi nostaa rajatta: suuri potentiaali nostaa sähkökentän niin suureksi, että syntyy **koronapurkaus** (lievää kipinöintiä) tai (eristeen, ilman) **läpilyönti** (oikosulkuvirta eristeen läpi)
 - ▶ Mitä pienempi on johdepallon säde, sitä suurempi on kenttä pallon pinnalla \implies koronapurkauksen välttämiseksi on syytä käyttää suurisäteisiä elektrodeja (ellei tavoite ole purkauksen synnyttäminen, vrt. **lasertulostin**)
 - ▶ Ukkosenjohdattimessa tylppä (pyöreä) kärki **on parempi** kuin terävä
- ▶ Suurin **kentänvoimakkuus**, jonka aine sietää, on aineen **läpilyöntikestävyys** (esim. polypropyleenille $E_m \approx 7 \times 10^7 \text{ V/m}$)
- ▶ Läpilyönti esim. kondensaattorissa voi polttaa eristeeseen reiän ja pilata komponentin

Oikea kondensaattori

Oheisen kondensaattorin kapasitanssi ja maksimijännite ovat

$$C = 1.0 \mu\text{F}, \quad V_{\text{max}} = 63 \text{ V/m}$$

PET-eristeen eristevakio ja läpilyöntikestävyys ovat suurin piirtein

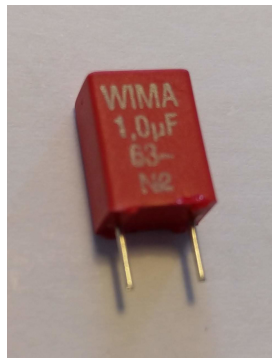
$$K = 3.5, \quad E_{\text{m}} = 5 \times 10^7 \text{ V/m}$$

Eristeen minimipaksuus on tämän perusteella

$$d = \frac{V_{\text{max}}}{E_{\text{m}}} \approx 1.3 \mu\text{m}$$

Jos tämä olisi levykondensaattori

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow A = \frac{Cd}{K\epsilon_0} \approx 400 \text{ cm}^2$$

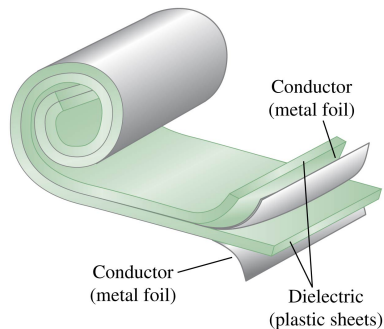
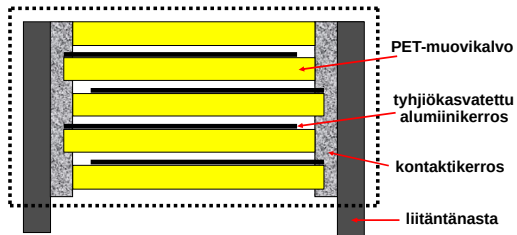


punainen osa on noin
5 mm × 7 mm × 10 mm

Oikean kondensaattorin rakenne

Yksi tapa olisi kääriä levykondensaattoria rullalle, jolloin kapasitanssi samalla kasvaa kun kummallakin levyllä on toinen levy molemmilla puolilla eikä vain toisella puolella.

[YF kuva 24.13]

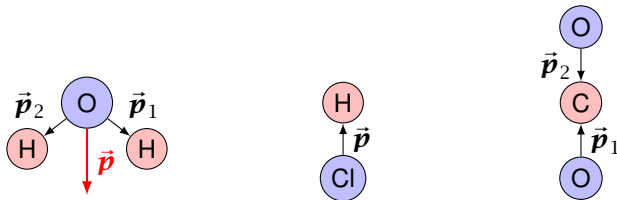


Valmistajan datalehden mukaan rakenne on kerrostettu suunnilleen näin. Tässäkin tapauksessa pinta-alaksi riittää noin puolet.
(Noin 200 cm² vaatii paljon kerroksia.)

