

ELEC-C1230 Säättötekniikka / Ratkaisut

Tentti 15. 4. 2021

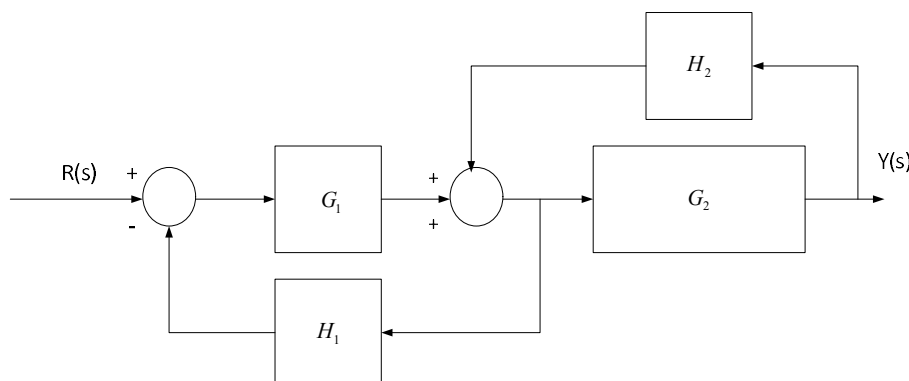
- Etäkoee. Seuraa erillistä jo ennalta julkaistua ohjetta.
- Merkitse vastauspaperiin nimesi ja opintonumerosi lisäksi se, osallistutko välikokeeseen vai tenttiin.
- Kukin tekee kokeen ja palauttaa sen itsenäisesti. Vastaukset joko Vastauspohjaan tai sitten kokonaan itse tehtyyn tiedostoon, josta on ilmevä selvästi vastaajan nimi, opintonumero sekä se, osallistuuko hän välikokeeseen vai tenttiin. Lopuksi tiedosto muutetaan pdf:ksi ja palautetaan.
- Kurssimateriaali on käytettävissä. Matlab/Simulinkia ja laskimia saa käyttää.
- Kurssimateriaalia saa tutkia netissä, mutta mitään muuta tiedon etsintää ei saa tehdä.
- Kokeessa on viisi (5) tehtävää ja kaikkiin pitää vastata.
- HUOM. Ratkaisussa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta voidaan nähdä, miten olet ratkaisuun päätenyt.

HUOM. Kokeen tehtävät on suunniteltu niin, että ne voidaan ratkaista käsin, ja edes taskulaskinta ei välttämättä tarvita. Sitä saa kuitenkin käyttää. Tietokoneen laskentaohjelmia saa samoin käyttää tulosten verifioimiseen jos haluaa. Vastauksissa ei kuitenkaan esitetä tietokoneella saatuja tuloksia, eikä niihin voi vedota. Mitään kokeilemalla saatuja lukuarvoja tms. ei tulla hyväksymään ratkaisuksi.

0. Allekirjoitus, joko käsin tai tietokoneella (vakuutan noudattavani kokeen sääntöjä):

1. Määritä kuvan kytkennästä kokonaisjärjestelmän siirtofunktio $Y(s) / R(s)$ lohkojen siirtofunktioiden $G_1(s)$, $H_1(s)$, $G_2(s)$ ja $H_2(s)$ funktiona.

(6 p)



Ratkaisu: Sovelletaan lohkokaaivioalgebraa. Voidaan menetellä esimerkiksi seuraavasti: Merkitään lohkon G_1 sisääntuloa ε_1 ja lohkon G_2 sisääntuloa ε_2 . Saadaan

$$\varepsilon_1 = R - H_1 \varepsilon_2 \quad (1)$$

$$\varepsilon_2 = H_2 Y + G_1 \varepsilon_1 \quad (2)$$

$$Y = G_2 \varepsilon_2 \quad (3)$$

Sijoittamalla (1) yhtälöön (2) saadaan ε_2 ratkaistua. Sijoittamalla se yhtälöön (3) saadaan

$$Y = G_2 \varepsilon_2 = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1} R + \frac{G_2 H_2}{1 + G_1 H_1} Y$$

josta saadaan lopullinen tulos

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 - G_2 H_2}$$

2. Tutkitaan skalaarijärjestelmää (1-dimensioinen tilamuuttuja)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \quad (a, b \text{ ja } c \text{ ovat nollasta poikkeavia vakioita})$$

Järjestelmälle on laadittava muotoa $u(t) = -Lx(t) + kr(t)$ oleva säätölaki, joka sijoittaa suljetun systeemin navan/navat reaaliakselin pisteeseen -1 ja jonka staattinen vahvistus askelmuutokselle referenssistä r lähtöön y on yksi. Tilaa x ei voida mitata, mutta lähtömuuttuja y on mitattavissa.

