ELEC-C1230 Säätötekniikka / Ratkaisut

Välikoe 2. 15. 4. 2021

- *Etäkoe. Seuraa erillistä jo ennalta julkaistua ohjetta.*
- *Merkitse vastauspaperiin nimesi ja opintonumerosi lisäksi se, osallistutko välikokeeseen vai tenttiin.*
- *Kukin tekee kokeen ja palauttaa sen itsenäisesti. Vastaukset joko Vastauspohjaan tai sitten kokonaan itse tehtyyn tiedostoon, josta on ilmettävä selvästi vastaajan nimi, opintonumero sekä se, osallistuuko hän välikokeeseen vai tenttiin. Lopuksi tiedosto muutetaan pdf:ksi ja palautetaan.*
- *Kurssimateriaali on käytettävissä. Matlab/Simulinkia ja laskimia saa käyttää.*
- *Kurssimateriaalia saa tutkia netissä, mutta mitään muuta tiedon etsintää ei saa tehdä.*
- *Kokeessa on neljä (4) tehtävää ja kaikkiin pitää vastata.*
- *HUOM. Ratkaisuissa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta voidaan nähdä, miten olet ratkaisuun päätynyt.*

HUOM. Kokeen tehtävät on suunniteltu niin, että ne voidaan ratkaista käsin, ja edes taskulaskinta ei välttämättä tarvita. Sitä saa kuitenkin käyttää. Tietokoneen laskentaohjelmia saa samoin käyttää tulosten verifioimiseen jos haluaa. Vastauksissa ei kuitenkaan esitetä tietokoneella saatuja tuloksia, eikä niihin voi vedota. Mitään kokeilemalla saatuja lukuarvoja tms. ei tulla hyväksymään ratkaisuksi.

0. Allekirjoitus, joko käsin tai tietokoneella (vakuutan noudattavani kokeen sääntöjä):

1. Tutkitaan järjestelmää

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x(t)$$

jossa a_1, a_2, b, c_1 *ja* c_2 ovat nollasta poikkeavia reaalisia vakioita.

a. Tutki, onko systeemi saavutettava? (2p)

b. Tutki, onko systeemi tarkkailtava? (2p)

c. Suunnittele muotoa $u(t) = -Lx(t)$ oleva säätölaki siten, että suljetun systeemin kaikki navat ovat reaaliakselin pisteessä -1. Referenssisuure on nolla ja tilojen oletetaan olevan mitattavissa. (2p)

Ratkaisu:

a. Ohjattavuusmatriisi: $C_c = \begin{bmatrix} B & \vdots & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_2 b \\ b & a_1 b \end{bmatrix}$; det $(C_c) = -a_2 b^2 \neq 0$

On saavutettava.

b. Tarkkailtavuusmatriisi:

$$C_o = \begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 a_1 & c_1 a_2 + c_2 a_1 \end{bmatrix}; \quad \det(C_o) = c_1^2 a_2 + c_1 c_2 a_1 - c_1 c_2 a_1 = c_1^2 a_2 \neq 0$$

On tarkkailtava.

c. $\dot{x} = Ax + Bu,\, u = -Lx \Rightarrow \dot{x} = (A - BL)x$. Karakteristinen polynomi:

$$\det(sI - A + BL) = \det\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}\right\} = \det\begin{bmatrix} s - a_1 & -a_2 \\ bl_1 & s - a_1 + bl_2 \end{bmatrix}$$

$$= \ldots = s^2 + (-2a_1 + bl_2)s + a_1^2 - a_1 bl_2 + a_2 bl_1$$

ja sen pitää olla $(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$. Merkitsemällä kertoimet yhtä suuriksi saadaan helposti

