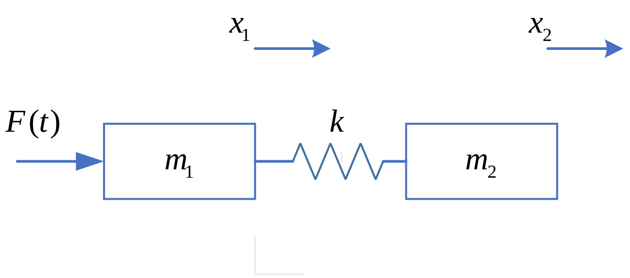
ELEC-C1230 Säätötekniikka

Välikoe 1. 25.2.2021 / Ratkaisut

- *Etäkoe. Seuraa erillistä jo ennalta julkaistua ohjetta.*
- *Kukin tekee kokeen ja palauttaa sen itsenäisesti. Vastaukset Vastauspohjaan, joka on ennalta julkaistu. Lopuksi tiedosto muutetaan pdf:ksi (Sukunimi_Vastauspohja.pdf) ja palautetaan.*
- *Kurssimateriaali on käytettävissä. Matlab/Simulinkia ja laskimia saa käyttää.*
- *Kurssimateriaalia saa tutkia netissä, mutta mitään muuta tiedon etsintää ei saa tehdä.*
- *Kokeessa on neljä (4) tehtävää ja kaikkiin pitää vastata.*
- *HUOM. Ratkaisuissa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta voidaan nähdä, miten olet ratkaisuun päätynyt.*

HUOM. Kokeen tehtävät on suunniteltu niin, että ne voidaan ratkaista käsin, ja itse asiassa edes taskulaskinta ei tarvita. Sitä saa kuitenkin käyttää. Tietokoneen laskentaohjelmia saa samoin käyttää tulosten verifioimiseen jos haluaa. Vastauksissa ei kuitenkaan esitetä tietokoneella saatuja tuloksia, eikä niihin voi vedota. Mitään kokeilemalla saatuja lukuarvoja tms. ei tulla hyväksymään ratkaisuksi.

1. Tutkitaan kuvassa esitettyä kahden massan ja jousen muodostamaa järjestelmää. Massojen ajatellaan olevan vaakasuoralla alustalla, jossa ne liikkuvat kitkatta. Kohdistuva ulkoinen voima on $F(t)$.



Systeemiä kuvaavat dynamiikkayhtälöt ovat

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) = F(t) - k\left[x_1(t) - x_2(t)\right] \\ m_2\ddot{x}_2(t) = -k\left[x_2(t) - x_1(t)\right] \end{cases}$$

Olkoon $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$ ja $k = 1\,N/m$. Systeemi on aluksi lepotilassa.

a. Laske siirtofunktiot $X_2(s)/F(s)$ ja $X_1(s)/F(s)$ (4p)

b. Piirrä siirtofunktioita kuvaavat nolla-napakuviot. Laskematta vastetta tarkasti vastaa: pysyykö järjestelmän yksikköimpulssivaste (voimasta F lähtöön x_2) rajoitettuna, kun aika lähestyy ääretöntä? (2p)

Ratkaisu:

a. Asetetaan annetut parametriarvot yhtälöihin ja Laplace-muunnetaan, alkuarvot nollia

$$\begin{cases} s^2 X_1(s) = F(s) - X_1(s) + X_2(s) \\ s^2 X_2(s) = X_1(s) - X_2(s) \end{cases}$$

Ratkaisemalla jälkimmäisestä yhtälöstä $X_2(s)$ ja sijoittamalla se ensimmäiseen saadaan

$$\left(s^2+1\right) X_2(s) = X_1(s) \Rightarrow X_2(s) = \frac{1}{s^2+1} X_1(s)$$

$$s^2 X_1(s) = F(s) - X_1(s) + \frac{1}{s^2+1} X_1(s)$$

Jälkimmäinen yhtälö saadaan nyt ratkaistua

$$\left[s^2 - \frac{1}{s^2+1} + 1\right] X_1(s) = F(s)$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow X_1(s) = \frac{s^2+1}{s^2\left(s^2+2\right)} F(s)$$