Suunnittele säädin ja esitä Simulinkin kaltainen kaavio säätökytkennästä. Huomaa, että ratkaisusi on oltava suoraviivaisesti toteutettavissa esimerkiksi juuri Simulinkillä. Jos esimerkiksi käytät tilatarkkailijaa, sinun on suunniteltava se ja esitettävä se diagrammissa.

(6 p)

Ratkaisu: Kaikki muuttujat ovat skalaareja, joten matriisiyhtälöitä ei tässä ole. Seuraavissa yhtälöissä on aikariippuvuus jätetty merkitykseltä, koska sekaantumisen vaaraa ei ole.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx \end{cases} \quad u = -lx + kr$$

Suljettu systeemi on siis

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - blx + bkr = (a - bl)x + bkr \\ y &= cx \end{aligned}$$

ja sillä on yksi napa, joka saadaan systeemimatriisin ominaisarvona. Asetetaan sen arvoksi -1.

$$\text{eig}(a - bl) = a - bl = -1 \Rightarrow l = \frac{a + 1}{b}$$

Suljetun systeemin siirtofunktio:

$$G_{cl} = c(s - a + bl)^{-1} bk = k \frac{cb}{s - a + bl} = k \frac{cb}{s - a + a + 1} = k \frac{cb}{s + 1}$$

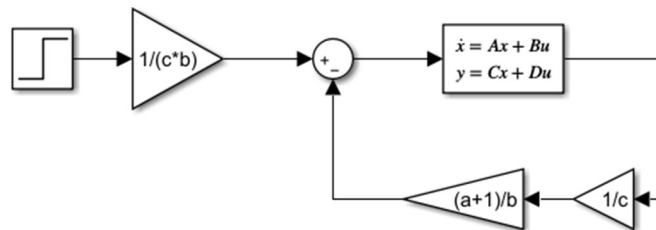
Koska suljettu systeemi on asympotoottisesti stabiili, loppuarvoteoreema pätee, ja staattinen vahvistus askelmuutokselle referenssistä lähtösuureeseen saadaan merkitsemällä $s = 0$.

$$G_{cl}(0) = kcb = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{cb}$$

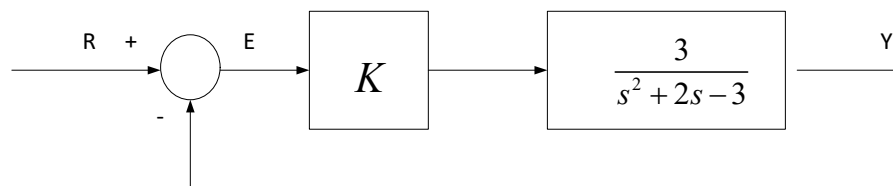
Näin on säädin viritetty. Tilatakaisinkytkentää varten tarvitaan tieto tilasuureesta, joka ei ollut mitattavissa. Mutta lähtösuure y on mitattava, ja koska tässä skalaarisysteemissä $y=cx$, niin täydellinen tarkkailija saadaan yksinkertaisesti

$$x = \frac{1}{c}y$$

(Jos joku on tehnyt teorian mukaisen dynaamisen tilatarkkailijan (dimensio 1), niin kyllä tämä hyväksytään. Se estimoii tilan ainoastaan asympotoottisesti oikein, kun ylläoleva tässä erikoistapauksessa toimiva tarkkailija on eksakti koko ajan.)