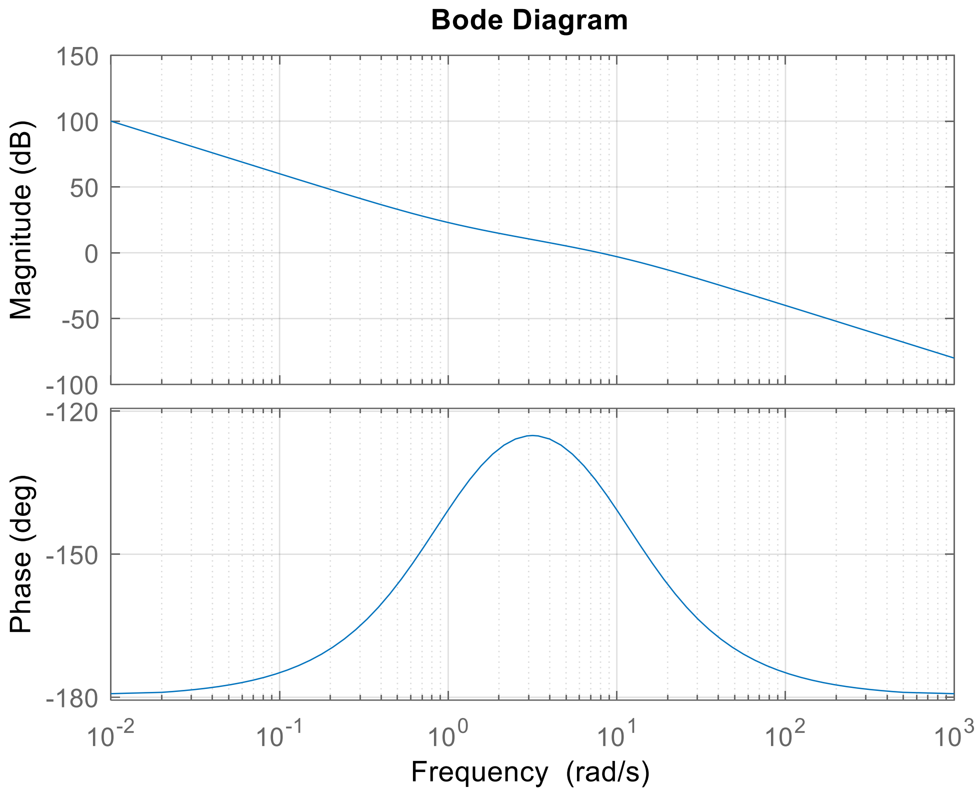
$$l_1 = \frac{(a_1+1)^2}{a_2 b}, \quad l_2 = \frac{2(a_1+1)}{b}$$

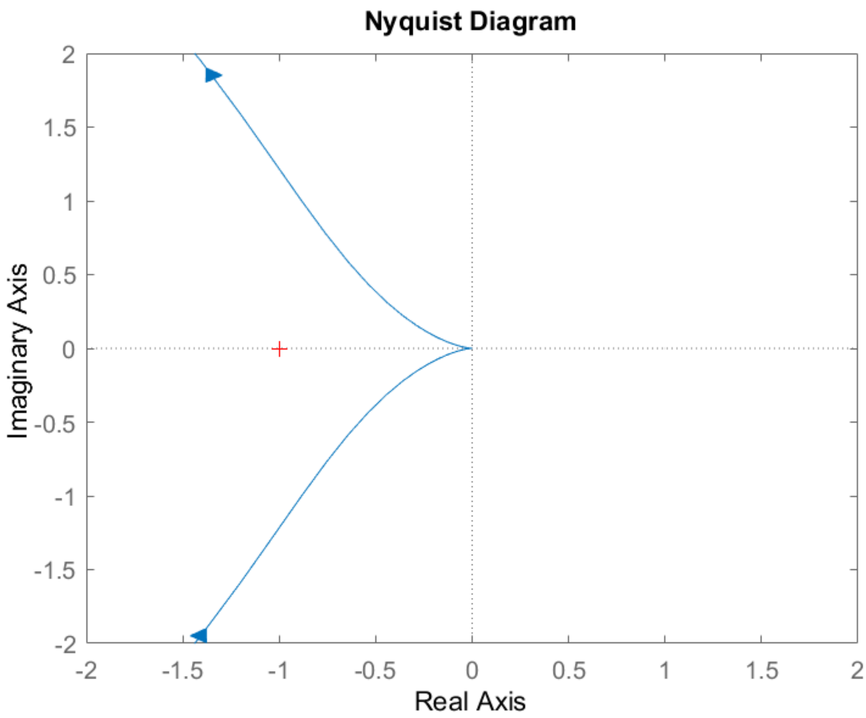
$$u = -Lx = -\begin{bmatrix} l_1 & \vdots & l_2 \end{bmatrix} x.$$