Sähköinen polarisaatio

Molekyylit

- Ideaalisessa eristeessä ei ole vapaita varauksia, jotka voisivat liikkua ulkoisessa kentässä pintavaraukseksi ja kumota ulkoisen kentän vaikutuksen – **mistä eristeen pintavaraus tulee?**
- Molekyyleillä voi olla **pysyvä dipolimomentti**, joka on seurausta elektronien epätasaisesta jakautumisesta molekyylissä.
 - Tällaisia **polaarisia molekyylejä** ovat esim. H_2O , HCl muttei CO_2



(Kuvassa elektronegatiiviset atomit ovat sinisellä, elektropositiiviset punaisella)

Sähköinen polarisaatio

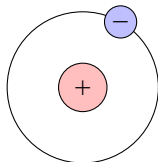
Polaaristen molekyylien suunta

- ▶ Ilman ulkoista kenttää polaariset molekyylit suuntautuvat lämpöliikkeen vuoksi yleensä satunnaisesti
- ▶ Kokonaisuudella ei ole dipolimomenttia
- ▶ Ulkoinen sähkökenttä suuntaa dipolit osittain
- ▶ Lämpöliike sotkee edelleen molekyylien suuntausta
- ▶ Matalassa lämpötilassa suuntaus on likimain täydellinen

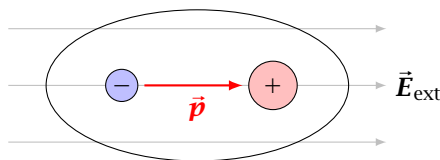
Sähköinen polarisaatio

Atomit

- ▶ Pallosymmetrian vuoksi yksittäisillä atomeilla ei ole dipolimomenttia
- ▶ Ulkoinen sähkökenttä siirtää negatiivisia elektroneja ja positiivisia ytimiä toistensa suhteen
⇒ atomeille **indusoituu** dipolimomentti



Ei ulkoista kenttää

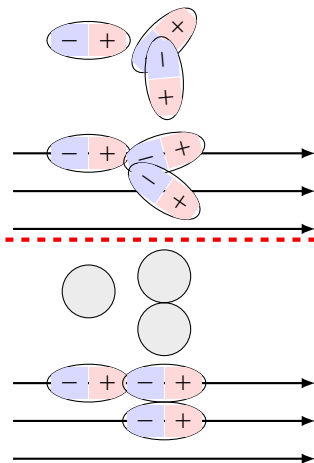


Ulkoinen kenttä \vec{E}_{ext}

Sähköinen polarisaatio

Polarisaatio mikroskooppisesti

- ▶ Polaariset molekyylit sähkökentässä
 - ▶ Osittainen suuntautuminen
- ▶ Ei-polaariset molekyylit sähkökentässä
 - ▶ Polarisoituminen \Rightarrow (atomeilla) dipolimomentti
- ▶ Polarisoitumisen takia eristeelle syntyy **pintavaraus**, joka tuottaa **ulkoista kenttää pienentävän** sähkökentän (eristeen sisällä nettovarausitiheys = 0)
- ▶ Eristeen varaus on **sidottua varausta**, koska (molekyylien) varaus ei voi liikkua vapaasti
- ▶ Johteen varauksia voi lisätä tai poistaa tai siirtää, joten se on **vapaata varausta**



Gaussin laki eriste–johde-rajapinnassa

- Sovelletaan Gaussin lakia eristeen ja johteen rajapintaan (esim. kondensaattorissa) – käytetään Gaussin pintana ”tonnikalapurkkia”:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad EA = \frac{(\sigma - \sigma_i)A}{\epsilon_0} \quad \&$$

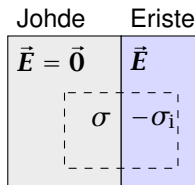
$$\sigma_i = \sigma \left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \Rightarrow \quad EA = \frac{\sigma A}{K\epsilon_0} \Leftrightarrow KEA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

- $K\vec{E}$:n vuo on $\sigma A/\epsilon_0$:n suuruinen, joten **Gaussin laki eristeessä** on

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl-free}}}{\epsilon_0}$$

(eristeessä)

- $Q_{\text{encl-free}}$ on **vapaa varaus** Gaussin (eli integrointi-) pinnan sisällä



Yhteenveto luvusta 24

Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Kondensaattori ja kapasitanssi C
- ▶ Kondensaattoriin varastoitunut energia U
- ▶ Kentän energiatiheys u
- ▶ Eristeaineet, eristevakio K ja permittiivisyys $\varepsilon = K\varepsilon_0$
- ▶ Läpilyöntikestävyys E_m