3. Prosessia säädetään P-säätäjällä



- Osoita, että prosessi on epästabiili (1 p)
- Osoita, että prosessi voidaan stabiloida P-säätäjällä kuvan mukaisesti. Mikä on pienin K :n arvo, jolla suljettu systeemi on stabiili? (2p)
- Olko K valittu siten, että suljettu systeemi on asympotoottisesti stabiili. Jääkö erosignaaliin E pysyvä poikkeama, kun referenssiin on tullut askelmainen heräte? Jos jää, kuinka suuri se on ja kuinka se riippuu parametrasta K ? (3 p)

Ratkaisu:

- Esimerkiksi 2. asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan laskettua, että prosessin navat ovat 1 ja -3. Koska yksi napa on oikeassa puolitasossa, prosessi on epästabiili.
- Suljetun järjestelmän siirtofunktioksi saadaan

$$G_{cl}(s) = \frac{\frac{3K}{s^2 + 2s - 3}}{1 + \frac{3K}{s^2 + 2s - 3}} = \frac{3K}{s^2 + 2s - 3 + 3K},$$

joten karakteristinen yhtälö on

$$s^2 + 2s + 3(K - 1) = 0$$

Stabiilisuuden tutkimiseksi käytetään Routh-Hurwitz-menettelyä

$$\begin{array}{l} s^2: 1 \quad 3(K-1) \\ s^1: 2 \quad 0 \\ s^0: 3(K-1) \quad 0 \end{array}$$

Suljettu systeemi on (asymptoottisesti) stabiili, kun $K > 1$. Kun $K = 1$, suljetulla systeemillä on yksinkertainen napa origossa. Systeemi on tällöin (marginaalisesti) stabiili, perusmääritelmän mukaan stabiili. Sekä $K > 1$ että $K \geq 1$ kelpaavat tässä vastauksessa.

c. Yksi tapa on muodostaa siirtofunktio referenssisignaalista erosuureeseen:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{3K}{s^2 + 2s - 3}} R(s) = \frac{s^2 + 2s - 3}{s^2 + 2s + 3(K - 1)} R(s)$$

K olkoon valittu niin, että suljettu systeemi on asymptoottisesti stabiili. Referenssiin tulee a :n korkuinen askelheräte. Loppuarvoteoreemaa käyttämällä saadaan