2. Säädetyn järjestelmän luupinsiirtofunktiolle (avoimen järjestelmän siirtofunktiolle)

$$L(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+b)}, \quad K > 0, a > 0, b > 0$$

on piirretty taajuusvaste Boden diagrammina ja Nyquistin diagrammina, kuvissa alla





a. Kirjoita luupinsiirtofunktion lausekkeen perusteella Boden vahvistuskäyrän ja vaihekäyrän lausekkeet kulmataajuuden funktioina. Vahvistus ilmaistaan desibeleinä. (2 p)

b. Määritä erikseen kummankin kuvan perusteella (likimääräisesti niin tarkkaan kuin se kuvista on mahdollista) suljetun systeemin vahvistus- ja vaihevara. Huom. Saatujen lukuarvojen tarkkuus ei ole ratkaisevaa, mutta vastauksesta on selvästi ilmettävä kummankin diagrammin osalta, miten olet määrityksen tehnyt. (2 p)

c. Miten vahvistuksen K lisääminen vaikuttaa b-kohdan tuloksiin. Perusta vastauksesi diagrammeihin ja jälleen selitä tarkasti tuloksesi ja niiden perustelut. (2 p)

Ratkaisu: Luupinsiirtofunktio oli itse asiassa

$$L(s)=\frac{100(s+1)}{s^2(s+10)}$$

vaikka lukuarvoja ei tehtävässä annettukaan.

a. Luupinsiirtofunktion taajuusvaste on

$$L(j\omega)=\frac{K(j\omega+a)}{(j\omega)^2(j\omega+b)}$$

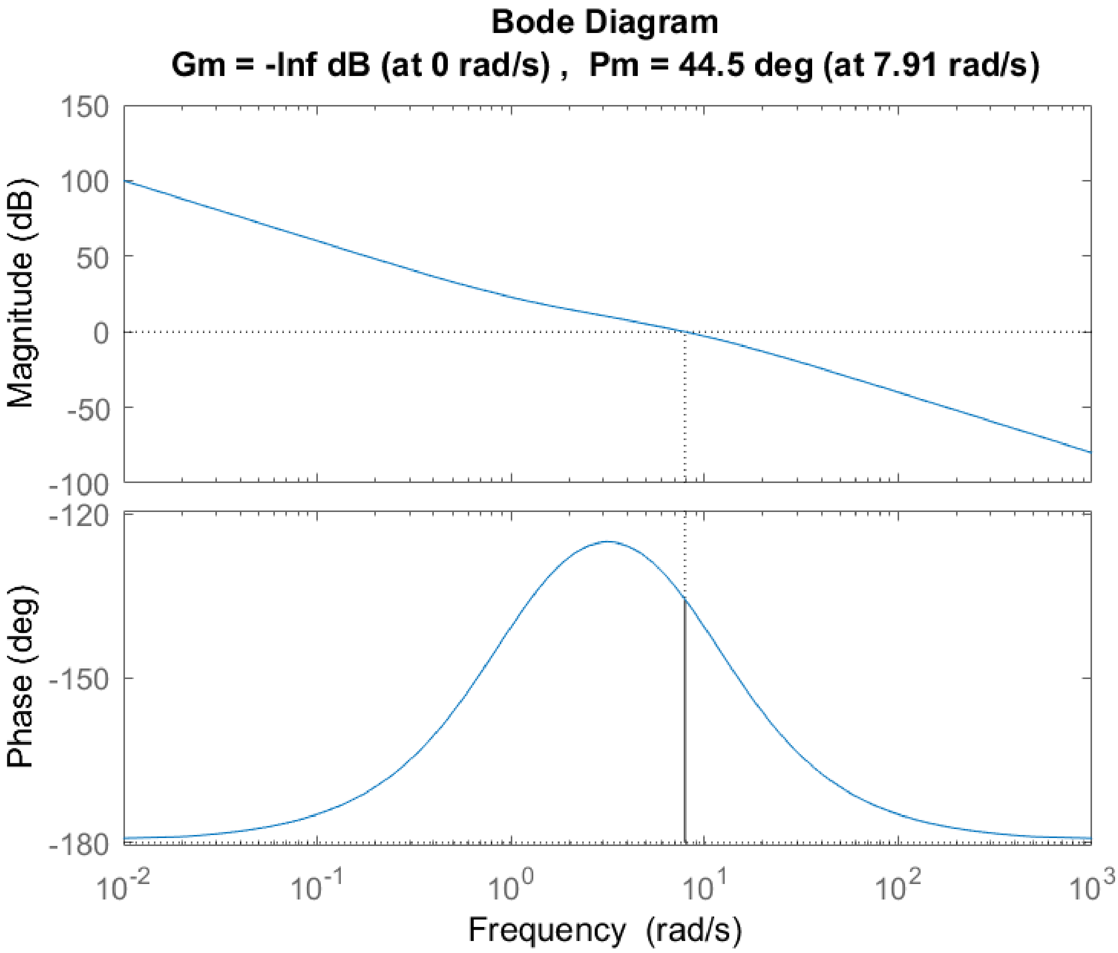
Vahvistus ja vaihe: $|L(j\omega)|=\dfrac{K\sqrt{a^2+\omega^2}}{\omega^2\sqrt{b^2+\omega^2}}$, $\angle L(j\omega)=\arctan(\dfrac{\omega}{a})-\arctan(\dfrac{\omega}{b})-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}$