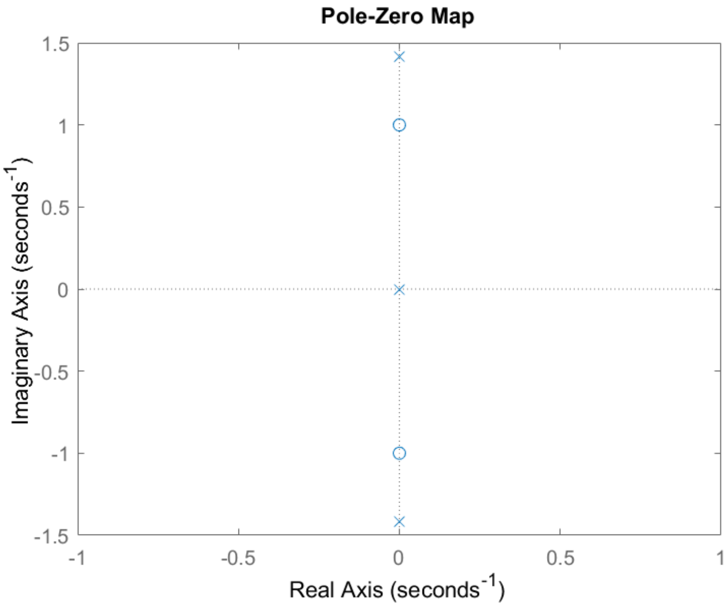
josta saadaan sijoittamalla ensimmäiseen yhtälöön

$$X_2(s) = \frac{1}{s^2\left(s^2+2\right)} F(s)$$

Kysytyt siirtofunktiot ovat siis

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+2)}, \quad \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2(s^2+2)}$$

b. Kuvassa on siirtofunktion $X_1(s)$ / $F(s)$ nolla-napakuvio. Siirtofunktiolla on kaksi nollaa imaginääriakselilla kohdissa $\pm i$, kaksoisnapa kohdassa s = 0 sekä kaksi napaa imaginääriakselilla kohdissa $\pm i\sqrt{2}$. Siirtofunktiolla $X_2(s)$ / $F(s)$ ei ole nollia; navat ovat samat kuin edellisessä tapauksessa.



Kun termiin $F(t)$ kohdistuu yksikköimpulssi, niin vaste $x_2(t)$ on lausekkeen

$X_2(s) = \dfrac{1}{s^2\left(s^2+2\right)}$ Laplace-käänteismuunnos. Osamurtokehitelmä on muotoa

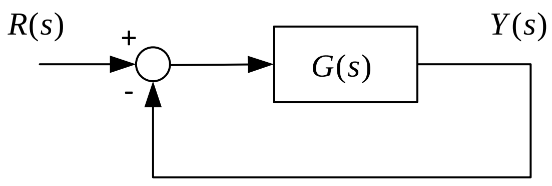
$\dfrac{A}{s^2} + \text{termejä}(s)$, jossa A on jokin vakio. Pelkästään $L^{-1}(A/s^2) = At$ näyttää, että vaste kasvaa ajan funktiona kohden ääretöntä.

Ei vaadittu: Tarkkaan ottaen $X_2(s) = \dfrac{1}{s^2\left(s^2+2\right)} = \dfrac{1/2}{s^2} - \dfrac{1/2}{s^2+2} \Rightarrow x_2(t) = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)$.

Myöskin voitaisiin todeta, että systeemillä on kaksoisnapa origossa. Systeemi ei siis ole edes marginaalisesti stabiili (kaksoisnapa imaginääriakselilla). Tämä vastaa tilannetta, jossa olisi yksi napa origossa ja systeemiin kohdistuisi yksikköaskel. Tämä ei olisi BIBO-stabiili ja vaste menisi äärettömiin.