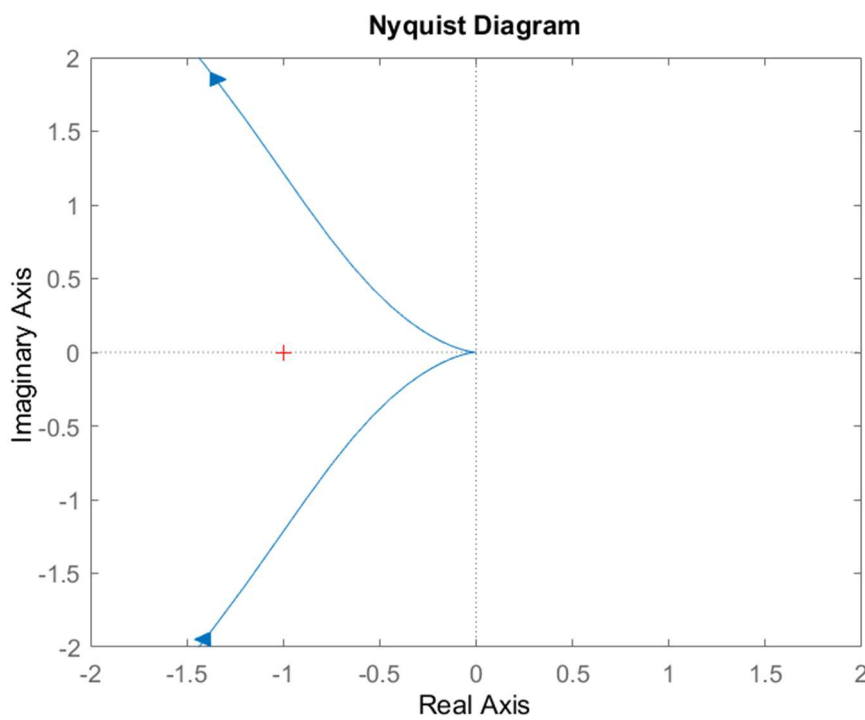
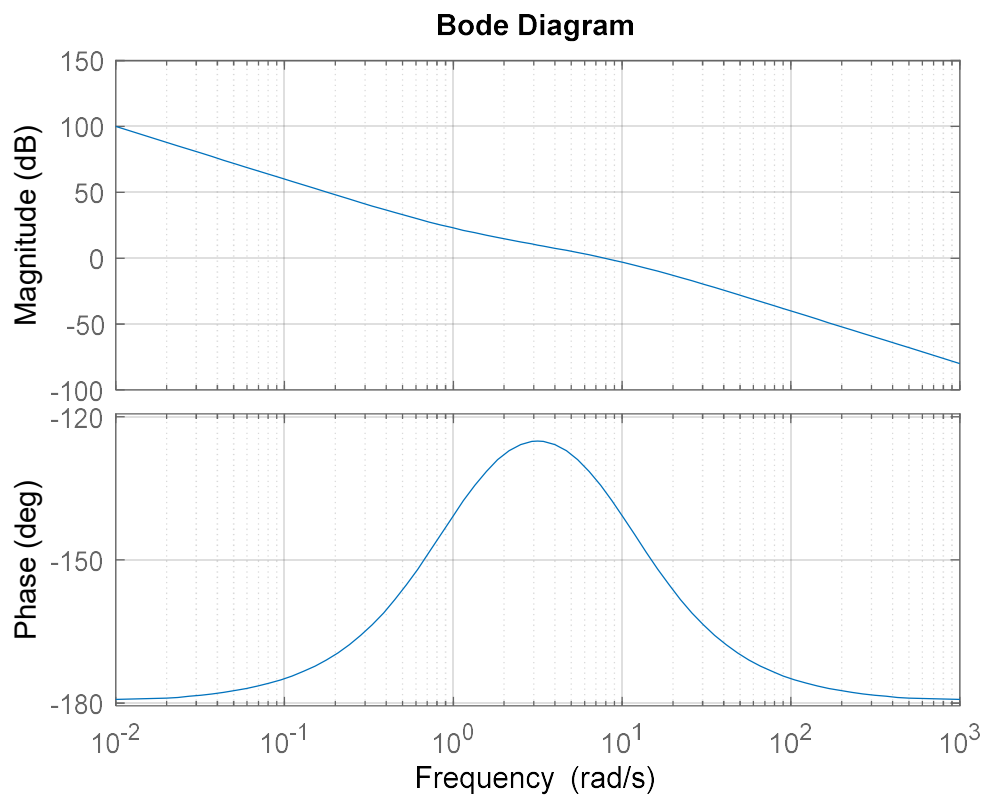
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{-3a}{3(K - 1)} = \frac{a}{1 - K}$$

Systeemiin jää pysyvä poikkeama, joka riippuu askeleen korkeudesta ja K :n arvosta edellisen kaavan mukaan. K on kuitenkin valittava siten, että suljettu systeemi on asymptoottisesti stabiili.

4. Säädetyin järjestelmän luopinsiirtofunktiolle (avoimen järjestelmän siirtofunktiolle)

$$L(s) = \frac{K(s + a)}{s^2(s + b)}, \quad K > 0, a > 0, b > 0$$

on piirretty taajuusvaste (Boden diagrammi ja Nyquistin diagrammi, kuvissa alla)



- a. Kirjoita luopinsiirtofunktion lausekkeen perusteella Boden vahvistuskäyrän ja vaihekyrän lausekkeet kulmataajuuden funktioina. Vahvistus ilmaistaan desibeleinä. (2 p)

- b. Määritä erikseen kummankin kuvan perusteella (likimääräisesti niin tarkkaan kuin se kuvista on mahdollista) suljetun systeemin vahvistus- ja vaihevara. Huom. Saatujen lukuarvojen tarkkuus ei ole ratkaisevaa, mutta vastauksesta on selvästi ilmevä kummankin diagrammin osalta, miten olet määrittänyt. (2 p)
- c. Miten vahvistuksen K lisääminen vaikuttaa b-kohdan tuloksiin. Perusta vastauksesi diagrammeihin ja jälleen selitä tarkasti tuloksesi ja niiden perustelut. (2 p)

Ratkaisu: Luupinsiirtofunktio oli itse asiassa

$$L(s) = \frac{100(s+1)}{s^2(s+10)}$$

vaikka lukuarvoja ei tehtävässä annettuakaan.