Merkitään lg tarkoittamaan 10-kantaista logaritmia.

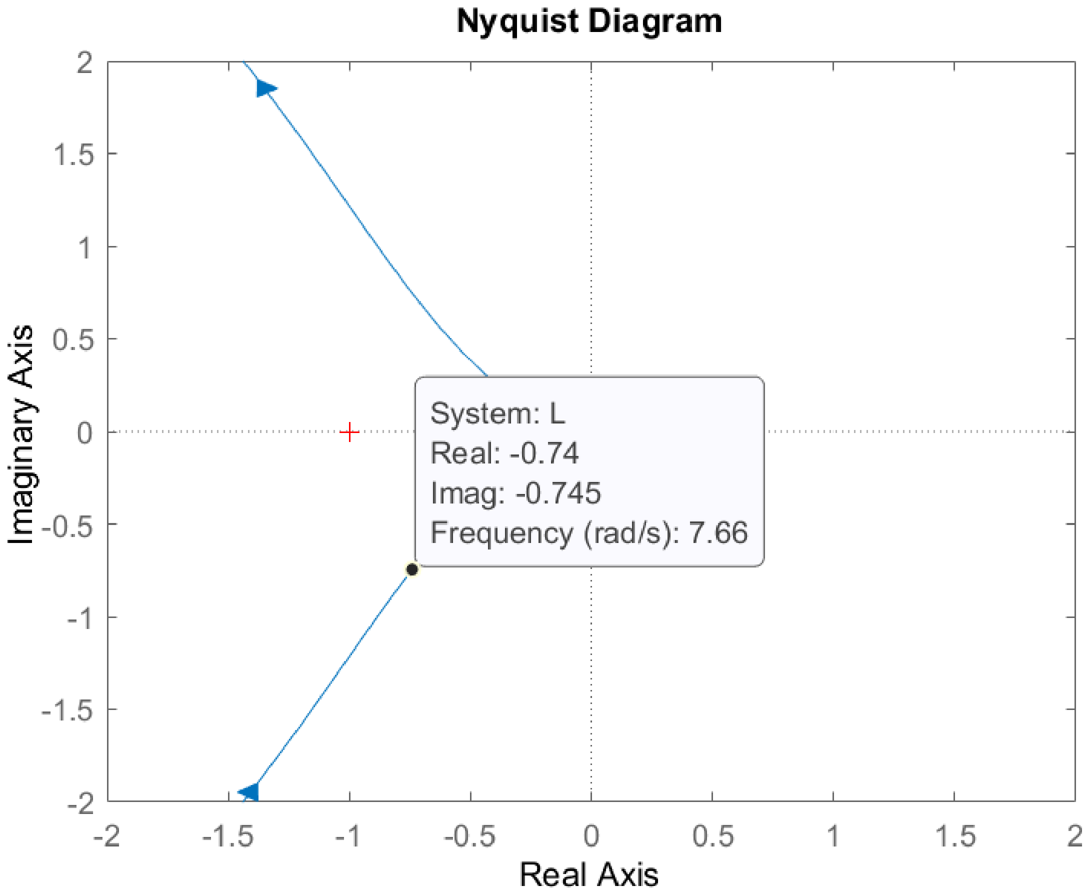
$$\begin{aligned}20\lg|L(j\omega)| &= 20\lg(K)+20\lg\left(a^2+\omega^2\right)^{1/2}-20\lg\left(b^2+\omega^2\right)^{1/2}-20\lg\omega^2 \quad \text{(dB)}\\ &= 20\lg(K)+10\lg(a^2+\omega^2)-10\lg(b^2+\omega^2)-40\lg(\omega)\end{aligned}$$