Tärkeitä kaavoja

Kondensaattoreille yleensä

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}, \quad U = \frac{Q^2}{2C}$$

Kentän energiatiheys

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Tasokondensaattori

$$C = KC_0 = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Gaussin laki eristeessä

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl-free}}}{\varepsilon_0}$$

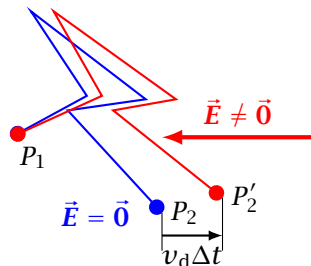
Virta, resistanssi ja sähkömotorinen voima (YF 25)

Tavoitteena on oppia

- ▶ mitä sähkövirta tarkoittaa ja miten varaukset liikkuvat johteessa
- ▶ mitä aineen resistiivisyys ja johtavuus tarkoittavat
- ▶ miten lasketaan johtimen resistanssi, kun tiedetään johtimen mitat ja resistiivisyys
- ▶ miten sähkömotorinen voima (smv) mahdollistaa virran kulkemisen virtapiirissä
- ▶ miten lasketaan energioita ja tehoja piireissä

Varaus johteessa

- ▶ (Sähkö)**virta** on **varausten liikettä** paikasta toiseen
- ▶ Jos varaukset kulkevat suljettua johdinsilmukkaa pitkin, silmukka muodostaa (sähkö)**virtapiirin**
- ▶ Virtapiireillä **siirretään energiaa** ilman liikkuvia osia [varaukset liikkuvat]
- ▶ Sähköstaattisessa tilanteessa **johteen** elektronit liikkuvat satunnaisesti ja törmäilevät materiaalin positiivisiin ioneihin (nettovirtaa **ei synny**)
- ▶ Jos johteeseen herätetään **pysyvä** sähkökenttä \vec{E} (**miten: tulossa**), varauksiin kohdistuu voima $\vec{F} = q\vec{E}$
- ▶ Vapaat varaukset törmäilevät yhä ioneihin, mutta sähköinen voima \vec{F} ajaa varauksia hitaasti voiman suuntaan: tätä kuvaa **ajautumisnopeus** \vec{v}_d (d = drift)

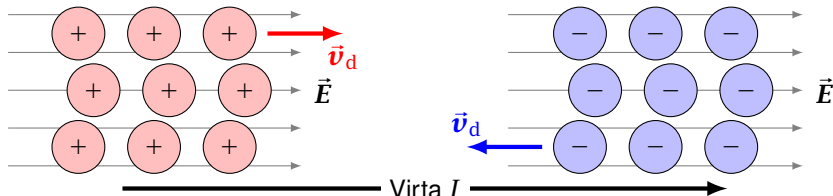


Virran suunta ja määritelmä

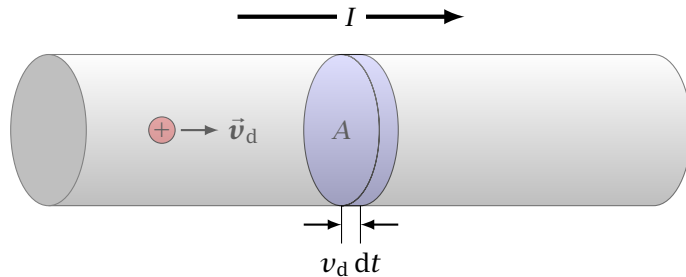
- ▶ Varausta kuljettavat
 - ▶ metalleissa elektronit
 - ▶ plasmassa (= ionisoituneessa kaasussa) ja liuoksissa elektronit ja ionit
 - ▶ puolijosteissa elektronit ja positiiviset aukot (= puuttuvat elektronit)
- ▶ Virran **suunta** on **positiivisten varausten** suunta
- ▶ Jos poikkipinnan A läpi kulkee aikayksikössä dt nettovaraus dQ , **virta**

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$[I] = \frac{C}{s} = A = \text{ampeeri}$$