- a. Luupinsiirtofunktion taajuusvaste on

$$L(j\omega) = \frac{K(j\omega + a)}{(j\omega)^2(j\omega + b)}$$

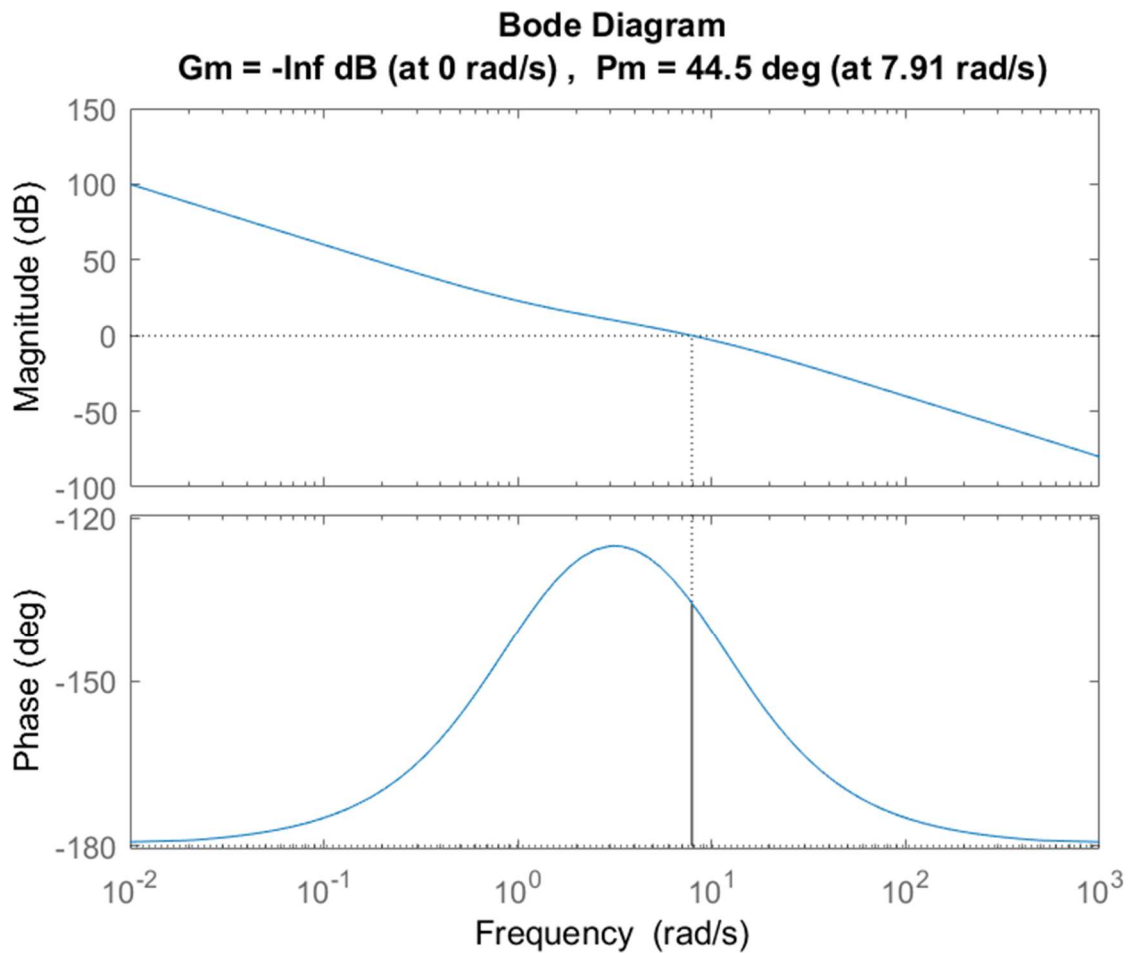
Vahvistus ja vaihe: $|L(j\omega)| = \frac{K\sqrt{a^2 + \omega^2}}{\omega^2\sqrt{b^2 + \omega^2}}$, $\angle L(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{b}\right) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$

Merkitään \lg tarkoittamaan 10-kantaista logaritmia.