$$\angle L(j\omega)=\arctan(\frac{\omega}{a})-\arctan(\frac{\omega}{b})-\pi$$

b. Vahvistuksen ylimenotaajuus on noin 7,9 rad/s ja kuvasta katsottu vaihevara noin 45 astetta. Tälläkään tarkkuudella niitä voi olla vaikea pelkästä kuvasta identifioida, joten **oikeansuuntainen vaihevara riittää, kunhan sen määrittäminen kuvasta on oikein selitetty.**

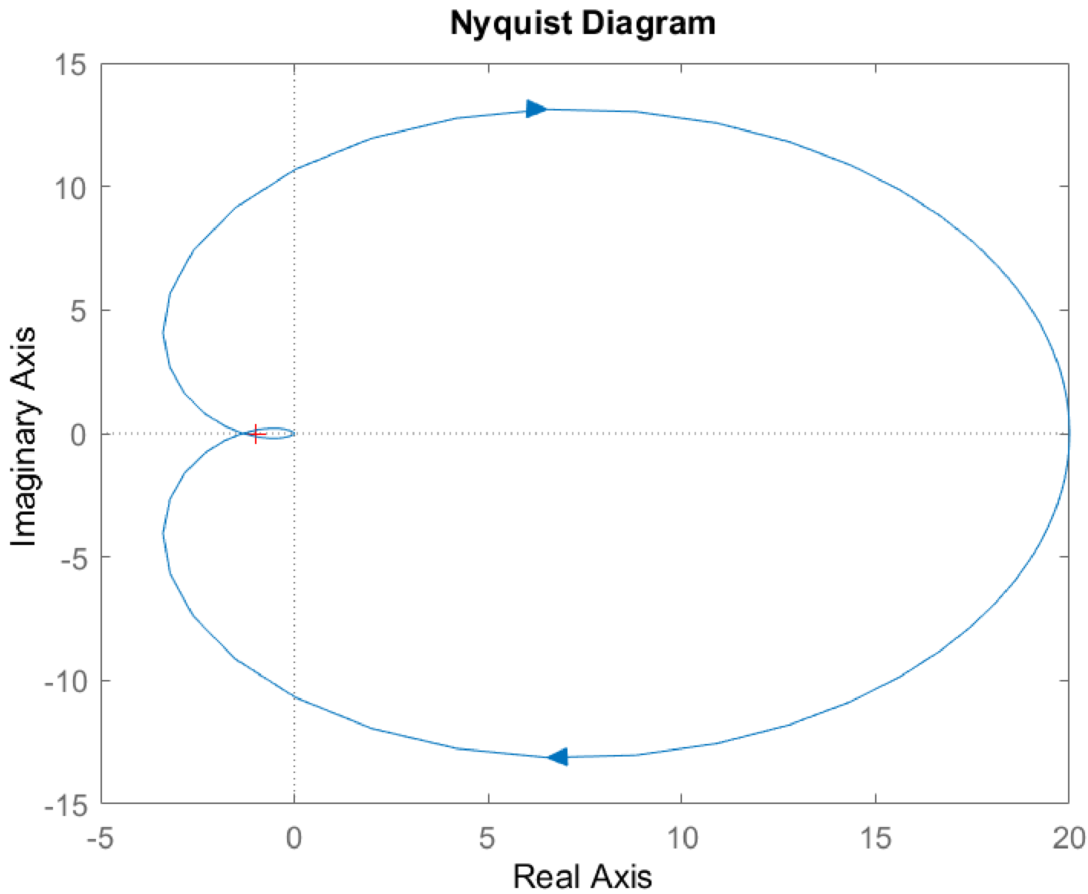


Nyquistin diagrammista on etsittävä piste, jonka etäisyys origosta on 1 ja sitten katsottava, kuinka suuri on tämän janan ja negatiivisen reaaliakselin välinen kulma. Tämä piste on vielä vaikeampi katsoa kuvasta kuin Boden diagrammin tapaus. Kuvassa on aika lähellä oleva esimerkki, josta myös nähdään, että vaihevara on aika lähellä 45 astetta. Huom. Tietysti Boden diagrammin perusteella saatu vastaus auttaa tässä. Jälleen on kuitenkin oleellista, että **periaate on oikein selitetty.**