Virta ja ajautumisnopeus



- ▶ Ajassa dt varaukset siirtyvät matkan $v_d dt$
- ▶ Kiekossa on $nA v_d dt$ hiukkasta (jos hiukkastiheys on n , $[n] = 1/\text{m}^3$) \Rightarrow kiekossa on varaus $dQ = nqv_d A dt$

- ▶ Virta

$$I = \frac{dQ}{dt} = n |q| v_d A \quad (\text{miksi } |q|?)$$

Virrantiheys

- ▶ Virta yksikköpoikkipinnan läpi on nimeltään **virrantiheys**

$$J = \frac{I}{A} = n |q| v_d \quad [J] = \frac{A}{m^2}$$

- ▶ Virta ja virrantiheys eivät riipu liikkuvan varauksen etumerkistä (kun positiivisen varauksen eli **virran kulkusuunta on selvitetty**)
- ▶ Virrantiheys voidaan myös esittää vektorina, jonka suunta on virtauksen suunta:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Huomaa: Itseisarvomerkit eivät kuulu tähän! (Miksi?)

- ▶ Virta **ei ole vektori**, vaikka sillä on suunta. Virrantiheys on vektori, mutta se on **paikallinen** mitta virran määrälle ja suunnalle. Virta kuvaa laajemman alueen läpi kulkevaa varausvirtausta.

Ohmin laki

- ▶ Ideaalitapauksessa **virrantiheys** johteessa on suoraan **verrannollinen sähkökentän voimakkuuteen** eli suureiden suhde on vakio:

$$\rho = \frac{E}{J}$$

Ohmin laki

- ▶ Verrannollisuuskerroin ρ on **resistiivisyys**, $[\rho] = \text{V m/A} = \Omega \text{ m}$
- ▶ Resisttiivisyyden käänteisluku $1/\rho$ on **johtavuus**, $[1/\rho] = \text{S/m}$,
 $S = 1/\Omega = \text{siemens} = [\text{siimens}]$ [johtavuuden symboli olisi σ , mutta säästämme sen pintavaraustiheydelle]
- ▶ Ohmin lakia noudattava materiaali on **ohminen** eli **lineaarinen** johde (esim. metallit likimain)
- ▶ Jos materiaali ei noudata Ohmin lakia, se on **ei-ohminen** eli **epälineaarinen**
- ▶ Ohmin laki on idealisaatio (oikeastaan Ohmin "laki")

Aineiden resistiivisyyksiä

Johteet

| | |
|-------------|--|
| hopea | $1.47 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ |
| kupari | $1.72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ |
| alumiini | $2.75 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ |
| manganiini* | $44 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ |

Puolijohteet (puhtaat)

| | |
|-----------|-------------------------|
| germanium | $0.60 \Omega \text{ m}$ |
| pii | $2300 \Omega \text{ m}$ |

Eristeet

| | |
|---------------------|--|
| kvartsi (sulatettu) | $75 \times 10^{16} \Omega \text{ m}$ |
| lasi | $10^{10} \dots 10^{14} \Omega \text{ m}$ |
| teflon (PTFE) | $> 10^{13} \Omega \text{ m}$ |

*seos: Cu 84%, Mn 12% ja Ni 4%

Eristeiden ja johteiden resistiivisyydet ovat aivan eri suuruusluokkaa:

esim. piirilevyn [eristettä] päällä olevien johdinliuskojen välillä ei kulje johtavuusvirtaa

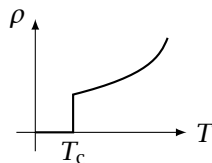
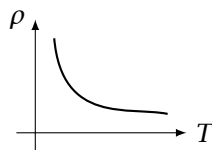
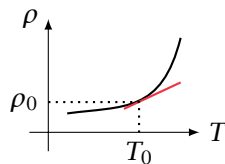
Resistiivisyyden lämpötilariippuvuus

Metallien resistiivisyys kasvaa lämpötilan kasvaessa

- ▶ Ionit värähtelevät enemmän \Rightarrow lisää törmäyksiä
- ▶ Lämpötilariippuvuus $\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$, missä ρ_0 on resistiivisyys lämpötilassa T_0 (esim. $0\text{ }^\circ\text{C}$ tai $20\text{ }^\circ\text{C}$) ja α on **resistiivisyyden lämpötilakerroin** – kaava pätee vain rajoitetusti