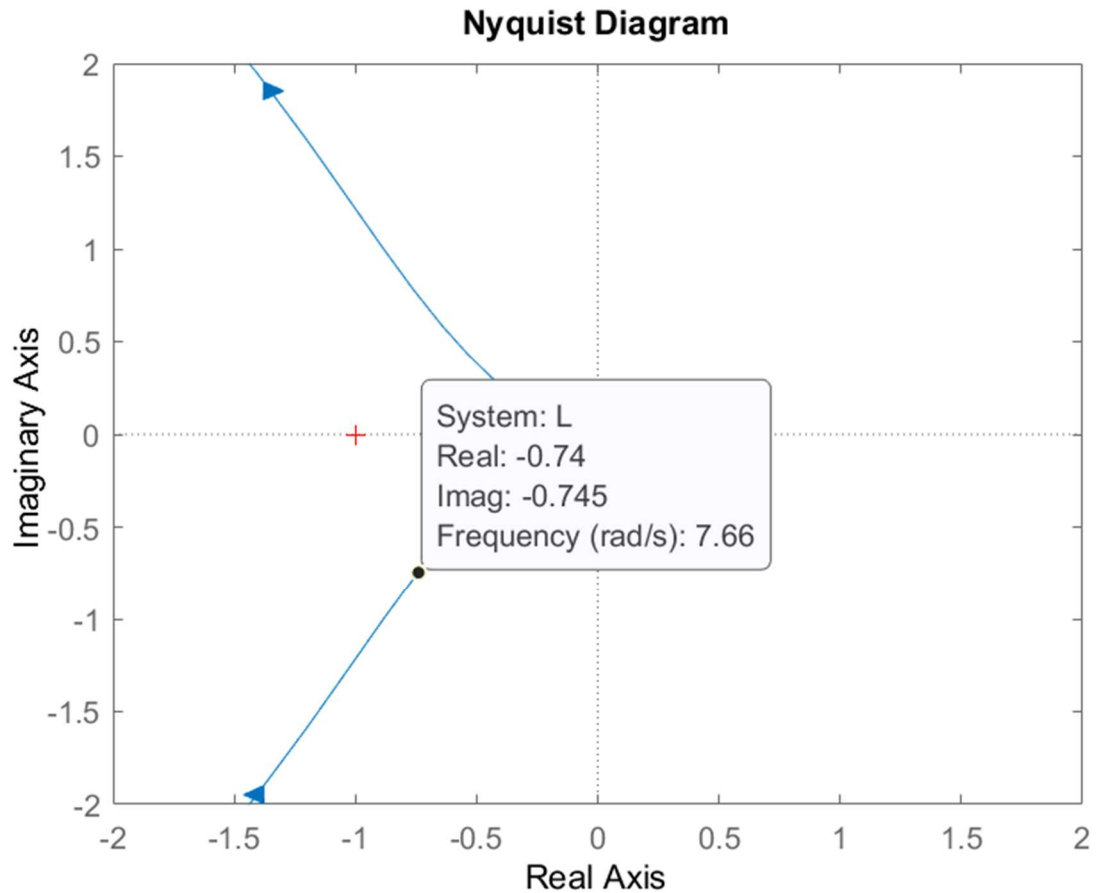
$$\begin{aligned} 20\lg|L(j\omega)| &= 20\lg(K) + 20\lg(a^2 + \omega^2)^{1/2} - 20\lg(b^2 + \omega^2)^{1/2} - 20\lg\omega^2 \quad (\text{dB}) \\ &= 20\lg(K) + 10\lg(a^2 + \omega^2) - 10\lg(b^2 + \omega^2) - 40\lg(\omega) \end{aligned}$$

$$\angle L(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{b}\right) - \pi$$

- b. Vahvistuksen ylimenotaajuus on noin 7,9 rad/s ja kuvasta katsottu vaihevara noin 45 astetta. Tälläkään tarkkuudella niitä voi olla vaikea pelkästä kuvasta identifioida, joten **oikeansuuntainen vaihevara riittää, kunhan sen määrittäminen kuvasta on oikein selitetty.**



Nyquistin diagrammista on etsittävä piste, jonka etäisyys origosta on 1 ja sitten katsottava, kuinka suuri on tämän janan ja negatiivisen reaaliakselin välinen kulma. Tämä piste on vielä vaikeampi katsoa kuvasta kuin Bode diagrammin tapaus. Kuvassa on aika lähellä oleva esimerkki, josta myös nähdään, että vaihevara on aika lähellä 45 astetta. Huom. Tietysti Bode diagrammin perusteella saatu vastaus auttaa tässä. Jälleen on kuitenkin oleellista, että **periaate on oikein selitetty**.