2. Kuvassa esitetyssä negatiivisesti takaisinkytketyssä järjestelmässä siirtofunktio

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$



a. Laske suljetun systeemin siirtofunktio. (2p)
b. Määritä tulo- ja lähtösuureiden ($r(t)$ ja $y(t)$) välinen differentiaaliyhtälö. (2p)
c. Muodosta suljettua systeemiä kuvaava tilaesitys, josta tilaesityksen matriisit A, B, C ja D ilmenevät. (2p)

Ratkaisu:

a. $$G_{KOK}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\dfrac{10}{s^2+2s+10}}{1+\dfrac{10}{s^2+2s+10}} = \frac{10}{s^2+2s+20}$$

b. $$Y(s) = G_{KOK}R(s) = \frac{10}{s^2+2s+20}R(s) \Rightarrow \ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+20y(t)=10r(t)$$

c. Kyseessä on 2. kertaluvun systeemi, eli valitaan kaksi tilamuuttujaa. Kokeillaan standardivalintaa

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = \dot{y}(t)$$

josta saadaan suoraan

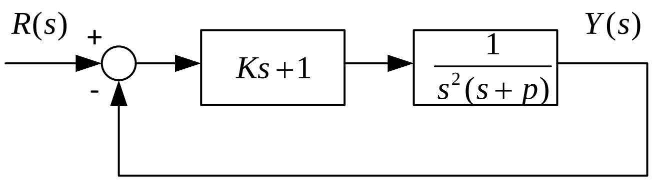
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -20x_1(t) - 2x_2(t) + 10r(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Kirjoitetaan vielä lineaarisen tilaesityksen standardimuodossa

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = Cx(t)+Du(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 0\cdot u(t) \end{cases}$$

jossa siis $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ja $u(t) = r(t)$.

3. Tarkastellaan kuvassa esitettyä systeemiä, jossa parametrit K ja p ovat vakioita.



Millä parametrien reaalisilla arvoilla suljettu systeemi on asymptoottisesti stabiili? Ohje: Tutki erikseen tapaukset $p > 0$, $p < 0$ ja $p = 0$. (2+2+2 p)

Ratkaisu: Suljettu systeemi on asymptoottisesti stabiili silloin, kun sillä ei ole yhtään nollakohtaa oikeassa puolitasossa. Suljetun systeemin siirtofunktioksi saadaan

$$G_{KOK}(s) = \frac{(Ks+1)\left(\frac{1}{s^2(s+p)}\right)}{1+(Ks+1)\left(\frac{1}{s^2(s+p)}\right)} = \frac{Ks+1}{s^2(s+p)+Ks+1} = \frac{Ks+1}{s^3+ps^2+Ks+1}$$

Karakteristinen yhtälö on siis $s^3+ps^2+Ks+1=0$. Käytetään Routh-Hurwitz-menettelyä. Routhin kaavio:

s^3	1	K	0
s^2	p	1	0
s^1	$\frac{pK-1}{p}$	0	0
s^0	1	0	0

Jotta oikeassa puolitasossa (imaginääriakselia ei lasketa siihen) ei olisi yhtään nollaa, ei ensimmäisessä pystyrivissä saa olla yhtään merkinvaihtoa.

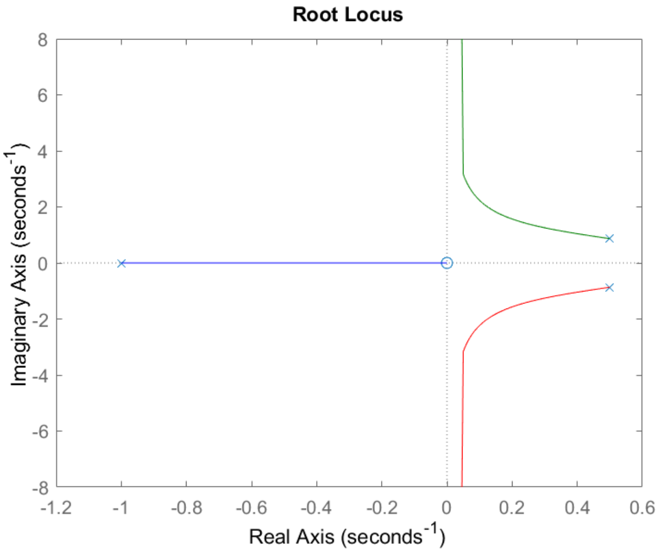
Kuten tehtävässä sanottiin, on helpompi tutkia vaiheittain p:n etumerkin mukaan.