c. Vahvistuksen *K* kasvattaminen ei vaikuta vaihekäyrään. Vahvistuskäyrä siirtyy ”ylemmäs”, jolloin 0dB ylitystaajuus kasvaa. Kyseisellä kulmataajuudella vaihe on ehtinyt pudota eli vaihevara pienenee. Nyquistin diagrammissa taajuusvasteen haarat ”kasvavat” *K*:n kasvaessa lähemmäs reaaliakselia, mutta eivät millään *K:*n äärellisellä arvolla sitä leikkaa (huom. vaihekäyrä). Vaihevara pienenee.

3. Säätöpiirin luupinsiirtofunktion Nyquistin diagrammi on esitetty kuvassa. Luupinsiirtofunktiolla (avoimen järjestelmän siirtofunktiolla) ei ole napoja oikeassa puolitasossa.



Kuinka monta napaa suljetulla systeemillä on oikeassa puolitasossa? Onko systeemi stabiili? Perustele vastauksesi esittämällä siihen liittyvä teoria. (3+3 p)

Ratkaisu: Nyquistin stabiilisuuslauseen mukaan pätee $Z = N + P$, jossa

P on avoimen järjestelmän oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä,
N ilmaisee, kuinka monta kertaa avoimelle järjestelmälle piirretty Nyquistin diagrammi kiertää kriittisen pisteen (-1,0), (myötäpäivään: positiivinen, vastapäivään: negatiivinen).
Z on suljetun systeemin oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä.

Tehtävän mukaan $P = 0$. Kuvasta nähdään, että Nyquistin diagrammi kiertää kriittisen pisteen kaksi kertaa myötäpäivään (”kaksi silmukkaa”). Siis $N = 2$.

$Z=N + P = 2+0 = 2$. Siis suljetulla systeemillä on kaksi napaa oikeassa puolitasossa ja systeemi on epästabiili. Huom. Kaavaa $Z=N + P$ sovellettaessa ei voi koskaan käydä niin, että Z tulisi negatiiviseksi. Jos niin käy, on tehty jokin virhe.

4. Kirjoita lyhyet selvitykset seuraavista aiheista.

a. Tilatarkkailija, sen viritys ja käyttö tilasäädössä. Esitä Simulinkin kaltainen kaavakuva soveltamisesta. (3 p)

b. Digitaalisäädön (tietokonesäädön) kaksi peruslähtökohtaa, kun tarkoitus on suunnitella prosessoripohjainen säädin jatkuvalle prosessille. (3 p)

Ratkaisu:

a. Kun prosessin tiloja ei voida mitata, pitää esimerkiksi tilatakaisinkytketyn säätölain toteuttamiseksi käyttää tilatarkkailijaa. Sen tulosuureina ovat prosessin mittaus *y* sekä säätäjältä tuleva ohjaus *u*. Lähtösuureena on tarkkailtu tila $\hat{x}$. Tilatarkkailija on muotoa

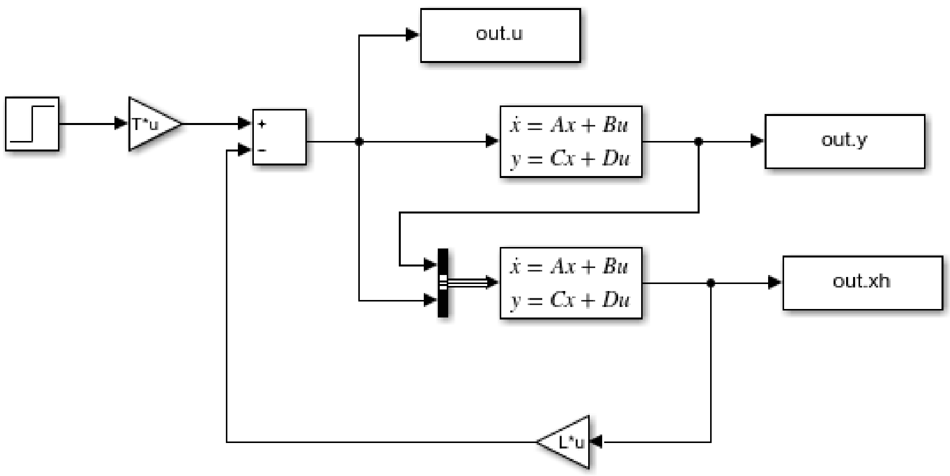
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K\left[y(t) - C\hat{x}(t)\right]$$

jossa *K* on viritettävä arvo (yleensä vektorisuure). Tarkkailijan loppuosalla korjataan estimaattia, kun prosessista saadaan uutta mittaustietoa *y*(*t*). Kun tarkkailuvirhettä merkitään symbolilla $\tilde{x}(t)$, saadaan laskujen jälkeen (kts. esim. luentokalvot)