- c. Vahvistuksen K kasvattaminen ei vaikuta vaihekäyrään. Vahvistuskäyrä siirtyy ”ylemmäs”, jolloin 0dB ylitystaajuus kasvaa. Kyseisellä kulmataajuudella vaihe on ehtinyt pudota eli vaihevara pienenee. Nyquistin diagrammissa taajuusvasteen haarat ”kasvavat” K :n kasvaessa lähemmäs reaaliakselia, mutta eivät millään K :n äärellisellä arvolla sitä leikkaa (huom. vaihekäyrä). Vaihevara pienenee.

5. Tarkastellaan PID-säädintä, jonka perusversio (”oppikirjaversio”) on

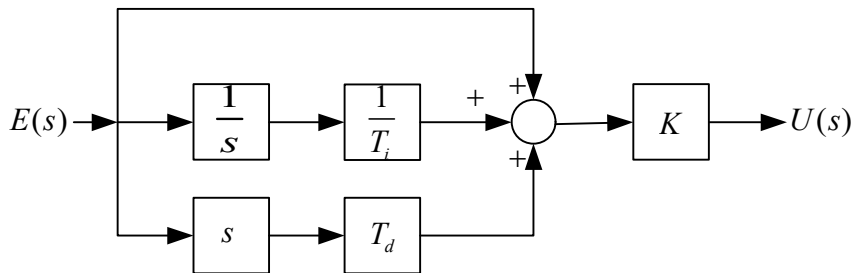
$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{-\infty}^t e(s) ds + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Symbolit vastaavat kurssilla käytettyjä merkintöjä.

- a. Esitä säätäjä Laplace-tasossa ja piirrä Simulinkin kaltainen diagrammi säätimestä. (2 p)
- b. Minkälaisia modifikaatioita derivointitermissä yleensä käytetään? Miksi? (2 p)
- c. Diskretoi säädin (oppikirjaversio) haluamallasi menetelmällä ja esitä diskreetin säätimen pulssinsiirtofunktio. (2 p)

Ratkaisu:

a.
$$U(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s)$$



b. Puhdasta derivointia pyritään välttämään, koska se vahvistaa häiriöitä ikävästi. Tyypillisesti tämä tehdään lisäämällä derivointiosaan pehmentävä lag-termi, jolloin derivointitermi muuntuu muotoon

$$\frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} E(s)$$

Haittana on, että tähän sisältyy uusi viritettävä termi N . Tyypillisesti sille annetaan kirjallisuudessa arvoja 3-8. Tämän lisäksi ajatellaan usein, että ei haluta derivoida referenssin muutoksia, jotka usein ovat askelmaisia. Ajatellaan siis, että derivoinnin kannalta referenssiä pidetään vakiona. $de/dt = dr/dt - dy/dt \approx -dy/dt$. Derivointitermiksi tulee silloin

$$-\frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} Y(s)$$

c. Helpoimmalla pääsee laskemisen kannalta, jos käyttää ”backward differences (BD)”-approksimaatiota

$$s = \frac{z-1}{h}, \text{ jossa } h \text{ on säätöväli.}$$

Sijoittamalla tämä PID-säätimen lausekkeeseen saadaan

$$U(z) = K \left(1 + \frac{1}{T_i \frac{z-1}{h}} + T_d \frac{z-1}{h} \right) E(z) = \dots = K \frac{(T_d/h)z^2 + (1 - 2T_d/h)z + T_d/h + h/T_i - 1}{z-1} E(z)$$

jossa $U(z)/E(z)$ on pyydetty pulssinsiirtofunktio.

Ei vaadita: Huomaa, että saatu pulssinsiirtofunktio on *ei-kausaalinen*, eli se vaatisi toteutuksessa kullakin ajan hetkellä tietoa tulevaisuudesta. Tämä johtuu ideaalisen derivointitermin käytöstä. Jatkuva-aikaisissa analogisissa säätimissä ideaalinenkin derivointi voidaan mekaanisesti toteuttaa, mutta diskreetissä tietokonejärjestelmässä ei. Ongelmasta

päästään, kun käytetään b-kohdassa mainittua pehmenettyä derivointitermiä. Tällöin puhutaan usein *käytännöllisestä PID-säätäjästä*.