Puolijohhteiden resistiivisyys tyypillisesti pienenee lämpötilan kasvaessa

Suprajohhteiden resistiivisyys putoaa nolnaan kriittisen lämpötilan alapuolella



Resistanssi

- ▶ Ohmin lain mukaan johteessa sähkökenttä $\vec{E} = \rho \vec{J}$
- ▶ Virta johtimessa ja jännite johtimen päiden välillä ovat kiinnostavampia ja mitattavampia suureita kuin \vec{E} ja \vec{J}
- ▶ Valitaan sylinterimäinen johdin (pituus L , poikkipinta-ala A) ja asetetaan sen yli jännite V :

$$E = \frac{V}{L} = \rho J = \rho \frac{I}{A} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\rho L}{A} I = RI$$

- ▶ Verrannollisuuskerroin R on **resistanssi**: $R = \frac{\rho L}{A}$ (suora johdin)
- ▶ Lineaarinen riippuvuus $V = RI$ on toinen tapa **esittää** Ohmin laki
- ▶ Resistanssin yksikkö ohmi = $\Omega = V/A = [\text{oomi}]$
- ▶ **Vastus** = komponentti, jolla on resistanssia

Kapasitanssin ja resistanssin vertailu

Levykondensaattorin kapasitanssi

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

Sarjakytkentä (sama Q)

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Rinnankytkentä (sama V_{ab})

$$C_{\text{eq}} = \sum_i C_i$$

Suoran johtimen resistanssi

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

Sarjakytkentä (sama I)

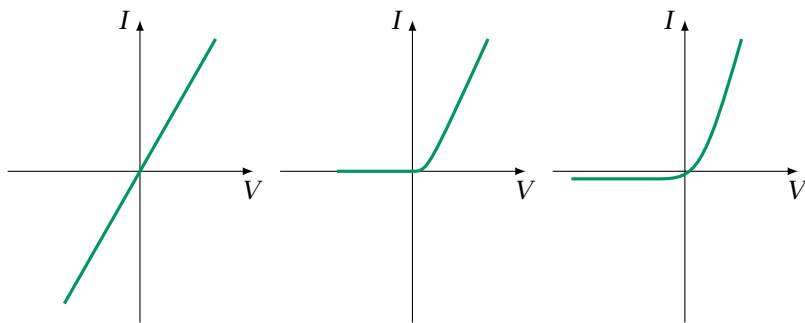
$$R_{\text{eq}} = \sum_i R_i$$

Rinnankytkentä (sama V_{ab})

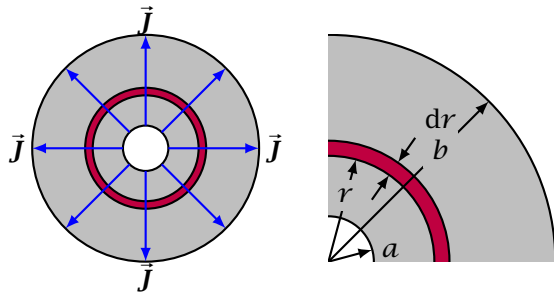
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Virta–jännite-käyrä

- ▶ Ideaalisen vastuksen $I(V)$ -käyrä on suora (vasemmalla)
- ▶ Tyhjiödiodin ja puolijohdediodin käyrät (keskellä ja oikealla) ovat hyvin epälineaarisia (komponentit eivät noudata Ohmin lakia)



Esimerkki



Mikä on onton h -pituisen sylinterin säteittäinen resistanssi? Sisä- ja ulkoelektrodit ovat ideaalijohdetta, ja niihin kytketty jännitelähde synnyttää säteittäisen virran täyteaineeseen, jonka resistiivisyys on $\rho > 0$.