1. $p > 0$. Nyt pitää olla $\frac{pK-1}{p} = K - \frac{1}{p} > 0 \Rightarrow K > \frac{1}{p}$. Entä jos $K = 1/p$. Tällöin kaavion kolmas rivi on nollarivi, jolloin teorian mukaan alkuperäinen polynomi (karakteristinen polynomi) on jaollinen polynomilla ps^2+1. Todella: $s^3+ps^2+(1/p)s+1=(ps^2+1)((1/p)s+1)$. Tällä on nollakohtapari imaginääriakselilla, mikä jo riittää takaamaan, että systeemi ei ole asymptoottisesti stabiili. Kolmas juuri on negatiivisella reaaliakselilla.
2. $p < 0$. Nyt tulee merkinvaihto jo toisella rivillä. Ei ole asymptoottisesti stabiili, sillä oikeassa puolitasossa on ainakin yksi nollakohta.
3. $p = 0$. Nyt tulee toiselle riville 0, mutta koko rivi ei ole 0. Teorian mukaan sijoitetaan nollan paikalla pieni positiivinen luku $\varepsilon > 0$ ja tutkitaan tilannetta.Merkinvaihtoja ei saa tapahtua, joten
$$\frac{\varepsilon K-1}{\varepsilon} = K - \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow K > \frac{1}{\varepsilon}$$
Mutta kun ε lähenee nollaa, mutta pysyy koko ajan positiivisena, niin K :n pitää kasvaa ja kasvaa kohden ääretöntä. Toisin sanoen: Valitaanpa K miten suureksi tahansa, niin aina löytyy positiivinen ε siten, että ylläoleva ehto ei toteudu. Siis ei voida valita K:ta siten, että polynomilla ei olisi nollakohtaa oikeassa puolitasossa.

Ei vaadita, koska juuriuraa ei ole vielä opetettu: Tilannetta $p = 0$ voidaan vielä selventää. Karakteristinen yhtälö

$$s^3+Ks+1=0$$

voidaan kirjoittaa muodossa $1+K\frac{s}{s^3+1}=0$. *Juuriura* kertoo miten juuret käyttäytyvät, kun K menee nollasta äärettömään. Matlabissa komento *rlocus*, ja parametriksi annetaan K:n kertoimena oleva siirtofunktio. rlocus(tf([1 0],[1 0 0 1]);



Kolme juurta kompleksitasossa, jotka K:n kasvaessa menevät kuvassa x:stä o:hon. Yksi juuri on negatiivisella reaaliakselilla ja lähestyy origoa. Kaksi muuta ovat oikeassa puolitasossa (kompleksikonjugaatteja) ja pysyvät siellä.

Vastaus tehtävään: $p > 0$ ja $K > 1/p$.

4. Tarkastellaan seuraavaa säädintä

$$u(t)=K\left(e(t)+\frac{1}{T_I}\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau+T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

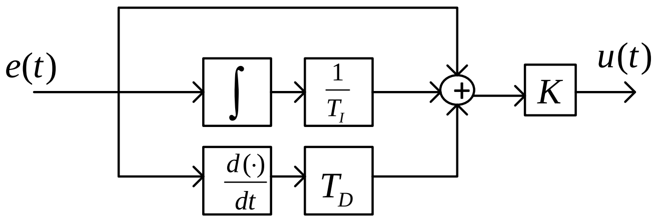
Symbolit vastaavat kurssilla käytettyjä merkintöjä.

a. Minkäniminen säätäjä on kyseessä? Nimeä ja esittele viritysparametrit. (2 p)
b. Esitä säätäjä Laplace-tasossa ja piirrä Simulinkin kaltainen diagrammi säätimestä. (2 p)
c. Tarkastellaan integraalin määrittämää termiä säätimessä. Näytä matemaattisesti, että tämän termin osalta säätimen ohjaus muuttuu aina, kun erosuure on nollasta poikkeava. (2 p)

Ratkaisu:

a. PID-säätäjä. Vahvistus K, integrointiaika T_I ja derivointiaika T_D.

b. $U(s)=K(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s)E(s)$.



c. Integraaliosan vaikutus ohjaussuureeseen

$u_I(t) = \frac{K}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau$. Sen derivaatta on $\dot{u}_I(t) = \frac{K}{T_I}e(t)$, joka on nollasta poikkeava aina, kun erosuure e on nollasta poikkeava. Siis ohjaus muuttuu. Kun erosuure on nolla, ohjaustermi jää vakioksi (ei siis mene nollaan).