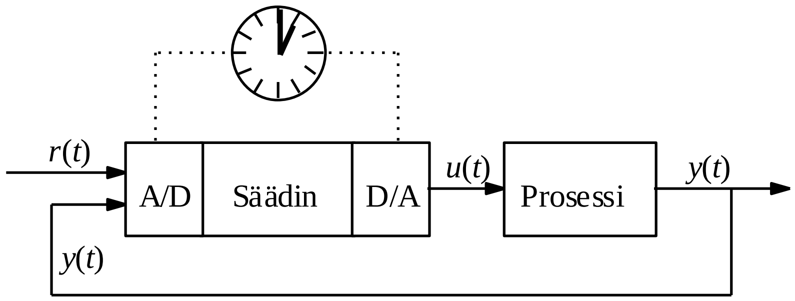
$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - KC)\tilde{x}(t)$$

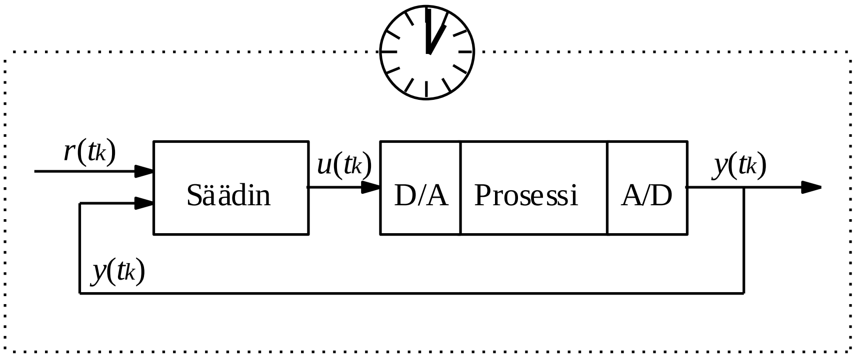
Matriisin *A*-*KC* ominaisarvot viritetään sopivalla *K*:n arvolla vasempaan puolitasoon ja niin, että tarkkailija on riittävän nopea. Tällöin siis tarkkailuvirhe menee asymptoottisesti nollaan.

Esimerkkinä diagrammi, jossa tilatakaisinkytkennässä käytetään tarkkailtua tilaa. Säätäjä on muotoa $u(t) = Tr(t) - L\hat{x}(t)$



b. Seuraava kuva esittää kahta pääsuunnittelumenetelmää. Ne ovat periaatteiltaan hyvin erilaisia.





Molemmissa tapauksissa prosessi on jatkuva-aikainen. Ensimmäisen kuvan tapauksessa prosessille on ensin suunniteltu jatkuva-aikainen säätäjä perinteisen analogisen säätöteorian keinoin. Tästä on sitten muodostettu diskreettiaikainen approksimoiva säädin. Diskretointimenetelmiä on useita esim. Euler, Tustin, jne.

Jälkimmäinen kuva esittää tapausta, jossa prosessi ensin diskretoidaan ns. tarkalla diskretoinnilla, joka edellyttää prosessin tulossa ns. nollannen kertaluvun pidon (ZOH=zero order hold). Tässä tietokonesäätäjältä tuleva ohjaussignaali (pulssijono) muutetaan jatkuvaksi pitämällä signaalin arvo vakiona aina näytepisteiden välillä.

Tarkalla diskretoinnilla (käsitellään myöhemmällä kurssilla) saadaan prosessista diskreettiaikainen malli, joka on täsmälleen tarkka (jatkuva-aikaiseen malliin verrattuna) näytepisteissä. Tämän mallin perusteella suunnitellaan suoraan prosessoripohjainen säätäjä diskreetin säätöteorian keinoin.