- ▶ Poikkipinta-ala ei ole vakio, joten yhtälöä $R = \rho L/A$ ei voi käyttää suoraan
- ▶ Sylinterimäisen kuoren (paksuus dr ja pinta-ala $2\pi r h$) resistanssi on

$$dR = \frac{\rho dr}{2\pi r h} \quad \Rightarrow \quad R = \int dR = \frac{\rho}{2\pi h} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{b}{a}$$

Virtapiiri

- ▶ Yritetään saada tasavirta (= tasainen sähkönsäilytys) kulkemaan **irtaimessa johtimessa**
 - ▶ Asetetaan sähkökenttä \vec{E}_1 johtimeen
 - ▶ Virrantiheys $\vec{J} = \vec{E}_1 / \rho$, varaukset liikkuvat
 - ▶ Johtimen toiseen päähän kertyy negatiivista varausta
 - ▶ Toiseen päähän kertyy positiivista varausta
 - ▶ Varaukset muodostavat sähkökentän \vec{E}_2 , joka kumoaa ulkoisen kentän:

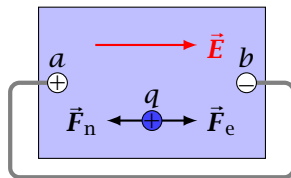
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ei virtaa}$$

- ▶ Epätäydellisessä (= avoimessa) "piirissä" **ei voi kulkea tasavirtaa**
- ▶ Jotta tasavirta saadaan kulkemaan, tarvitaan **johdinsilmukka** eli **suljettu virtapiiri**
- ▶ Kun varaus kulkee kierroksen suljetussa virtapiirissä, **potentiaalienergian** on oltava sama lopussa kuin alussa
 - ▶ Vastuksessa **potentiaalienergia aina vähenee**, joten jossain täytyy olla **potentiaalienergian lisäin** (ajattele suihkulähdettä ja vesipumppua)
 - ▶ Pelkkä **ulkoinen staattinen sähkökenttä ei riitä** tasavirran herättämiseen

Sähkömotorinen voima

- ▶ Virtapiireissä virtaa liikuttaa **sähkömotorinen voima** (smv) \mathcal{E}
- ▶ Sähkömotorisen voiman **yksikkö on voltti**
- ▶ Smv:n lähteenä voi olla esimerkiksi paristo (kemiallinen reaktio), generaattori (varauksiin magneettikentässä kohdistettu mekaaninen työ) tai aurinkokenno (valon fotonit luovat elektroni–aukko-pareja pn-liitoksessa)
- ▶ Ideaalinen **smv:n lähde** luo **napojen** a ja b välille potentiaalieron ($V_a > V_b$), joka pysyy vakiona **virrasta riippumatta**
- ▶ Varauksiin kohdistuu lähteen sisällä
 - ▶ sähköstaattinen voima $\vec{F}_e = q\vec{E}$ ja
 - ▶ \vec{F}_e :lle vastakkainen **ei-sähköstaattinen** (eli ei-konservatiivinen) **voima** \vec{F}_n , joka **ylläpitää potentiaaliero**a napojen välillä (eli tuottaa smv:n \mathcal{E})

Smv virtapiirissä (ideaalinen lähde)



- ▶ Jos positiivinen varaus q siirretään lähteessä $b \rightarrow a$, ei-sähköstaattinen voima \vec{F}_n tekee varaukselle työn $W_n = q\mathcal{E} > 0$ ja sähköstaattinen voima \vec{F}_e lisää varaukseen liittyvää potentiaalienergiaa määrällä qV_{ab}
- ▶ **Ideaalisessa lähteessä** $\vec{F}_n + \vec{F}_e = \vec{0}$ (q :n kineettinen energia ei muutu), joten varaukselle tehdään nollanettotyö: $q\mathcal{E} - qV_{ab} = 0$ eli $V_{ab} = \mathcal{E}$
- ▶ Kytetään smv:n lähteeseen johto (resistanssi R)
- ▶ Napojen välinen jännite synnyttää johtoon sähkökentän ja virran $a \rightarrow b$
 - ▶ Johdossa varaus kokee potentiaalilaskun $V_{ab} = IR$
 - ▶ Lähteessä varaus kokee potentiaalinousun $\mathcal{E} = V_{ab}$

Sisäinen resistanssi (todellinen lähde)

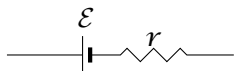
- ▶ Todellisella lähteellä on **sisäinen resistanssi** r , joka pienentää lähteen napajännitettä V_{ab} (ja voimaa F_e)
- ▶ Kun varaus q siirtyy lähteessä $b \rightarrow a$, ansaittu potentiaalienergialisä $qV_{ab} < q\mathcal{E}$, koska F_n :n tekemää työtä kuluu resistanssin voittamiseen
- ▶ Jos r käyttäytyy ohmisesti,

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$$

napajännite

- ▶ Napajännite $V_{ab} = \mathcal{E}$ vain, jos **virtaa ei kulje**
- ▶ Ulkoisen piirin virta (koska yhä $V_{ab} = IR$) on

$$\mathcal{E} - Ir = IR \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$



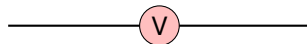
todellinen lähde: smv ja sisäinen resistanssi

- ▶ Sisäisen resistanssin muutos selittää paristojen "tyhjentymisen" käytössä ja akkujen virranantokyvyn heikentymisen pakkasessa.

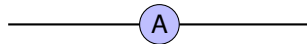
Virran ja jännitteen mittaamisesta

Piireihin (teoriassa tai käytännössä) kytketään usein kahden perustyyppin (ideaalisia tai lähes ideaalisia) mittareita:

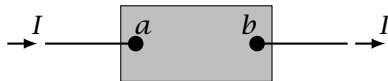
Jännitemittari mittaa **napojensa välisen** jännitteen; mittarin sisäinen resistanssi on **ääretön** (virta ei kulje mittarin läpi); piirrosmerkki:



Virtamittari mittaa **lävitseen kulkevan** virran; mittarin sisäinen resistanssi on **nolla** (mittarin yli ei ole jännitettä); piirrosmerkki:



Teho sähköpiirissä



- ▶ Olkoon piirielementin **yli** potentiaaliero $V_{ab} = V_a - V_b$ ja **läpi** virta I
- ▶ Elementin läpi ajassa dt kulkevalle varaukselle dQ tehdään työ $dW = V_{ab} dQ = V_{ab} I dt$
- ▶ Energiaa siirtyy elementtiin tai elementistä tahdilla, joka saadaan jakamalla työ ajalla; tähän on **teho**

$$P = \frac{dW}{dt} = V_{ab} I$$

$$[P] = \text{VA} = \frac{\text{J}}{\text{C}} \frac{\text{C}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} = \text{watti} = [\text{vatti}]$$

- ▶ Jos $V_{ab} < 0$, piirielementti on **lähde**

- ▶ Vastuksen tapauksessa $P = V_{ab} I = I^2 R = \frac{V_{ab}^2}{R}$ (muuttuu **lämmöksi**)

Lähteen teho

- ▶ Lähteen **antotehoon** vaikuttavat kuormavastus ja sisäinen vastus

$$P = V_{ab}I = (\mathcal{E} - Ir)I = \mathcal{E}I - I^2r$$

- ▶ Lähde kierrättää varauksia sisällään teholla $\mathcal{E}I$
- ▶ Lähteen sisäisessä resistanssissa kuluu teho I^2r
- ▶ Ulkoisen piirin käytettäväksi jää (netto)teho $\mathcal{E}I - I^2r$
- ▶ Jos smv:n lähteeseen (\mathcal{E}) kytketään suurempi smv vastakkaisuuntaisesti, jälkimmäinen lähde syöttää tehoa alkuperäiseen lähteeseen (esim. akun lataaminen): \mathcal{E} -lähteen **ottoteho**

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I + I^2r$$

(mitä $\mathcal{E}I$ tarkoittaa nyt?)

- ▶ **Kielenhuoltoa:**
 - ▶ Pistorasiassa **on** 230 V:n **jännite** (ei virta)
 - ▶ Piirissä **kiertää** virta (virta **ei** "kulu")
 - ▶ Vastuksessa **kuluu** teho, sen **yli on** jännite ja sen **läpi kulkee** virta

Yhteenvedo luvusta 25

Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Virta I ja virrantiheys \vec{J}
- ▶ Ajautumisnopeus \vec{v}_d
- ▶ Resisttiivisyys ρ , resistanssi R ja vastus
- ▶ Virtapiiri
- ▶ Sähkömotorinen voima (smv) \mathcal{E}
- ▶ Sisäinen resistanssi r ja napajännite V_{ab}
- ▶ Energia ja teho P

Tärkeitä kaavoja

Virta ja virrantiheys

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Ohmin laki

$$\rho = \frac{E}{J}, \quad R = \frac{V}{I}$$

Sylinterivastus

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

Napajännite (todellisen lähteen malli)

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$$

Teho $P = V_{ab}I$